



Jean Piaget

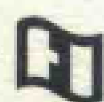
总主编　李其维 赵国祥

皮亚杰文集

Collected Works of Jean Piaget

第七卷（上）

本卷主编　蒋　柯



河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS



总主编 李其维 赵国祥

皮亚杰文集

Collected Works of Jean Piaget

（第七卷）

Volume Seven

皮亚杰心理逻辑学

（上）

Jean Piaget's Psycho-Logic

（Part Ⅰ）

主　编　蒋　柯

副主编　曹宁宁　李梦霞

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS
·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

皮亚杰文集. 第七卷/李其维,赵国祥总主编;蒋柯分卷主编. 一郑州:河南大学出版社,2020.9

ISBN 978-7-5649-4479-7

Ⅰ.①皮… Ⅱ.①李… ②赵… ③蒋… Ⅲ.①皮亚杰(Piaget, Jean 1896－1980)一文集 Ⅳ.①B84－53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 190625 号

责任编辑 王 慧 姜 畅
责任校对 纪庆芳
封面设计 马 龙

出　版 河南大学出版社
地址:郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号　　邮编:450046
电话:0371－86059701(营销部)　　网址:hupress.henu.edu.cn
排　版 郑州市今日文教印制有限公司
印　刷 河南瑞之光印刷股份有限公司
版　次 2020 年 12 月第 1 版　　**印　次** 2020 年 12 月第 1 次印刷
开　本 787 mm×1092 mm 1/16　　**印　张** 118.75
字　数 2531 千字　　**定　价** 890.00 元



李其维，1943 年生，江苏滨海人，华东师范大学终身教授；享受政府特殊津贴；曾任上海市心理学会理事长、中国心理学会副理事长。现为中国心理学会会士、上海市心理学会名誉理事长。加拿大维多利亚大学访问学者（1990—1991）、瑞士日内瓦大学高级访问学者（1999—2000），并受聘为日内瓦大学“皮亚杰文献档案馆基金会国际委员”（International Associate of the Foundation of Archives Jean Piaget）。

曾任《华东师范大学学报（教育科学版）》副主编（1996—2015）、中国心理学会《心理科学》主编（2009—2017）。

发表的主要论文：《对研究形式运算的“组合系统”和 INRC 群的方法论探讨》（《心理学报》，1989），《“认知革命”与“第二代认知科学”刍议》（《心理学报》，2008），《心理学的立身之本——“心理本体”及心理学元问题的几点思考》（《苏州大学学报（教育科学版）》，2019）。出版的专著：《论皮亚杰心理逻辑学》（1990）、《破解“智慧胚胎学”之谜：皮亚杰的发生认识论》（1999）；共同主编《皮亚杰发生认识论文选》（1991）；主持翻译“皮亚杰发生认识论精华译丛”（2005）和“当代心理科学名著译丛”（华东师范大学出版社，1999 年起）；共同主持翻译《儿童心理学手册（第 6 版）》（华东师范大学出版社，2009），并获第二届中国出版政府奖图书提名奖（2010）。

获国家教委和国务院学位办授予“做出突出贡献的中国博士学位获得者”称号（1991）、中国心理学会终身成就奖（2015）、中国科协全国优秀科技工作者荣誉称号（2016）。



赵国祥，博士、二级教授，河南大学、河南师范大学博士生导师。先后在华中师范大学、河南大学、华东师范大学获得学士、硕士、博士学位；1999 年 9 月至2001 年 9 月，在中科院心理所博士后流动站做研究工作。自2002 年 4 月起，先后担任河南大学教育科学学院院长、河南大学副校长、河南大学常务副校长（正校级）、河南师范大学党委书记，第十三届全国人大代表。先后兼任中央组织部领导干部考试与测评中心专家组成员、教育部高等学校心理学教学指导委员会委员、教育部普通高等学校学生心理健康教育专家指导委员会委员、教育部中小学生心理健康教育专家指导委员会委员、中国心理学会候任理事长（2020）、河南省心理学会理事长、《心理研究》杂志主编；被评为享受国务院政府特殊津贴专家。

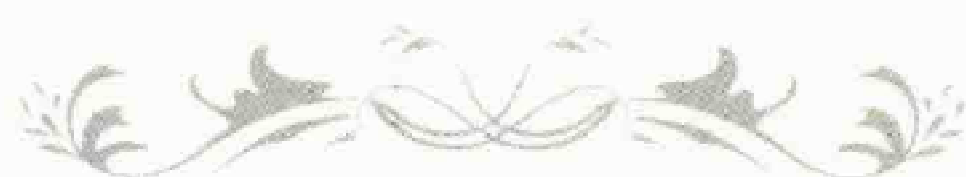
学术研究主攻方向：管理心理学与人力资源管理、心理健康教育。在《心理学报》《心理科学》《AIDS Care》等国内外学术刊物上发表论文 80 余篇；在中国社会科学出版社、高等教育出版社等出版《心理学概论》《管理心理学》《领导者个性论纲》《领导艺术》《领导心理研究》《管理心理学高级教程》《现代大学生心理健康教程》等 19 部专著、教材；承担国家级、国际合作、省部级科研课题 14 项；获国家级、省部级科研、教学优秀成果奖 12 项。

《皮亚杰文集》编委会

《皮亚杰文集》出版委员会

谨以本文集敬献
中国皮亚杰理论传播和研究的先驱者

艾　伟、高觉敷、黄　翼、左任侠、朱智贤、刘　范、卢　濬、胡士襄、
曹传詠、傅统先、朱曼殊、李伯黍、吴福元、李　丹、吕　静
等诸位前辈



出版说明

一、文集收录了皮亚杰公开出版或发表的著作、研究报告、演讲和回忆录，以及有关皮亚杰学术活动的采访记录。部分卷次在其附录中收录了少量其他学者对皮亚杰理论所做的述评。全部附录文本量占文集总量的3%左右。

二、文集对所循译的原初文本的选择方案是：原文为英文的或已有较成熟的英译版本的文本，从英文译为中文；原文为法文且未有英译本或英译本内容不完整的，从法文译为中文并保持文本的完整性。

三、曾经再版或经多次转载收录的文献，文集大多收录最近版本，并注明历次再版或转载的信息；少数文本虽有再版却没有实质性改动，为体现原始文献的完整性，酌情选择较早版本。

四、文集按照文本研究主题分别成卷，每一卷中各文本的排列顺序首先参照其主题之间的逻辑关联，并兼顾出版时间，综合考量以进行编排。

五、有少数英译本和法文原文标题不一致的文本，中译本参照所循译版本的表达。

六、原文引文部分、参考文献、脚注或尾注，在翻译时尽量保持原貌。

七、所涉及人名参照《世界人名翻译大辞典》（中国对外翻译出版公司，1993年版）做统一校订。已有中译本的文本，在收入文集时，也对其中译法不一致的人名、地名进行了统一校订。

八、原文作者的国籍按其当时所供职的学校、机构所在国家为准做标注。

九、文集校订并规范了一些学术用语的译法，如“格式”（schème，schèmes）和“图式”（schéma，schémas）在之前的英译本中被混淆为schema，在中译本中多被混淆为“图式”，在文集中对这两个概念做了精确的区分和辨析；accommodation之前多被译为“顺应”，文集中统一为“顺化”，以与其同位概念“同化”（assimilation）及上位概念

“适应”(adaptation)有更好的对应和区分。

十、译者或编者勘校的原文笔误,统置页末脚注加以说明。

十一、对原文中的“主要人名索引”和“主要术语索引”做中英或中法对译,并尽量保持原貌。

《皮亚杰文集》虽未能收集皮亚杰的全部著述(所缺特别是皮亚杰用西班牙语和意大利语著述的少数文本,以及极少一部分无法获得版权的文本),但所收录文本覆盖了皮亚杰理论的各相关领域具有充分代表性的重要著作,这使得《皮亚杰文集》在体现皮亚杰理论体系的学术价值和整体性的意义上是完整的。

总目

序　一　（Marc Ratcliff）

序　二　（Leslie Smith）

序　三　（李其维）

第一卷　皮亚杰自传、访谈及皮亚杰理论自述

第二卷　皮亚杰思想的认识论与方法论

第三卷　心理发生及儿童思维与智慧的发展

第四卷　从动作到觉知——儿童对世界的认知及个体意识发展

第五卷　知觉与符号功能的发展

第六卷　智慧操作的建构过程

第七卷　皮亚杰心理逻辑学

第八卷　数、因果性范畴及时间与某些物理概念的个体发生

第九卷　可能性、必然性范畴及空间、几何（学）和概率概念的个体发生

第十卷　皮亚杰理论的应用——教育及其他

走近皮亚杰　继学有来者——代《皮亚杰文集》后记（赵国祥）

卷目

上卷

导读/1

函数认识论与心理学/27

公理方法和运算方法/237

逻辑学与心理学/257

儿童早期逻辑的发展——分类和系列化/297

数学认识论与心理学/579

论命题逻辑与类和关系"群集"之间的关系/831

下卷

从儿童到青少年逻辑思维的发展/851

与数理逻辑符号表达有关的心理活动/1099

运算逻辑试论/1115

论逻辑运算的转换——256 个二值命题逻辑的三元运算/1399

走向一种意义的逻辑/1583

附录

形式运算理论——一篇评论文章/1777

形式运算思维中的真值函项逻辑/1793

一种批判的观点——皮亚杰的《逻辑通论》/1801

意义逻辑和有意义的蕴涵/1809

人类发展的规范与规范性事实/1827

皮亚杰逻辑的未来/1859

导　读

皮亚杰的心理逻辑学

皮亚杰通常被人们奉为哲学家、心理学家，甚至会很容易地记起他早年在生物学领域所做的工作。他自己称自己为“发生认识论”者。学术界从来不能低估他在哲学、心理学以及认识论领域的建树，但是很少有人会把他称为逻辑学家，甚至在很多场合，人们几乎想不起皮亚杰在逻辑学领域所做的工作。在本卷所收录的文献中，我们可以看到皮亚杰在逻辑学领域的著述颇丰，汇集起来也足以让他确立作为逻辑学家的身份。

本卷将皮亚杰在逻辑学领域的重要工作进行了分株整理，一共收录皮亚杰对逻辑学问题展开讨论的书和文章，以及他人所著的相关评述性文章，凡书8册，文章9篇。

通过此次整理翻译，我们比较全面地阅读了皮亚杰本人有关逻辑学的著述，也参考了一些相关的评述。这为我们勾勒出了皮亚杰在逻辑学领域独特的创建，其中许多观念是对同时代主流逻辑学思想的颠覆性批判和创造性修改，在皮亚杰逝世后的40年中似乎并没有引起学界足够的重视。但是，当认知逻辑发展到了今天，由机器学习、人工智能等围绕逻辑学的一系列新技术或新理论引发了关于逻辑学的重要变革，或正在触发这种变革，在这种形势下，我们重新审视皮亚杰的逻辑学理论，会发现其中很多重要观念正是对当前逻辑学所面临问题的预见。因此，我们有理由相信，随着21世纪的第二个十年的来临，在皮亚杰逝世40周年以后，对皮亚杰理论，包括他在逻辑学领域的创建的“再发现”，将会再次推进当代认知科学的发展。皮亚杰研究在未来的几个十年内有可能迎来又一次热潮。

一、皮亚杰逻辑的发生学意义

皮亚杰的理论体系可以用“纷繁复杂”来形容，首先是涉及的领域广，包括生物学、物理学、哲学、心理学等重要的知识部类；其次是理论建构的层次复杂，有跨领域的类比研究，经验层面上的实证研究，还有认识论层面上的精密推论。当我们在阅读皮亚杰的

论著时，一定会被他的旁征博引所折服，也常常会因为他在各个认识层面上自由切换而又不失精确性的理论思考而感到眩晕。皮亚杰的著作中，包含了许多关键范畴，诸如：结构、平衡化、逻辑、格式、协调等等，其中许多都是皮亚杰为了自己的理论建构而创造性地整合了前人的概念而设计出来的，有的甚至是创造了全新的概念。为了准确理解皮亚杰的理论体系，我们除了要仔细辨析这些范畴或概念在皮亚杰理论体系中的特别意义之外，似乎还应该厘清这些概念之间的逻辑关系。但是，对这些概念之间逻辑关系的探索工作常常令读者无所适从，因为我们很难从皮亚杰的著述中梳理出一条清晰的 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$……（$A$ 蕴涵 B 蕴涵 C 蕴涵 D……）逻辑线索。应对这个问题的关键是我们需要先匡正对皮亚杰的“发生”观念的理解。

值得注意是，皮亚杰用 genetic 这个词来描述儿童心理的起源。发生认识论的英语表达是 genetic epistemology，法语则是 l' épistémologie génétique。其中，genetic 或 genetical（或者法语的 génétique）这个词通常被翻译为“基因的”或“遗传的”。如果在这个意义上，儿童的心理结构是先天地获得的，或者说是通过遗传而获得的，这就暗合了康德的先验范畴学说。但是，皮亚杰虽然承袭了康德的认识论架构，但是他并不认可将认识的起点归因于某种先天因素的形而上学进路①。皮亚杰在使用 genetic 这个词时，并不是在使用它的遗传的或基因的这一层含义。因为这些意义都不可避免地将儿童心理的起源引向了先天论的解释。

从词源上分析，genetic 是 gene 的衍生词，根据《韦氏词典》②的释义，genetic 或 genetical有两个含义。第一个含义是指“决定事物的起源、发展的，或对此有因果性前提性的，或与之相关的（属性）”（relating to of determined by the origin, development, or causal antecedents of something）；第二个含义才是指“基因的，与基因相关的，由基因引起的或控制的（属性）”（of, relating to, caused by, or controlled by genes）。可以看出，genetic 这个词一方面表达了“有机体受先天性的条件，以及受基因决定的特征”；另一方面还表达了“某些内容的起源、生成或发展性特征”。如果我们以儿童的出生作为界线，genetic 所描述的过程可以分成两个部分，第一个是儿童出生前已经具备的某种“前提”，第二个是这些“前提”在出生后的表达或事实性生成。汉语“遗传的”对应地翻译了第一部分的含义，“发生的”则对应翻译了第二部分的含义

所以，当我们在皮亚杰的语境中，用汉语来诠释 genetic 这个词的含义时，更适合将它翻译为“发生的”，即，尽管皮亚杰也强调遗传和进化对儿童认知起源的前提性作用，但是他的工作重心始终是指向了儿童出生后，在既有的生物学基础上“生成”心理结构

---

① 熊哲宏：《皮亚杰理论与康德先天范畴体系研究》，华中师范大学出版社，2002；Piaget, J., 1965/1971, *Insights and Illusions of Philosophy* (Translated from the French by Wolfe Mays), New York: The World Publishing Company. (1965 by Presses Universitaires de France, 1971 English translation and published by The World Publishing Company.)

② Merriam-Webster 词典。

的过程。相应地,在皮亚杰的著作中常常出现的 Genetic Psychology 应该被翻译为"发生心理学"而不是"遗传心理学",李其维先生在谈到这个问题时,有一段很精彩的论述:

我意把"Genetic Psychology"译为"发生心理学"为妥,最根本的原因乃是因为皮亚杰主要是从"发生"而不是从"遗传"的角度使用"Genetic"的。

理由有二。其一,皮亚杰所研究的认知建构活动只从主、客体相互作用的"活动"谈起,遗传的作用只是为这一活动的建构提供某种遗传上的可能性,即作为先天装备的遗传性的反射活动只是后天活动的起点,如此而已!从反射活动再往前上溯至脑内活动,它不是皮亚杰的兴趣所在(你也可以理解为是其某种时代的局限)。他对神经层面的活动与他所注重的行为层面的活动之间有什么关系,从来没有成为他的发生认识论的目标指向!作为一名生物学家,皮亚杰曾自嘲连显微镜的生物切片都做不好!自然,这算不上其优点,但对发生认识论所专注的行为层面的活动格式来说,的确关系不大。我们不排除"未来的发生认识论"可以往前延伸至脑内的神经活动,但至少在皮亚杰时代,他所指的"发生"与神经无关,与遗传无关,认知的表型复制理论的提出基于的也只是某种生物学类比方法论。其二,正如皮亚杰自己坦承的(略有戏谑之意):心理学只是他从事哲学认识论思考的方法论插曲!因此可以说发生认识论正是在使用心理学方法去研究认识发生问题时演变为"发生心理学"的!我们很难想象发生认识论在此过程中会变成什么"遗传心理学"!在皮亚杰的眼中,所谓 Genetic Psychology 就是相伴着知识成长(所谓"发生认识"的题中应有之意)而事实上形成的"发生心理学"!①

皮亚杰把自己称为"发生认识论"学家,而不是一个哲学家,也不是一个心理学家,这说明,"发生"这个概念在皮亚杰理论中的重要意义。皮亚杰的"发生"似乎有点"无中生有"的味道。通常,人们会认为,一个人今天获得的新知识必然是以昨天已有的知识或经验为前提的,昨天的知识则以前天的知识为前提……以此类推,初生的婴儿可以被看作是零知识和零经验的,这时儿童如何获得新知识呢?皮亚杰认为,儿童降生到这个世界上,首先由于遗传的因素,他(她)必然拥有必要的感知和活动能力。儿童正是通过这些初始的感知和活动能力与世界发生互动,而这种互动就是儿童知识和经验的"发生"起点。这种"发生"本身不再需要额外的逻辑学前提,因为逻辑本身也是在这个"发生"过程中被建构出来的。这就像霍金的"大爆炸"理论假设宇宙起源于"奇点大爆炸",但是如果有人要问:"在大爆炸之前,奇点外面是什么?"这样的追问是没有意义的,因为时间和空间是"大爆炸"结果而不是"大爆炸"的先在条件。

皮亚杰并没有把逻辑看作是知识的先天规定性(柏拉图主义,或唯理论),也没有把逻辑看作是一种人为的发明(经验主义,经验论),而是把逻辑看作是发生性建构的结

---

① 李其维先生邮件内容。

果，因此，皮亚杰的逻辑学可以被看作是逻辑建构论①。

发生认识论的基本立场是“认识（知识）不是感知经验的复本；也不是理性的自我显现。认识是逐步建构的”②。皮亚杰认为，建构起源于主体和客体之间的互动。皮亚杰把这种主客体之间的互动称为“协调”。

皮亚杰认为儿童一开始是没有任何自我意识的，不能在外部给予和内部给予之间做出固定的区分③。儿童的这种未分化的心理特征是一种极端的自我中心主义，因为这时儿童的认识中没有主体和客体的分化，所以这时儿童全部的认识都只有关于“我”的体验。因为这时儿童的心理是完全自我中心的，所以不同的活动（比如感知到光亮和头的转动）之间也是相互孤立的、不协调的。它们只能都以自我作为固定不变的参照。这种自我中心化不是随意的，也不是有意识的④。也就是说，这时儿童的心理还没有主体与客体的区分，或者说这种区分是非常不明确、不清晰，我们可以用“混沌”来描述这时儿童的心理特征。

在这种条件下，动作和感知的协调就成了儿童认知发生的起点。儿童通过感知和动作两种“自我”体验的协调，建立起了关于“自我”和环境之间最初的稳定关系。例如，当儿童头部转动时，他（她）眼睛感受到的光感也随之发生改变，这两种体验（头部的动作和眼睛的感受）一开始是相互独立的，但是经历一些尝试之后，儿童开始在这两种和自我有关体验之间建立起协调性的关系。这种关系使得儿童的“自我”与环境之间有了最初的分辨，儿童的“自我”作为一个主体从环境中独立出来了。主体的独立同时意味着客体的对应形成。于是，协调就构成了儿童对客体认识的起源或“发生”。

李其维先生在评述这个过程时更强调了，“皮亚杰更从协调中看到了逻辑”⑤，机敏地指出了皮亚杰的逻辑建构论的核心观念，这就是，协调是儿童认知的起源，这种起源也意味着所有知识论的范畴之间的“协调”，所以，那种把认知起源看作是一系列范畴按照某种先后顺序和逻辑关系第次地出现的观念是不准确的。在逻辑和协调之间，以及其他的知识论范畴之间，都不应该受到“某种逻辑关系”的约束，而是彼此建构。

协调中为什么会有逻辑？奥妙在于协调中产生了一种新的经验类型。它不同于仅作用我们感官的那种物理经验（如石头是凉的、硬的、重的）。皮亚杰称之为逻辑-数学经验。有动作的协调，就有本质上属于动作之间关系的逻辑-数学经验存在。这种对于关系的经验会演变成为某种格式（schemes）或结构（structures）。于是，主体对范畴的

---

① Piaget, J. , Garcia, R. , *Toward a Logic of Meaning*, New Jersey Hove and London: Lawrence Erlbaum Associates, 1991.

② 李其维:《评发生认识论的“反省抽象”范畴》，载《心理科学》，2004，第 3 期。

③ 皮亚杰:《发生认识论原理》，商务印书馆，1981，第 22 页。

④ 皮亚杰:《发生认识论原理》，商务印书馆，1981，第 24 页。

⑤ 李其维:《评发生认识论的“反省抽象”范畴》，载《心理科学》，2004，第 3 期。

认识（即关于范畴的知识）也就体现为某种格式或结构。①

儿童通过“协调”所形成的不是“自我”在环境中获得的知觉经验，而是知觉经验之间相互关联的“逻辑-数学经验”。之所以称之为逻辑-数学经验，是因为知觉经验已经包含了潜在的推论，这就是关于经验之间的因果性的知识②。皮亚杰将认识活动定义为“通过同化和顺化，达成心理结构与物理结构的同构”③，而心理结构就是逻辑结构，所以，儿童认知的发展就是这些体现为逻辑-数学经验的逻辑结构的发展过程。

通过“协调”，逻辑、格式、结构等一系列知识论范畴都出现了。这种出现之所以是“建构”而不是“涌现”，是因为，每一个知识论的范畴都不是独立地出现的，而是总是在与其他范畴的对应或互动过程中形成的，就像感知和动作之间的协调、儿童动作和环境之间的互动一样，没有相对的互动和协调，就不会有任何知识论范畴形成；反过来，当我们说一个知识论范畴形成了或出现了，这正是体现为它与其他范畴的协调与对应。这是皮亚杰的建构论与摩根的涌现论的区别所在。皮亚杰曾经批评摩根的涌现论只是提出了“可能发生”的问题，却没有能够解释“是如何发生的”：

> 摩根（Lloyd Morgan）和另外一些人坚决注重的“涌现论”学说，只限于证明有不同水平的整体性的存在，却又说这些整体性是在某个时候“涌现”出来的；这种理论只是提出了这里面存在着问题而已。④

在发生学意义上，皮亚杰的逻辑不是先在的认识活动或知识的前提，也不是个体在后天的环境中的刻意发明。逻辑作为人和环境互动的建构，是和所有知识论范畴一起，在这种互动中通过“协调”而“发生”的。

二、皮亚杰逻辑的结构性意义

逻辑（logic）一词的本意是指思维的规则。古希腊的哲学家创造了逻辑学，在经过后世无数逻辑学家一代一代的传承和发展以后，今天的逻辑学已经形成了一套精确的、形式化的规范体系，也形成了许多的流派。但是，在“逻辑本身是什么”这个问题上，古往今来的逻辑学家一直难以达成共识。主流的意见有两大类：一类以唯理论为代表，认为逻辑是某种先天的存在，人应该生而有之，后天的学习和训练只是帮助个体“回忆”起这些先天的逻辑规则；另一类以经验论为代表，认为逻辑是人的后天发明。这两个阵营都共同认可同一个预设，这就是逻辑代表了某种“正确的思维规则”，逻辑规定了人应该

---

① 李其维：《评发生认识论的“反省抽象”范畴》，载《心理科学》，2004，第3期。

② Bruner, J. S., Bresson, E., Morf, A., Piaget, J., *Logique et Perception*, Paris: Presses Universitaires de France, 1958.

③ 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007。

④ 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第38页。

按照某种规则来进行思维活动。而人天然地不善于、或者说不会使用规范的逻辑，所以，人需要经过长期严格的逻辑训练来学习使用这些“正确的”规则。

与唯理论和经验论都不同的是，皮亚杰的逻辑既不是唯理论所倡导的先天存在，也不是后天的人为发明，而是个体通过“发生”而建构出来的。更进一步，因为逻辑本身属于个体的建构，所以它不代表某种“正确的”思维规则，而是反映了个体“是如何”进行思维的。尽管皮亚杰也使用了形式化的符号来表述他的逻辑内容，但是他的这些逻辑符号和逻辑公式所表达的不是人应该遵守的逻辑规则，而是描述了儿童如何从动作中形成一般化的认识。皮亚杰的“逻辑”即描述了儿童从动作中形成的一般化认识的规律。

皮亚杰认为，初生的儿童的心理是非结构化的，可以用“混沌”来形容，这时的儿童是“绝对的自我中心的”，实际上，这时的儿童是不区分我与非我（环境）的。但是，一旦儿童开始了感知和身体活动的协调，就开始区分了“我”和“非我的环境”，心理的结构化进程就开始“发生”了。在发生认识论看来，人的心理结构是“逻辑-数学经验结构化的结果”，同样地，物理世界也是一种结构。认识过程就是心理“获得”物理世界的结构的过程，也是逻辑-数学经验通过结构化而与物理结构之间建立“同构”的过程。①

在这个前提下，认识活动实际上包含了两种可能性，其一，在结构中“要求具有内在固有的可理解性的理想或种种希望”②，即，是以逻辑-数学经验本身为对象的认识活动，这就是皮亚杰逻辑中的一个重要范畴：“反省抽象”。“反省抽象”的结果就是形成了逻辑结构。其二，认识活动也可以发生在结构与结构之间，“人们已经能够在事实上得到某些结构，而且这些结构的使用表明结构具有普遍的、并且显然是有必然性的某几种特性，尽管它们是有多样性的”③。从逻辑-数学经验开始，发生认识论中所有的知识论范畴都被赋予了结构性的意义，即，它们都可能被定义为某种特殊的结构，或者是由结构之间实现转换的关系或规则。于是，儿童的认知发展也就成了心智结构化的过程，也是逻辑的建构过程。这就是皮亚杰逻辑的结构性意义所在。

皮亚杰把结构定义为“包含了种种转换规则的系统”，并强调了结构作为一个系统所具有的三个特征：整体性、转换性和自身调节性④。根据这个定义，皮亚杰对逻辑结构做出了三个基本界定，第一，通过整体性定义了逻辑结构的发生；第二，通过转换性定义了逻辑结构的历史性或发生学意义，也就是个体思维规律的发生与发展过程；第三，通过自身调节性定义了逻辑结构发展的终极目标，即，实现守恒，完全可逆性，最终形成形式化运算的逻辑结构。

结构的整体性首先是对“原子论式的联想主义和涌现论的整体性图式”的反驳。皮

---

① Inhelder, B., Piaget, J., *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*. USA: Basic Books, Inc, 1958.

② 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第2页。

③ 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第2页。

④ 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第2页。

亚杰正是希望通过对原子论和涌现论的"破"来达成逻辑结构主义的"立"。在皮亚杰看来，"按照现时所确定的意义，逻辑本身却并不总是包括作为整体又作为一些转换规律的结构的'种种结构'的：现时的逻辑学在许多方面仍然还是从属于相当顽强的原子论的，逻辑结构主义还只是刚刚有了个开端"①。皮亚杰很认同当时新兴的系统论、控制论和信息论等理论，并以此为据定义了逻辑结构的发生学意义。

结构的整体性意味着作为一个结构必然拥有一个边界，有内外的区分。同时，在结构的边界以内，结构的整体性意味着结构本身的构成部分之间的联结和协调关系。"一个结构是由若干个成分所组成的；但是这些成分是服从于能说明体系之成为体系特点的一些规律的"②，例如，数并不首先是一个一个孤立的存在，然后被联结成为数列，而是相反，是数列的整体规定了每一个数的意义，而只有作为整体的数列才能体现出"群"(group)、"群集"(groupment)和"格"(lattice)等结构的性质。这一组范畴构成皮亚杰逻辑的核心范畴。通过这一组范畴的组合和推演，皮亚杰设计了一个庞大的逻辑命题集合。皮亚杰用这样的命题集合来描述儿童到成年人的认知发展。

此外，皮亚杰还认为原子论的联结主义学说并不能解释整体性的形成问题；而涌现论"只是满足于把想要由简到繁办事的人们所看来是自然的思想步骤颠倒过来，并按照一种被认为是自然规律的'涌现'方式，一开始并不增加什么，就提出整体性来"③，即，涌现论至多是陈述了整体性出现了这个事实，却不能解释整体为什么会出现。在排斥了原子论和涌现论的立场之后，皮亚杰提出了第三种关于整体性的解释立场，这就是"运算结构主义(或'逻辑结构主义')的立场"。"这种立场，从一开始就采取了一种重视关系的态度……因为整体只是这些关系或组成程序或过程的一个结果，这些关系的规律就是那个体系(指结构)的规律"④。可以看出，皮亚杰的逻辑结构主义(或"运算结构主义")"就是要理解类、关系、数字、命题等的基础结构是如何建构的"⑤。

通过对结构的"整体性"的论述，皮亚杰还希望继续论证"整体之所以出现"以及"结构是如何形成的"等问题。前文已经阐述，儿童通过感知-运动的协调来实现心理结构或逻辑结构的"发生"。心理、结构、关系、逻辑等这一组知识论范畴实际上是不能彼此分离的。"这意味着，发生认识论的一般问题就是要根据认知的形成机制来抓住认知的本质，显然逻辑结构的建构是被包含在这个过程中的"⑥。于是，皮亚杰通过"结构的整

① 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第2页。

② 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第4页。

③ 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第5页。

④ 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第5页。

⑤ Piaget, J., *Essai de logistique opératoire*, Paris: Dunod. /2nd ed. slightly revised by J. B. Grize, 1972.

⑥ Piaget, J., *Essai de logistique opératoire*, Paris: Dunod. /2nd ed. slightly revised by J. B. Grize, 1972.

体性特征"的论证反驳了原子论和涌现论，用"发生认识论"阐释了逻辑结构的生成或起源问题。

结构的第二个特征是"转换性"。任何一个整体性的结构都不可能是完全静态地存在的，结构内部总是会发生各种形式的"转换"。"一切已知的结构，从最初级的数学'群'结构，到规定亲属关系的结构等，都是一些转换体系"①。转换是指结构在时空关系或逻辑关系上实现排列、置换、替代、反演或重复等活动，从而实现结构的内容和形式之间的转换。在结构化序列中，低阶成分相对于高阶成分就是内容与形式的关系。这些作为形式的高阶成分同时也是更高阶成分的内容。转换就是在这个序阶上实现从内容到形式的抽象。例如，儿童拉动桌布，让桌子上的玩具靠近自己，这是一种通过动作来实现了从玩具的空间位置改变（内容）到位移群（形式）的转换；或者，儿童在 A 和 B 之间进行比较：如果有 A 大于 B，那么也有 B 小于 A。这是对 A 和 B 这两个结构的构成要素在位置上的颠倒来实现了"逆运算"，这是一种逻辑结构的转换。

皮亚杰强调结构的转换性特征是为了与传统结构主义者的"非时间性"（或"非历史性"）结构划清界限，因为转换必然是一个时间性的或历史性的动作。皮亚杰批评索绪尔的共时性结构以及"格式塔主义"的静态结构，"一切反历史的或反发生论的结构主义，……就是要把结构最后建立在如同数理逻辑体系的结构那样的非时间性的基础上面"②。非时间性的结构必然面临"结构从何而来"的难题，正是通过"转换"，结构成了一种时间性的建构，或者是历史性的建构，例如：对于静态的结构而言：$A+B-B=A$。即一个结构增加一个元素再减去这个元素，原结构保持不变；对时间性的结构而言，$A+B-B=A'$（一个结构增加一个元素再减去这个元素，原结构发生了变化）。这里的新结构 A' 与原结构 A 的差异在于，A' 具有了 A 所没有的逻辑规则。因为，在一个元素中增加一个新的元素，再去掉一个元素，结构本身看起来又回到原来的样子，似乎没什么变化。但是，增加再减少的动作却构成了结构本身的一种转换，即代偿。代偿即意味着结构面对环境的变化或扰动而做出来的协调性转换，通过这种转换，结构适应了新的环境，也就是形成了新的逻辑结构。所以，结构的时间性的转换其实是一种生成性活动，通过转换的结构不再是原来的结构，而是生成了新的逻辑结构。所以，在发生论的意义上，时间性的转换是结构的生成性或发展性机制。

规则性的结构转换即是"运算"（operation）。运算是结构转换的一般化形式。运算必须遵守某种规则，规则是运算被进一步概括化的结果，也就是通过"反省抽象"对运算在高阶幂水平上所做的抽象。反省抽象"不是从客体里抽象出来的，而是从人们对于客体所加上的动作、并且主要地是从这些动作的最普遍的协调作用之中抽象出来的。例

① 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第 8 页。

② 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第 8 页。

如从汇集、赋序和找出对应关系等等过程里抽象出来”[①]。

通过反省抽象，运算和运算之间出现了某种高阶幂的抽象关系，它们规定了运算之间的“同化”和“顺化”发生的可能性，这就是“格式”(scheme 或 schema)。如果说运算和运算之间构成了某种结构，那么格式就是这个结构的“设计图”。但是，这个“设计图”与通常意义上的建筑图的区别在于，格式不是固定不变的，而是随着运算的建构性发展而发展的，反过来，格式的发展又推进了运算的进一步结构化。

通过这一套结构的生成性规则，皮亚杰建构了一个“活的”认知结构，即这种认知结构是可以自我繁衍的，是历史性的。这个过程可以简化为如下顺序：

动作——协调——逻辑结构——转换——运算——反省抽象——格式——运算的同化/顺化——运算结构化——认知结构(知识结构)

在这个序列中，运算和运算的转换构成了逻辑结构若干种转换形式。依靠这些转换形式，逻辑结构实现了与物理世界的形式化结构的同构，构成了认识的具体内容，即构成了儿童的知识结构。

结构的第三个特征是自身调节性。结构的自身调节性带来了结构的守恒性和某种封闭性。结构的守恒性和封闭性是结构趋于稳定和成熟，到达了结构“梯级的顶端”的标志[②]。自身调节性表达了皮亚杰关于结构发展目标的设定。

结构的守恒是指“一个结构所固有的各种转换不会越出结构的边界之外，只会产生总是属于这个结构并保存该结构的规律的成分”[③]。例如，我们在一个整数上加上或减去另一个整数，得到的结果依然是整数。这表明，在整数这个结构中所实现的转换不会超出整数本身。守恒性和封闭性实际上是同一的，正是因为结构的相对封闭性，它会拥有一个稳定的边界，在边界之内，结构保持稳定。但是这并不意味着一个结构不能被纳入更大的结构而成为其中的一个“子结构”。尽管任何结构都可能成为更大结构的子结构，但是结构边界内部的规律依然保持，这就是守恒。

结构的守恒并不等于结构的静态稳定。例如，当我们改变一个黏土团的形状时，到达守恒水平的儿童会认为黏土没有变多或变少，因为他们会用黏土团的长度和宽度相互代偿。这表明，结构的守恒性是由于代偿性而建立的。从控制论的立场看，代偿意味着结构的系统性预测——反馈机制的建立。

代偿是结构应对环境扰动的转换动作，例如儿童观察到天平不平衡，会尝试在天平的一边或两边加上或减去一些砝码以恢复平衡。儿童所做的加上或减去一些砝码的尝试就是代偿。年龄较小的儿童(处于具体运算阶段)只能对现实的扰动做出代偿，即在已经发生了失衡的天平上做出代偿性尝试；年龄较大的儿童，如果已经具备了形式运算

---

① 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第 14 页。

② 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第 10 页。

③ 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第 10 页。

的能力，则有可能对“虚拟的”扰动做出预期性代偿，即可以提出这样的假设：如果在天平的一边或两边加上或减去一些砝码，天平将保持平衡。并且，儿童能够有指向性地进行系统性的尝试来检验假设。这就是形式运算阶段儿童认知水平的重要标志：通过假设检验的推理来实现逻辑结构的系统性代偿。从控制论的角度来看，这种系统性代偿就是通过“预期—反馈—调节”来实现的结构的自身调节过程。

实现系统性代偿的前提就是守恒性和可逆性观念的建立。完全的守恒性和可逆性是逻辑结构发展“梯级的顶端”①。也正是在这个意义上，我们可以说，皮亚杰通过结构的自身调节性特征确定了逻辑结构发展的最终状态，描述了这样一种形式化结构：建立了完全守恒性和可逆性、完全的假言推理，形成了结构内在的稳定的整体性规律。

接下来，让我们来看看皮亚杰如何通过结构的三个特征推演出了逻辑结构的全部内容。

第一个范畴是“群”。群“就是由一种组合运算（例如加法）会合而成的一个若干成分（例如正负整数）的集合”②。群结构是代数的基础，是各种结构的原型。群包含了逆运算、结合律、汇集、相互置换等等运算规则。当这些运算规则没有完全结构化时，它们构成了“群”；当这些运算规则完全结构化，形成了一个严密的逻辑联系的系统时，这个系统因内部的调整或自身调节作用而具有自己的逻辑关系，这时，所有的逻辑关系的“次序结构”就构成了“格”（lattice，或者叫：网，network），格用“先于”或“后于”关系将结构的诸成分联系起来，每个成分通过最小“上确界”与格中相邻的高阶成分区分开；通过最大“下确界”与相邻的低阶成分区分开。皮亚杰从动作运算出发，建构了一个复杂的集合的结构体系。对于这种做法，尽管一些逻辑学家不以为然，也有另一些研究者则持赞成态度，并且认为：

假如集合结构存在，应当在“自然”思想归属的结构中探寻集合结构的根源。但是，在这种情况下，还需要解决中间阶段形式化未被控制的问题，因为，如果有可能将群、格结构等类型已完成结构公理化，问题就只与以前结构有关，例如“群集”结构③。

皮亚杰专门强调，“自然”结构规律通常缺乏主体意识，因为它们表明了在解决任意问题时知道“做”的事，而没有表明以自反方式所想的事。

通过这些论证，皮亚杰引入了“群集”（groupment）范畴。群集是指结构化水平介于“群”和“格”之间的集合形式，它比群的结构化更严格，但是还没有达到格的完全结构化。即“群集”没有像“格”那样已经形成了完整的命题逻辑和类别化的逻辑基础，却要比“群”的单纯的运算集合拥有更多的限定性，诸如序列、可传递性等，因此，群集有时又

① 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第10页。

② 皮亚杰：《结构主义》，商务印书馆，2007，第13页。

③ Piaget, J., *Essai de logistique opératoire*, Paris: Dunod. /2nd ed. slightly revised by J. B. Grize, 1972.

被称为“半格”(semi-lattice)。

群集是皮亚杰逻辑建构过程中的核心范畴。群集具有两个重要功能：

第一，群集通过序列化和不对称传递性定义了整数和类别。弗雷格在“数的定义”一文中，通过“关系”定义了数的意义①，这将数的概念从原子论的直觉转移到了形式化的论证。皮亚杰虽然不同意弗雷格的形式化主张，但是却沿袭了关于数的关系性的定义策略。这种定义方式“将表现它们个体(即数)元素特征的不同品质抽象出来即可：那么可以通过包含与顺序的综合从这一融合中提取出整数的序列。因此，有可能得到‘自然’数的建构机制，而不使用逻辑之外的成分，同时避免了《数学原理》(*Principia Mathematica*)简化论中难以解决的难点”②。通过这种方式，皮亚杰避免了怀特海和罗素所遭遇的困难，他们通过类别之间的一一对应运算来定义数。皮亚杰通过群集中的序列化来定义了整数、类别和序列等基本数论概念，这一套数论概念区别于传统数学和数理逻辑的概念定义，并进而在此基础上建构了心理逻辑学的体系。因为数的本质是关于世界形式化的表征，对数的定义方式意味着以什么方式来对现实世界进行形式化描述。皮亚杰关于数的发生性定义区别于传统的数学哲学，区别于诸如直觉主义、形式主义、逻辑主义等理论预设的定义。皮亚杰从发生认识论的角度，将数定义为群集的序列性的抽象表达。因为序列在发生认识论中是作为感知-运动协调的形式化而出现的，所以，这为数本身的形成提供了一个发生认识论的起源解释，同时也是将关于世界的形式化表征赋予发生认识论的规定性。

第二，群集实现了对分类的二次幂分类。即“从逐层的嵌套出发，解释某些我们称为‘替代’运算的一般化是如何得出这种对所有分类的分类(或二次幂分类)，而所有分类是由组合分解和‘部分的集合’所建构的”③。对分类的分类就是关于群集运算的二次幂运算，也就是对群集关系的规则性转换。群集关系包含四种基本逻辑运算：

(1) 否(否定)　　—

(2) 和(合取)　　·

(3) 或者[析取(二选一或两者皆可)]　　∨

(4) 如果……然后(蕴涵)　　⊃

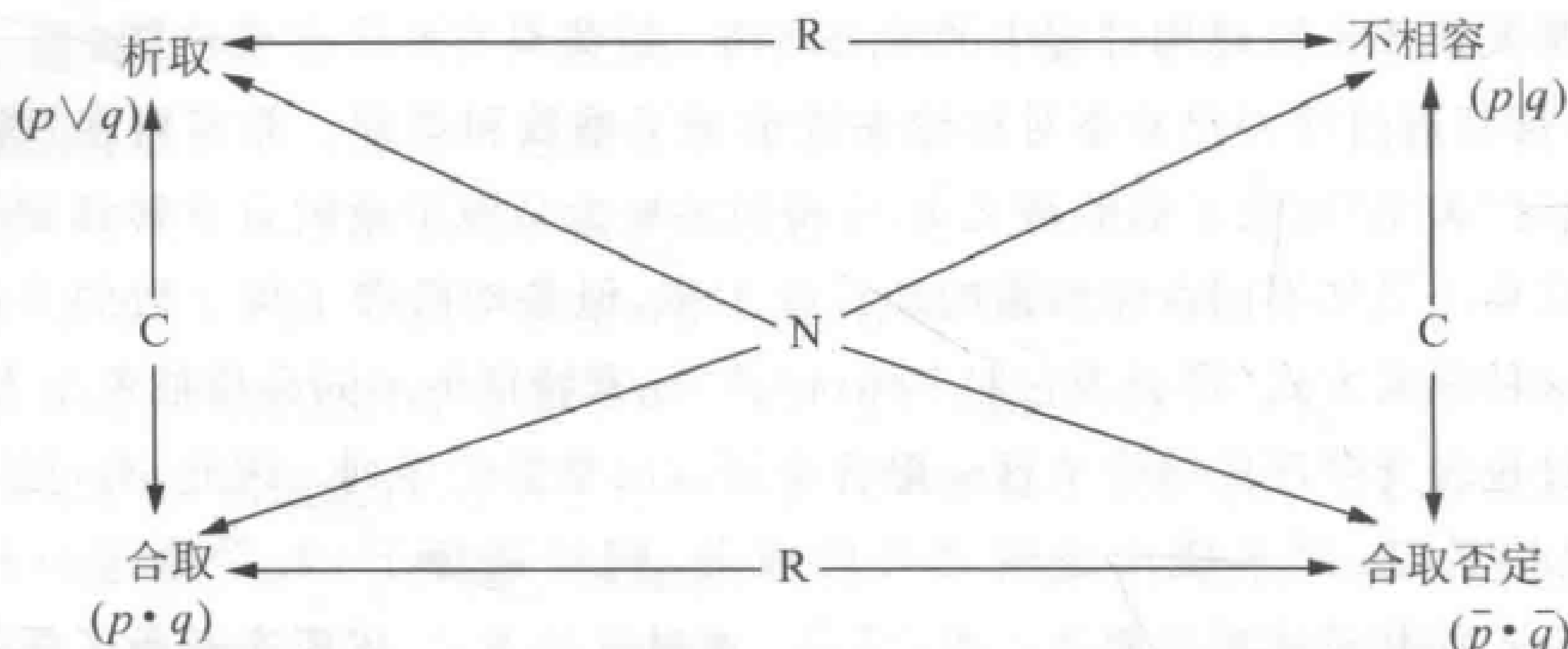
在此基础上，皮亚杰对群集中基本的逻辑运算再次进行二次幂运算，这就是关于群集关系运算的四种基本规则：反演 N，互反 R，关联性 C 和同一变换 I 等。于是，群集的

① 保罗·贝纳塞拉夫，希拉里·普特南(编)：《数学哲学》，商务印书馆，2010，第149－183页。

② Piaget, J., *Essai de logistique opératoire*, Paris: Dunod. /2nd ed. slightly revised by J. B. Grize, 1972.

③ Piaget, J., *Essai de logistique opératoire*, Paris: Dunod. /2nd ed. slightly revised by J. B. Grize, 1972.

基本逻辑运算 INRC 四种规则组合成为一个群结构，即著名的 INRC 群①：



这四种运算规则是可以相互转换的，如 RN=C，RC=N，NC=R 和 NRC=I。皮亚杰声称："早在 1949 年——也就是逻辑学家尚未着手之时以前，我们就已经在命题运算中发现了这一群的存在(相信这件事已经为众人所知)。"②通过 INRC 群，皮亚杰实现了从类别和关系向命题结构的过渡。

第一步是通过类别的乘积，形成四种基本合取关系。

如果有两个类别相乘，$A_1\times A_2$ 则形成了四种基本合取：

$$(p\vee\bar{p})\cdot(q\vee\bar{q})=(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$$

第二步，四种合取关系按照完全组合方式则组合成了 16 种二元运算[1(0)+C(4,1)+C(4,2)+C(4,3)+C(4,4)]：

1(0)	2$(p\cdot q)$	3$(p\cdot\bar{q})$	4$p\cdot(q\vee\bar{q})$
5$(\bar{p}\cdot\bar{q})$	8$(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$	11$(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$	14$(q\supset p)$
6$(\bar{p}\cdot q)$	9$(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)$	12$(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$	15$(p\vee q)$
7$\bar{p}\cdot(q\vee\bar{q})$	10$(p\supset q)$	13$(p\vert q)$	16$(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$

如果是三元运算，按照同样的方式，$A_1\times A_2$ 形成了 9 种基本合取。9 种合取则可能形成 256 种运算组合[1(0)+C(9,1)+C(9,2)+C(9,3)+C(9,4)]。在总元素为 9 的集合中，1－4 个元素的组合与 5－8 个元素组合对称，所以不必计算后 4 种组合。这些逻辑转换既是作为思维活动的形式化表征，又是作为发生认识论逻辑的研究内容③。例如，二元运算中的第 1 种转换是(0)，表示空集；第 16 种转换则表示了全集。

皮亚杰提出这些逻辑转换形式，是希望"从自然思维的发展中追溯这些结构在心理

---

① Inhelder, B., Piaget, J., *Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*, USA: Basic Books, Inc, 1958.

② Piaget, J., *Essai de logistique opératoire*, Paris: Dunod. /2nd ed. slightly revised by J. B. Grize, 1972.

③ Piaget, J., *Essai sur les transformations des opérations logiques: les 256 opérations ternaires de la logique bivalente des propositions*, Paris: Presses Universitaires de France, 1952.

上的起源"①。这些逻辑转换是对人的心理结构"是什么样"的描述,而不是像传统的逻辑学家那样要提出一套心理结构"应该怎么样"的规范。事实上,皮亚杰和他的同事通过一系列实验验证了儿童、青少年的思维过程体现出了相应的逻辑转换形式。皮亚杰看来,逻辑转换的"形式化不是一种状态,而是一种过程,因此形式化立足于一层一层建立起来的结构之上"②。皮亚杰还进一步探讨了这些结构之间的"二次幂"结构,即,在最初的"运算"建构中,思维发展所体现出来的阶段性特征等,从而建立了儿童认识发展的阶段性理论。

总之,在皮亚杰看来,思维是结构性的;结构的规则是逻辑;逻辑是"运算"规则;运算是"群"和"群集"之间的结构性关系。于是,思维的结构化特征就被表征为群或群集结构的逻辑转换规则。

三、皮亚杰逻辑的发展性特征

皮亚杰将儿童认知发展分为感知-运动、前运算、具体运算和形式运算四个阶段。

感知-运动阶段是0—2岁儿童的认知水平。在这个阶段,儿童依靠动作和感知体验的协调来建立动作逻辑。这个阶段儿童认知发展的主要目标是知觉组织化和客体永久性的建立。在感知-运动阶段,儿童的思维还没有完全"去自我中心化",客体永久性也没有完全建立,儿童的感知和动作都是针对具体对象的,没有建立一般化的认识,虽然已经有了构成感知和动作之间协调的半结构化逻辑,但是这种逻辑是动作驱动的,可以称之为"动作逻辑"。动作逻辑不能实现一般化的转换,即不能进行运算。

前运算阶段是3—6岁儿童的认知发展水平,主要特征是象征性、语言和符号系统的发展。在这个阶段,儿童掌握了象征和符号表征,建立了客体永久性和符号逻辑,但是还不能够实现可逆性转换,因此,还不具备进行逻辑运算的能力,故称为前运算水平。这个阶段儿童使用的是直觉逻辑或表象逻辑。

7—11岁的儿童到达了具体运算水平。在这个阶段,儿童建立了一般化的因果关系和逆运算,能使用具体概念实现逻辑结构的转换,建立了真正意义上的逻辑运算。这个阶段儿童使用类别逻辑和关系逻辑。

从12—15岁开始,儿童的认知水平进入了形式运算阶段。在这个阶段,儿童真正实现了完全的可逆性和守恒性运算,并且能够进行假设检验式的推理,所使用的是命题逻辑。

---

① 皮亚杰:《结构主义》,商务印书馆,2007,第26页。

② Piaget, J., *Essai de logistique opératoire*, Paris: Dunod. /2nd ed. slightly revised by J. B. Grize, 1972.

皮亚杰关于儿童认知阶段的划分已经成了发展心理学理论的执行标准。这四个阶段的核心区分即在于逻辑结构的区别。逻辑结构的转变则是由平衡化进程所触发的。平衡化是皮亚杰逻辑中一个重要范畴。

认知结构的平衡化应当被视作对外界扰动的代偿，是主体的活动对扰动做出的回应。①

从感知-运动阶段开始，儿童总是在“面临新的认知情景——建立协调——再次面临新的情境”这样的循环中成长，这是一个“不平衡——建立平衡——再次去平衡化”的过程。正是在这样的平衡化——去平衡化的过程中，儿童的认知结构形成了阶段性的发展。

通过平衡化过程而导致逻辑结构或“必然性”的最终形成，最好的代表性例子是：以第一个阶段最常见的策略为起点，此后的每一种策略都是前一种的基础，经由一系列序列性的控制，从而“变为”新的最常见策略。因而最终的平衡化是主体活动针对扰动做出代偿的结果，其特征是连续的概率(或然率)变换。②

皮亚杰首先将发展放在有机体成熟、有机体环境和社会环境的背景中来讨论，然后将平衡化列入影响发展的“第四”因素。于是，儿童认知发展就可以被看作有机体内外因素之间的互动，一方面是既有的认知格式“同化”外在条件的过程，同时也是既有格式“顺化”实际情形的过程。而整个的发展则体现为在内外因素之间，或者更一般化的意义上的“同化”和“顺化”之间的平衡。这就是为什么“研究发展的理论就有必要引入平衡化概念了”③。

皮亚杰描述了平衡化过程的四个主要特征：第一，从前运算阶段开始，每一个层次的逻辑结构都是建立在更低水平的逻辑结构的基础之上的。例如，具备了顺运算和逆运算完全互补的完全可逆性的逻辑结构是由半可逆、半平衡性结构综合而成的；第二，所有的逻辑结构的前身都可以追溯到感知-运算的协调；第三，协调既是平衡化的起点，也是平衡化的实现途径；第四，平衡化的结果是形成了完全的逻辑可逆性。

因此可以说是反馈(feedbacks)或再输入(réafférences)构成了平衡化过程，平衡化过程中的代偿又预先地展现了可逆性。这种预期本身即是回溯的后继结果，它勾画了动作运算的脉络，并且将回溯和预期结合在一起，从而构成了可逆性运算的雏形，进而

① Piaget, J., "Le Rôle de la Notion d'Équilibre dans l'Explications en Psychologie," in *Acta Psychologica*, 1959, 15, pp. 51-62.

② Piaget, J., "Le Rôle de la Notion d'Équilibre dans l'Explications en Psychologie," in *Acta Psychologica*, 1959, 15, pp. 51-62.

③ Piaget, J., "Le Rôle de la Notion d'Équilibre dans l'Explications en Psychologie," in *Acta Psychologica*, 1959, 15, pp. 51-62.

形成了完全而永久的代偿形式。①

通过引入控制论的基本概念,皮亚杰把平衡化过程归结为一种代偿活动,即,平衡化就是一系列回溯性的或前瞻性的代偿性活动,平衡化的水平则体现为代偿性活动的预期性、完全性和稳定性等特征,而完全的代偿则对应于完全的可逆性。即,儿童的认知发展首先是一个平衡化发展的过程;也是从近似代偿到完全代偿的发展过程;也是逻辑结构可逆性程度的发展过程。因为可逆性不是遵循全或无(tout ou rien)的法则,而是从最初的协调开始的一个渐进过程。②

简言之,最终实现了稳定的心理学平衡化的认知结构与运算的可逆性之间存在交集,因为逆运算正是针对正向转换过程做出的代偿。在此还有最后一个问题:可逆性是否是运算的本质,进而是平衡化形成的前提?或者,是行为的平衡化过程(超越了简单调节阶段,包含了反馈与预判)最终形成了可逆性?在这里,我们明确认为,发生学的分析结果对这个问题起到决定性的作用;回应扰动的"代偿"过程只能以渐进的方式进行调节(从不完全调节开始,以此类推),因此,用来解释完全代偿的运算可逆性是渐进性平衡化过程的结果而不是起因。但这一结论并不会妨碍这个结论:即运算结构一旦被建构出来,就会成为后续平衡化的组织(organe)与手段(instrument)……③

较低水平的平衡化,例如感知-运动阶段的平衡化以及知觉的平衡化是不稳定的。环境的变化即是扰动,主体通过代偿而对扰动做出回应。这种回应还没有建立系统性的守恒,也没有一般性和可逆性。因为平衡并不意味着静止的、稳定的均衡状态,而是动态的连续调节过程。低水平的平衡化,例如知觉领域平衡化调节往往因为缺乏反馈而出现代偿不足或代偿过度的现象。这可能是导致错觉的原因。在知觉中,原本应该保持恒常(conservation)的属性,经由转换(transformation)取得严格意义上"均衡"(balance),这就是知觉恒常性(constance perceptive)的来源。但是这种转换却常常过度代偿。皮亚杰和同事朗伯西尔(Lambercier)一起考察了大小恒常性在年龄上的表现,发现年幼儿童的大小估计系统性地低于平均值,年长的儿童和成年人则系统性地高于平均值,只有在 9—10 岁时达到一个短暂的均衡时期,即大小估计等于平均值。④ 这并不意味着 9—10 岁儿童的代偿能力达到了平衡,而是表明了在知觉任务的代偿性调节从低级到高级的发展轨迹:年幼儿童明显代偿不足,所以估计值偏小;9—10 岁儿童

---

① Piaget, J., "Le Rôle de la Notion d'Équilibre dans l'Éxplications en Psychologie," in *Acta Psychologica*, 1959, 15, pp. 51-62.

② Piaget, J., "Le Rôle de la Notion d'Équilibre dans l'Éxplications en Psychologie," in *Acta Psychologica*, 1959, 15, pp. 51-62.

③ Piaget, J., "Le Rôle de la Notion d'Équilibre dans l'Éxplications en Psychologie," in *Acta Psychologica*, 1959, 15, pp. 51-62.

④ Piaget, J., "Le Rôle de la Notion d'Équilibre dans l'Éxplications en Psychologie," in *Acta Psychologica*, 1959, 15, pp. 51-62.

正处于具体运算阶段，代偿活动是由具体对象驱动的，所以比较容易得出“正确的”估计值；更年长的儿童和成年人则在具体代偿基础上抽象出了代偿性规则，并依据规则而做出代偿，所以往往会代偿过度。

所以，在高层次的或运算的结构中，主体对扰动做出回应性转换中包含了虚拟的修正，即，主体通过想象与预判来事先调节转换，并构成了系统性的顺运算。据此，代偿性活动包含了转换过程的想象和预判，但却是反向的，即是可逆性运算系统所做的逆转运算或反向运算。这个过程就是控制论的预期——反馈——调节过程。到达这个水平，主体的代偿活动就具备了完全的可逆性，运算系统实现了规则性平衡化，也意味着主体的认知发展到达了形式运算水平。

皮亚杰通过力学平衡的实验观察，考察了前运算到形式运算阶段儿童的平衡化发展过程，在这一系列的研究中，皮亚杰在逻辑结构的平衡与物理装置的力学平衡之间建立了某种同构，即观察儿童如何实现物理力学装置的平衡来辨别儿童逻辑结构的平衡化发展。①

在一系列力学装置的实验中，皮亚杰和同事考察了4—6岁(阶段Ⅰ)、7—10岁(阶段Ⅱ)以及11—14岁(阶段Ⅲ)儿童关于力的概念、力的合成观念等的发展特征。这三个年龄阶段分别对应了前运算、具体运算和形式运算三个认知发展阶段。研究显示，这三个阶段的儿童分别表现出来三个层次的代偿水平。阶段Ⅰ的儿童依靠表象或符号层面的加工来判断任务中的扰动，例如：砝码很重，它会移动，等等。但是儿童并不能对为什么会移动或不移动做出合理的说明，也不能预测移动的方向和位置。这表明儿童还不具备力的平衡关系的认识，不能对砝码的重量、作用力的方向等因素中抽象出力的关系。这个阶段的儿童的代偿努力多半是无效的，因为儿童还不具备对力的平衡关系进行运算的能力。

在阶段Ⅱ，儿童建立了基本的作用力平衡的观念，能够在相对的位置增加砝码或减少砝码来尝试恢复平衡。但是儿童还不能预测砝码变化的数量，只能依靠实际的尝试。这正是具体运算的特征。更关键的是，这个阶段的儿童认为放在托盘上的砝码与悬挂着的砝码产生的力的大小是不一样的。这表明儿童对力的运算还没有到达完全的可逆性和形式化。

只有到了阶段Ⅲ的后期，儿童才建立起来稳定的作用力和反作用力的平衡关系，能够理解力的大小和作用方向的多方面的平衡。这时的儿童能够事先做出预期性的虚拟代偿，然后再依据尝试结果的反馈来调节事实的代偿，即，儿童真正实现了控制论意义上的调节，并且能够根据一般性的力学规则来指导实际的代偿活动。

---

① Piaget, J., *La Formation de la Notion de Force*, Paris: Presses Universitaires de France, 1973; Piaget, J., *La Composition des Forces et le Probleme des Vecteurs*, Paris: Presses Universitaires de France, 1973.

关于儿童的实验观察印证了儿童认知发展阶段的划分，并揭示了儿童认知发展的阶段性特征根本上是由代偿方式的阶段特征决定的。那么，代偿方式的阶段性转变又是由什么因素引发的呢？

在这里，皮亚杰引入了另一个重要范畴："反省抽象"。反省抽象是对认识活动本身的形式化和规则化抽象，它使得认识活动的一般化水平、抽象水平逐层次提升，并最终到达完全形式化和规则化的水平。例如，儿童通过最初的感知-运动协调而建立针对环境的代偿性应答。这种代偿是个别化的、具体性的。在经历了若干次类似的情景和类似的代偿之后，在这种应答动作和情景刺激之间就建立起了指代性的关联，这就是符号化。至此，儿童具备了用一个符号来指代某一类环境刺激的能力。符号化过程的建立就是对具体性的代偿动作的反省抽象的结果。于是，儿童在感知-运动阶段使用的具体的代偿性动作经过反省抽象演变成了前运算阶段基于符号和表象的直觉规则或符号逻辑。因为符号和表象的使用，儿童的思维逐渐脱离了自我中心性，并建立了客体永久性。代偿性活动也可以以第三方的视角在言语和符号水平上展开。例如，孩子上幼儿园，遇到老师提问："今天是谁送你来幼儿园的呀？"3 岁的孩子可能回答"是妈妈送**你**来的"，4 岁以上的孩子才会回答："是妈妈送**我**来的。"这个变化就是儿童在言语中实现了符号性代偿的标志；更进一步，对符号逻辑的反省抽象则形成了关于类别和关系的规则，即具体运算阶段儿童使用的类别逻辑和关系逻辑。在具体运算阶段，儿童可以通过类别或关系的运算实现半可逆的类别或关系的代偿。例如，儿童可以在天平的两端增加或减少砝码以让天平平衡，但是这时儿童做出的代偿却不能实现完全的可逆性，即不能把左侧增加和右侧减少相应砝码对应起来，更不能把砝码数量和力臂长短对应起来。这些任务只有在形式运算阶段才能完成。形式运算就是在具体运算基础上的反省抽象，让儿童获得了关于规则的认识，从而最终实现了完全可逆的、完全形式化的运算。

反省抽象是：把某些预先给定的关系投射到新的思维平面上这一准几何意义上的"反射"，分析成为在这个新平面上重建这些关系所必需的重新组织这一理智意义上的"反射"。①

"反省抽象总涉及两个不可分的方面，即投射与重组。所谓投射就是把从较低层面引出的成分（动作之间的某种关系）向一个更高层面迁移；而重组就是在这更高的层面上进行新的协调。这种由投射所迫使的重组被称为严格意义上的反省。"②

每一次反省抽象就让儿童从原有的平衡态进入新的不平衡态。儿童的认知发展形成这样的循环进阶的过程：

平衡化——反省抽象——去平衡化——代偿——新平衡化——反省抽象

在这个过程中，代偿方式从感知-运动阶段的对动作代偿演变为前运算阶段的符号

---

① 皮亚杰：《发生认识论原理》，商务印书馆，1981，第 72 页。

② 李其维：《评发生认识论的"反省抽象"范畴》，载《心理科学》，2004，第 3 期。

代偿，进而是具体运算阶段的类别和关系的代偿，最后是实现了命题和运算的代偿。

儿童的认知发展阶段是通过“反省抽象”来实现转换的。感知-运动阶段没有形成一般性认识，感知和动作之间协调关系的反省抽象形成了最初的规则，即动作逻辑。动作逻辑是具体的、实指性的协调关系。在动作逻辑基础上的反省抽象导致了符号化表征。这种符号化表征还没有到达一般化的水平，所以是非“运算性”的，是为“前运算”阶段。在前运算阶段儿童只有针对个别经验的探索，对个别经验和反应之间的协调关系的反省抽象，形成了局部的运算规则，即类别逻辑和关系逻辑，从而进入“具体运算阶段”。

具体运算阶段已经形成了局部的或有限的一般性运算规则，即“类别逻辑”和“关系逻辑”，它们并不是终极一般化规则，是“适应性”的结果。类别逻辑的关系逻辑经过反省抽象，形成了一般化的形式运算规则，即命题逻辑。皮亚杰认为，只有命题逻辑才是真正意义上的“科学逻辑”，是个体认知发展的最高水平，也是发展的终极目标。因为科学知识是经过验证的一般化的运算(操作)规则。个体从感知-运动到最后的形式运算的阶段性发展就是发现科学知识的过程。整个过程中的反省抽象，形成了知识的生成规则，这种规则就是皮亚杰所说的“格式”(schème)。

于是，有：

协调——代偿——平衡化——反省抽象

等一系列发生认识论的基础范畴，个体的认识过程实现了：

动作、表象——表征——概念——命题——命题网络(知识网络)——格式

这样一个逐渐抽象化和形式化的过程。这个过程中，协调是认识的发生；代偿是认识的实际动作；平衡化是认识发展的动力；反省抽象则是认识实现抽象化和形式化的过程。李其维先生对反省抽象做了如下评论：

“我们说反省抽象是皮亚杰最具创意的概念，这主要是就其对发生认识论的理论基础之重要性而言的。……其价值要超出皮亚杰理论中的所有其他概念，包括平衡化。因为平衡化是仅从‘发展动力’的角度来说的，并不能回答认识(知识)的来源问题。而反省抽象却正是皮亚杰为解决这一长久困扰认识论之核心问题而提出的。由于反省抽象的构造本性，因此它能与‘逻辑-数学经验’概念一起，说明新知识的构造。”①

总体上，我们依据皮亚杰的代偿与平衡化理论，可以这样来描绘儿童认知发展的脉络：

在越来越多的动作和感知的协调中，儿童的整体性的心理结构会获得越来越多、越来越精确的关系，使得儿童对环境与自我的分辨越来越清晰。当儿童能够区分环境中的不同部分或自我中的不同内容时，他(她)就可能用一个部分去代替另一个部分，这项工作需要儿童进行更复杂的协调性活动，当儿童能够这样做时，意味着他(她)的心理结

---

① 李其维：《评发生认识论的“反省抽象”范畴》，载《心理科学》，2004，第3期。

构的发展进入了一个更高的阶段……这就是儿童心理结构的发展进路。

这个过程就是在儿童通过动作——以及在之后的发展阶段,还可以通过符号、语言以及形式化的运算等不同的逻辑规则——和世界互动过程中发生的心智建构。

人的认识活动则是在作为人的心理的“结构”和物理世界的结构之间建立某种同构关系;这个过程是通过“平衡”过程来实现的,包括了“平衡化”和“去平衡化”两个过程,分别是指从非平衡态恢复平衡的过程和从平衡态离开而进入不平衡的过程。这个平衡过程即是在“同化”和“顺化”两个方向上心理结构和物理世界结构之间的互动;“格式”(schème)则限定了同化和顺化的规则,也就是限定了平衡化过程的规则。格式规定了来自物理结构的信息哪些可以被同化,以及按照什么方式去同化,反之,也规定了心理结构以什么方式去顺化物理结构。可以看出,格式对于心理结构的发展或“生长”而言,具有规定性的功能。

格式源自活动中的关系的“反省抽象”。皮亚杰用反省抽象这个范畴极富创造性地解释了认识过程的进阶发展,并为人的认识结构,即知识结构提供了一个发生认识论的起点。

四、我们为什么需要皮亚杰——后皮亚杰时代的新逻辑

在20世纪的中后期,皮亚杰的理论广泛地影响了心理学、教育学、哲学,甚至包括文艺学等领域,但是在逻辑学领域却难有知音。一方面,皮亚杰本人并不认同自己被同行定义为一名哲学家或逻辑学家,甚至对整个哲学的方式来看待知识的方式都存有深刻的成见。这使得皮亚杰的观点招致不少来自哲学和逻辑学领域的攻击①。另一方面,皮亚杰对逻辑的设定与经典逻辑学的设定差异很大,以至于很多纯粹的逻辑学家并没有读懂皮亚杰通过逻辑学的术语想要表达的意义。皮亚杰不是以一个逻辑学家或哲学家的身份来讨论逻辑的问题,而是以科学家的立场,以一个发生认识论者的身份在言说逻辑。皮亚杰关于逻辑的理论依靠着一组强大的科学学科群,包括来自物理学、生物学领域的系统论、信息论、控制论、相对论、进化论、遗传学、神经生物学等理论,还包括来自数学领域的心理计算主义、计算机科学等,这些理论在当时都属于新兴的时尚科学。皮亚杰通过一组神奇的“同化”和“顺化”加工,将这些新兴理论“反省抽象”成为自己的关于人类思维和认识活动的注解。所以,要理解皮亚杰的逻辑,还需要整理他的理论起源,以“发生论”的方式来解读皮亚杰的发生论。

---

① Piaget, J., *Insights and Illusions of Philosophy* (Translated from the French by Wolfe Mays), New York: The World Publishing Company, 1965/1971. (1965 by Presses Universitaires de France, 1971 English translation and published by The World Publishing Company.)

皮亚杰逻辑的第一背景是"科学"。

皮亚杰的发生认识论深刻地植根于康德的先验范畴学说。皮亚杰继承了康德的认识论，认为是感性和理性共同作用的结果，理性没有感性材料的支撑是空泛的，感性材料没有理性的引领则是匮乏的。在皮亚杰的认识论中，感知觉从一开始就包含了"逻辑"和"推理"[①]。皮亚杰认为，正是因为有了理性的逻辑范畴，来自感知觉的信息才可能被"同化"到认识结构中。但是，皮亚杰又以一个科学家的身份质疑了先验论，诸如康德的"先天范畴"和乔姆斯基的"先天语言机制"等。他要为这种理性的逻辑范畴找到一个符合科学标准的起源。这就是发生认识论。

科学与哲学的区别在于，科学是验证性的，哲学是启示性的[②]。科学是自下而上的，从具体到抽象形式化的归纳过程；哲学，尤其是形而上学是自上而下的，以公理或预设为前提的演绎过程。哲学的演绎方式不得不依赖于某种先验前提，而先验前提却不能得到科学的解释[③]。另一方面，皮亚杰也并不赞同经验论的假设，即认为世界拥有某种预存的规则，人类可以通过经验来获得关于世界的知识。因为，这种假设必然会引起关于知识的起源问题的悖论[④]。所以，皮亚杰需要开创一种既不依赖于先验前提的，又不依赖经验论的关于认识的起源解释，这就是发生认识论。皮亚杰把儿童的认知发展过程也看作是一个从具体经验到抽象形式化的过程；与此同时，科学知识也是建构的结果，即，科学知识不是像唯理论所说的那样是预先存在于先天的理性中，等待人们去"回忆"出来的内容，也不是像经验论所说的那样，是预先存在于外部世界中，等待人们通过经验活动去发现的东西。科学知识根本上是一套完全形式化、完全可逆和守恒的运算规则，这正是儿童与世界相互作用过程中通过协调、代偿、平衡化和反省抽象等活动而建构出来的。科学知识是儿童认知发展的最高水平。于是，皮亚杰将科学知识"同化"到了人类的认知发展过程中，同时也将个体的认知发展过程"顺化"于人类的科学知识的形成过程。通过这种方式，皮亚杰建立了认知发展和科学知识之间的同构。他希望通过这种同构来建构一种"科学的"认识论(或知识论)。

皮亚杰逻辑的第二个理论背景是进化论。

进化论以"适应"作为核心理念，用来解释生物的生存、繁衍和演化进程。适应在皮亚杰的理论体系中也是一个具有重要意义的基础性范畴。例如，作为认识的发生过程

---

① Bruner, J. S., Bresson, E., Morf, A., Piaget, J., *Logique et Perception*, Paris: Presses Universitaires de France, 1958.

② Bruner, J. S., Bresson, E., Morf, A., Piaget, J., *Logique et Perception*, Paris: Presses Universitaires de France, 1958.

③ Piaget, J., *Insights and Illusions of Philosophy* (Translated from the French by Wolfe Mays), New York: The World Publishing Company, 1965/1971. (1965 by Presses Universitaires de France, 1971 English translation and published by The World Publishing Company.)

④ 皮亚杰:《结构主义》,商务印书馆,2007。

的最基本活动——协调，就是一种适应性的表达。即，有机体之所以能够在感知-运动体验之间建立起协调的关系，这是进化"适应性"的表达。皮亚杰承认，协调的建立必须与有机体必要的某些先天素质为前提，只是这些先天素质并不包含任何认识论意义上的先天前提，比如，康德式的"先验范畴"或乔姆斯基的"先天语法"。这些先天素质仅仅体现为有机体在遗传基础上而拥有的基本的感知和活动能力，即对环境做出特定应答的能力，这就是适应性。因此，适应性其实是皮亚杰所有认识论范畴的构成基础，代偿、平衡化、反省抽象等都是有机体适应性在不同层面上的表现。皮亚杰把智力也定义为适应能力。

我们需要注意区分的是，皮亚杰所持的进化论并不是达尔文的自然选择学说。皮亚杰在很多场合批评过自然选择学说，他认为纯粹依靠随机性事件而促成有机体的复杂结构的演化是难以想象的①；皮亚杰也批评了拉马克的用进废退学说。他认为拉马克的进化论"忽略了对于理解有机体和环境的关系是很重要的一些已经得到证明的因素……拉马克学说主要缺乏的是关于变异和重新组合的内在能力的概念，以及关于自我调节的主动能力的概念"②。

皮亚杰所持的进化论是柏格森的"创造进化论"。创造进化论强调主体的主动选择在演化过程中的体现，因此，演化不仅仅是个体或物种被动地接受选择，一定体现了有机体的主动性，所以，演化是一个体现了有机体创造性的过程③。虽然后来皮亚杰也批评柏格森的哲学④，但是我们依然可以看到皮亚杰的理论中具有受到柏格森影响的印记。

皮亚杰的适应性意味着有机体作为一个动态的发展性结构，通过自我调节而实现针对环境刺激的协调、代偿和平衡化。这个过程不是有机体被动地接受某种预存规则的选择或淘汰；有机体本身也是这个规则的制定与参与者。这个规则是以有机体的遗传素质为前提的，但是遗传素质本身并不包含任何规则性的东西，规则是有机体和环境的互动过程中建构出来的，因此，"行为是进化的动力"⑤。

皮亚杰所依据的创造进化论和拉马克的用进废退学说一样，遭遇的最大困难在于"获得性经验的遗传"。皮亚杰在这个问题上做了一些辩护⑥。但是，当代生物遗传学

---

① 皮亚杰在《发生认识论原理》《结构主义》《生物学与知识》等几部著作中都对这个问题有过论述。

② 皮亚杰：《发生认识论原理》，商务印书馆，1981，第59—60页。

③ 柏格森：《创造进化论》，商务印书馆，2004。

④ Piaget, J., *Insights and Illusions of Philosophy* (Translated from the French by Wolfe Mays), New York: The World Publishing Company, 1965/1971. (1965 by Presses Universitaires de France, 1971 English translation and published by The World Publishing Company.)

⑤ Messerly, J. G., "Piaget's biology," In U. Müller, J. I. M. Carpendale, L. Smith (Eds.), *The Cambridge Companion to Piaget* (Chapter 4. pp. 94—109), Cambridge University Press, 2009.

⑥ 皮亚杰：《发生认识论原理》，商务印书馆，1981，第67—76页。

依然没有关于获得性经验遗传的充分的和“直接的”证据。正是因为如此，达尔文的自然选择学说才成为了在科学领域被接受度最高的一种进化论。在一定程度上，皮亚杰对进化论的选择限制了他的理论在科学界——诸如物理学、生物学等领域——获得的认同度。

皮亚杰理论的第三个理论背景是现代物理学的新兴理论，诸如相对论、系统论、控制论和信息论等。

皮亚杰将人的认知活动定义为一种历史性结构，并且认为这种结构应该是与物理结构同构的。所以，皮亚杰始终非常重视当时物理学理论的最新动态，并积极地印证当时物理学的最新研究成果来佐证自己关于认知结构的学说。例如，皮亚杰研究发现儿童对时间的认识不是来自绝对的时间刻度，而是与运动相关的。他曾经与爱因斯坦交流过这个结果，爱因斯坦对此也非常赞赏①。因为作为一个来自心理学领域的证据，这个发现将时间引入结构，使得结构的平衡和协调不再是指静止的均衡态，而是动态的转换与代偿，这个结论契合了爱因斯坦相对论的时空预设。此外，皮亚杰几乎完全采纳了系统论、控制论和信息论关于结构的规定性，从整体性、转换和自身调节性三个方面来定义结构的意义。

正是因为皮亚杰理论有广泛的学科背景作为基础，所以其理论本身也深刻地影响到许多学科领域。科学史学家库恩在论证科学范式的更迭时，曾引用了许多皮亚杰的心理学研究作为案例②。库恩甚至还写下过这样的话：“我之所以能想出对早已死去的学者们提问的方法，部分地要归功于我研究过皮亚杰对活着的儿童提问的方法。”③

但是，在今天的学术动态潮流中，皮亚杰的辉煌似乎已经成为过去。李其维先生在2010年皮亚杰逝世30周年时曾经作文《寂寞身后事，蓄势待来年》以缅怀皮亚杰，并感慨道：“作为‘20世纪最伟大的二位心理学家之一’的皮亚杰，在其转身离我等而去的30年后，对今天年轻的心理学工作者们来说，似乎已是一位稍显陌生的名字了。”④在这篇文章中李其维先生指出，皮亚杰在当下的“冷遇”主要有两个方面的原因，其一是后来者对皮亚杰理论的误读，不恰当地将皮亚杰的理论评判为“超科学”、“先验论”。这使得其理论价值受到不公正的评价；其二是皮亚杰的发生认识论所体现出来的跨学科特征增加了后来学习者完整地理解理论的困难。这种困难往往让许多后继的学者望而却步，所以皮亚杰之后继续系统性地阐发其理论的人就不多了。

通过此次翻译整理皮亚杰的文献，再次深入学习、体会皮亚杰的原初文本中的意义

---

① Bruner, J. S., Bresson, E., Morf, A., Piaget, J., *Logique et Perception*, Paris: Presses Universitaires de France, 1958.

② 托马斯·库恩：《科学革命的结构》，北京大学出版社，2004。

③ 转引自皮亚杰：《发生认识论原理》（商务印书馆，1981）英译本前言。

④ 李其维：《寂寞身后事，蓄势待来年——让·皮亚杰逝世30周年祭》，载《心理科学》，2010，第5期。

流淌，有一种认识渐渐地浮现出来，这就是：皮亚杰并未远去，他只是化身为众多新兴的研究课题，皮亚杰的理论正在当下许多时尚的研究领域中承担着底层理论基础之责①。如果说今天的年轻的心理学工作者似乎有些淡忘皮亚杰这个名字了，但是他们的确正在依赖皮亚杰所创建的理论体系而工作。皮亚杰的很多工作在很多领域中已经成为了行业标准或理论公设，并且随着后继研究的推进而与新兴研究发生着"同化"和"顺化"式的相互作用。这些互动体现在诸多方面。

第一，发生认识论向认知心理学的渗透。

认知心理学的三大理论基础是：源自经验论的行为主义，起源自康德的唯理论的乔姆斯基的语言学，以及皮亚杰的发生认识论或建构论②。行为主义的刺激-反应联结的研究方法是认知心理学的主要技术支撑；来自唯理论的先验假设则强调了刺激和反应之间存在某种"心理机制"，并且规定了认知心理学应该以探索这个中间的"心理机制"为自身的研究目标。但是关于心理机制的先天性起源的假设难以满足认知心理学的科学化诉求，于是，皮亚杰的发生认识论就为心理机制的起源问题提供了科学的解释。

虽然皮亚杰并不认为自己是一个认知心理学家，但是认知心理学却不能缺少了皮亚杰理论的支撑。例如，皮亚杰意义上的格式(scheme)、认知结构或知识结构、运算、操作等发生认识论范畴已经成为认知心理学的核心概念，这表明认知心理学实际上接受了皮亚杰的发生认识论来作为认知发生和发展的理论预设。今天认知心理学所涉及的一些重要议题，诸如关于概念化、类别化、推理等任务的认知机制研究，已经无法回避皮亚杰的理论了。

第二，领域特殊性观念的初陈与转变。

皮亚杰的认知发展阶段理论可以被看作是领域特殊性观念较早的表述形式。儿童每个发展阶段的认知能力之间不是程度上的差异，而是类型的转变。在每个阶段，儿童通过不同的认知机制来实现与环境信息的互动。这实际上已经体现了皮亚杰的领域特殊性的观念。只是，皮亚杰的领域特殊性机制是历史性排列的，即，儿童在不同的认知发展阶段启用不同的认知加工机制。

领域特殊性观念可以追溯到早期的脑功能定位说。如果特别的心理功能可以定位于特定的脑区，那么，不同功能之间就应体现出领域特殊性的区别。但是早期的脑功能定位说因为受到颅相说牵连而沉寂了半个多世纪。直到 20 世纪 80 年代，福多倡导的"心理模块性"假说再次强调了领域特殊性观念。领域特殊性的基本含义是指不同的认知加工机制分别拥有自己独立的活动规则，也就是机制独立的加工逻辑。在这个意义

---

① 李其维，弗内歇：《皮亚杰发生认识论若干问题再思考》，载《华东师范大学学报(哲学社会科学版)》，2000，第 5 期。

② 熊哲宏：《认知科学导论》，华中师范大学出版社，2002。

上，皮亚杰对不同认知阶段的区分标准满足了领域特殊性的构成标准。事实上，认知发展阶段的领域特殊性区分已经成为发展心理学的共识，即，发展心理学家依据皮亚杰的发展阶段区分理论，已经认同了这样的观念：处于不同认知发展阶段的儿童所采用的认知策略是截然不同的，所以针对儿童的教育应该依据儿童在不同认知阶段的认知特征有针对性地予以指导，而不仅仅是程度或难度的差异。

与当下流行的领域特殊性假说的区别在于，皮亚杰的认知发展阶段理论体现出来的领域特殊性是历史性的，即在时间维度上具有先后次序的排列。当前诸多领域特殊性假说都是共时性的，强调不同认知加工之间的差异与相互独立性。毕竟，时间维度并不是领域特殊性的主要构成标准。而历史性的领域特殊性更能说明不同心理机制之间既相互独立，又可能相互转换的特征。

第三，感知-运动协调通达具身认知。

具身认知即是指“用身体思考”，倡导“让心智回到身体中”，是“第二代认知科学”的代表议题(李其维，2008，《第二代认知科学刍议》)。具身认知研究的兴起，是一群反叛认知计算主义的认知科学家努力探索一条心身统一的进路的结果。自 20 世纪 70—80 年代以来，具身认知的研究依然停留在现象学层面。研究者的工作并没有超出这样一个预设：在特定的身体动作与特定的心理体验之间存在关联性。于是，研究者通过实验研究，反复地验证某种身体动作或身体体验与特定心理体验之间的关系，并努力论证其中可能存在的因果性。

过去 40 年来，具身认知的相关研究除了“发现”某些现象之外，并没有获得实质性的进展。虽然有研究者发现了“镜像神经元”，但是，这个成果并没有超越传统认知神经科学的相关性解释层面①，虽然引入了神经科学的新发现，只是将具身认知的现象学研究转移到了神经层面上②。具身认知研究的困窘在于虽有“心身统一”的理想，却没有有效的理论来说明“心智如何从身体中产生”。缺少了这一个理论化的步骤，所有证据都难以突破现象层面的约束。在这个时候，研究者发现，皮亚杰关于心理结构或逻辑结构从感知-运动协调中发生的解释是具身认知研究最理想的选择③。

第四，形式运算向人工智能算法的转换。

有关人工智能的研究跨越了认知科学、计算机科学、语言学、神经科学、数学等多个领域，无疑是当前最引人关注的议题。近年来，陆续有人工智能新进展的新闻报道，诸如：2014 年，计算机通过了“图灵测试”；2016—2017 年，人工智能围棋程序以绝对优势战胜人类围棋世界冠军。这些信息禁不住让人们猜想，如果未来某一天人工智能全面

① 蒋柯、蒋子修：《镜像神经元是具身认知的解码器吗？》，载《中国社会科学报》，2015，第 7 版。

② 陈巍：《神经现象学》，北京：中国社会科学出版社，2016。

③ 李其维：《寂寞身后事，蓄势待来年——让·皮亚杰逝世 30 周年祭》，载《心理科学》，2010，第 5 期；刘丽红：《皮亚杰发生认识论中的具身认知思想》，载《科学技术哲学》，2014，第 1 期。

超越了人类心智水平，世界将会怎样。但是在专业的人工智能研究者眼里，这些成果并不代表人工智能赶上了或超越了人类的智力①。人工智能为了能够模仿人类的智能活动，研究者必须先要认识到人类的智力活动是如何开展的。

人工智能的策略有两种，一种是尽可能地按照人类智能活动的特征来模拟智能活动；另一种则是黑箱策略，即，如果我们并不了解人的智能活动是如何开展的，我们可以让计算机实现在输入和输出之间建立固定的联结，和人类智能活动的联结一样，那么就可以认为计算机“模拟”了人类的智能。对于第一种策略来说，人工智能的每一个进步都有赖于关于人类智能的研究进展。于是，人工智能必须跟在人类认知研究的后面，将人类认知活动特征转化为人工智能的工作原理；而第二种策略则可以摆脱关于人类智能认识的限制，完全依靠形式化算法的自身繁衍而实现“自我学习”。例如围棋程序的第二代阿尔法元，通过初始的围棋规则来实现自我学习，以更快的速度超过了第一代向人学习的围棋程序阿尔法狗。但是这种人工智能只能在“可计算任务”中实现；当面对“非计算任务”时，人类心智的工作策略才更加有效②。因此，人工智能要实现真正模拟人类智能，依然离不开对人类心智工作特征的了解。心理学考察人类心智的结构性特征，并实现形式化，这将成为人工智能程序的逻辑基础。这样的工作正是皮亚杰在儿童逻辑结构发展的系列研究中已经（或正在）做的工作。关于二元命题的 16 种、三元命题的 256 种逻辑转换正是皮亚杰留给今天人工智能研究者的一份厚礼。

2014 年成功通过图灵测试的程序模仿的是一个 12 岁男孩。根据皮亚杰对儿童认知发展的研究，12 岁正是儿童从具体运算向形式运算过渡的时期。这时儿童的心智能力已经具有了规范的逻辑运算结构，但是相对于形式运算阶段而言，其逻辑结构相对简单，正是计算机程序模拟的最适合水平。相反，在更小的年龄阶段，如前运算阶段，儿童的心智还没有实现完全运算化，非运算性的心智活动是当前计算机无法模拟的。

这个程序的设计选择与皮亚杰的理论之间的契合不应该只是一个巧合。

通过上面的四个方面的例子，我们不难看出：皮亚杰的理论并没有远离当前最热门的研究课题。因此，正如李其维先生在缅怀皮亚杰逝世 30 周年时所说的那样，“我们今日重提皮亚杰，并不是为了怀旧，而是为了推进发生认识论的研究。对其未来前景，笔者持有乐观的信念。”③而我们对发生认识论研究的推进，将成为当前心理学在神经科学和计算机科学的“两种挤压”下获得自身独立学科意义的理论支撑。

皮亚杰的逻辑学理论在过去数十年中也许没有得到应有的重视，本文相信，我们将会看到，在未来的几个十年里，重新找回皮亚杰的逻辑学将会让新一代的心理学冲破当

① 蒋柯：《阿尔法元动了谁的奶酪》，载《中国社会科学报》，2018，第 6 版。

② 蒋柯：《阿尔法元动了谁的奶酪》，载《中国社会科学报》，2018，第 6 版。

③ 李其维：《寂寞身后事，蓄势待来年——让·皮亚杰逝世 30 周年祭》，载《心理科学》，2010，第 5 期。

前二元论的桎梏，开创一个全新的心身统一论的认知科学范式。

蒋 柯

2019 年 9 月 24 日

函数认识论与心理学

〔瑞士〕让·皮亚杰 著
张 勇 查抒佚 译
张 勇 蒋 柯 审校

函数认识论与心理学

法文版 *Épistémologie et Psychologie de la Fonction*, Presses Universitaires de France, 1968.

作　者 Jean Piaget, Jean-Blaise Grize, Alina Szeminska, Vinh Bang

合作者 Catherine Fot, Marianne Meylan-Backs, Francine Orsini, Andrula Papert-Christophides, Elsa Schmid-Kitzikis, Hermine Sinclair

英文版 *Epistemology and Psychology of Functions*, Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company, 1977.

英译者 F. Xavier Castellanos, Vivian D. Anderson

张　勇 查抒佚　译自英文

张　勇 蒋　柯　审校

内容提要

皮亚杰在晚年时期陆续出版了一系列著作。日内瓦大学皮亚杰档案馆馆长J. 弗内歇曾言,这几本书代表了皮亚杰“最后一个阶段的创造”。李其维认为,“皮亚杰最后十年偏重于建构过程的深入揭示……它是皮亚杰对早年结构-建构说的深化与拓展。反省抽象、概括化、矛盾、对应、平衡化甚至可能性与必然性范畴等研究均属此列”(参见总序)。这可以被称作皮亚杰理论的“新发展”。但这些新发展并非一蹴而就,而是经历了一个演变过程。本书成书于1968年,在年份上来看,属于皮亚杰晚期著作的前几部作品之一。从内容来看,皮亚杰及其合作者在当时已经开始聚焦于建构过程本身,深入探讨了对应、概括化、范畴、可逆、反省抽象等主题。

皮亚杰及其合作者为了探索儿童的思维是如何从前运算阶段发展到具体运算阶段的,特引入函数这一概念。在本书中,函数是指儿童在两列成对的事物之间发现或建构的单向依存关系。皮亚杰区分了两类函数:构成性函数(constitutive function)和构成化函数(constituted function)。皮亚杰认为,上述这种单向的依存关系(即构成性函数)可以描述儿童在前运算阶段的思维特征,而构成化函数则对应于具体运算阶段。构成性函数是指变量之间存在松散的、定性的单向依存关系,而构成化函数则具有定量、等距或等比的特点,是一种可逆的双向依存关系。如此一来,皮亚杰及其合作者的研究内容就被操作化为:探索儿童在不同实验任务中,对两个或多个变量之间的函数关系的理解和掌握程度。全书共分为十五章,前半部分(第一章至第七章)主要探讨了构成性函数向构成化函数的演变,后半部分(第八章至第十三章)则聚焦于构成化函数的量化研究,最后两章对全书内容进行了讨论和总结。

第一章从数对入手,探索儿童对成对的事物之间关系的理解。第二章从构成性函数入手,主要探讨儿童是如何从功能相连(以适用性或依存关系为基础)过渡到等价类(以客观相似性为基础)的,也即探索初始的构成性函数是如何通过具体的依存关系过渡到由客观的等价类所构成的函数的。第三章从动作格式的协调入手,考察儿童是如何从简单应用的构成性函数过渡到比例关系的构成化函数的。第四章探讨了因果函数和空间函数,由于函数表达了动作格式在因果性和运算等方面的内在联系,所以有必要对因果性进行探讨。第五章所探讨的函数既涉及运算,也涉及因果性。通过一个简单的实验任务,考察被试对两个集合数值的理解。第六章是对第五章的研究主题的延续和深化,它主要探讨儿童对函数的运算组合的理解。第七章试图在考察函数的组合时,

同时探讨函数的因果性和运算之间的关系，具体内容是对变异之变异的组合例子进行探索和分析。

第八章考察儿童对于两个变量的补偿关系的理解，以及他们能否建构关于这两个变量的函数关系。第九章是对第八章的延续，主要考察被试能否从两个序列的建构中发现函数关系，并从两个序列的协调中分离出比例关系。第十章探讨了车轮大小与行驶距离之间的函数关系。第十一章引入第三变量，探索被试对多个变量之间的函数关系的理解。第十二章不仅考察互补关系，还探讨了反比例关系。第十三章对第八至十二章的内容进行总结，将儿童行为的一般发展规律总结为三个阶段。第十四章对函数观念的发生论进行了详尽的探讨，作者总结道：智慧的起因是动作，智慧的核心是儿童内部的运算，运算在有序数对中表现为一种简单的结构，而有序数对是类、关系和结构性函数的根源。第十五章由皮亚杰独自执笔，他对全书内容进行了总结。他提出，函数日益成为运算和因果性的一个常规起源，它是我们理解运算和因果性的关键。皮亚杰不仅探讨了动作格式、协调器与函数的关系，还通过应用、类和关系，来解释函数和运算的渐进交互。他从函数的量化过程入手，描述了前运算函数（构成性函数）向运算（构成化函数）的过渡。

皮亚杰在早期著作中，曾用函数的依存关系来描述两种知识之间的关系。此外皮亚杰还曾断言，存在一种动作逻辑。这两个看似不经意的观点，在20世纪60年代引发了一条新的研究思路。皮亚杰及其合作者开始对函数进行研究，并提出如下假设：在儿童能够理解和运用定量函数的共变关系（即皮亚杰所提出的构成化函数）之前，儿童使用着一种更加基础的共变形式，即构成性函数。本书正是关于这一假设的实验研究的著作。

构成性函数是指儿童在两个事物之间建立起来的依存关系。但是，这一关系并不能保证儿童一定得出正确的判断或结论。皮亚杰认为，构成性函数可以很好地描述前运算阶段的思维特点，比如看重顺序、单向结构、定性比较等。借助于构成性函数，儿童逐步理解了共变规律，动作格式的协调也变得概括化。皮亚杰一直强调，函数起源于动作格式，产生于动作格式的同化，即动作格式在客体中的应用。构成性函数是处于前逻辑水平的儿童所使用的一种推理形式，由于它是单向的关系，具有方向性和顺序，尚缺乏可逆和补偿，所以这种单向关系只构成一种半逻辑。直到运算思维水平，儿童才建构出符合数学规范的量化函数，即构成化函数。

在皮亚杰看来，构成性函数在感知运动动作和逻辑运算之间，架起了一座不可或缺的桥梁。构成性函数可以精准地描述前运算水平儿童的推理活动，尤其是儿童犯错或者做不到的事情，比如不可逆、缺乏协调及其概括化等。其实，构成性函数所包含的双项结构，是一种非常基础、非常典型的思维结构，它是构成化函数（可逆运算）的前提。从这个意义上来讲，本书关于儿童从构成性函数过渡到构成化函数的实证研究，具有重要的理论意义。

不过，皮亚杰在其晚期著作中，很少继续使用构成性函数和构成化函数的说法。从全书看来，作者对这两类函数的操作定义的区分仍然不够清晰，以致经常出现混淆。此外，在本书的部分实验中（尤其在前半部分），实验任务所构建的构成性函数，在某些阶段实则又属于构成化函数。这使得这本"函数认识论和心理学"的论证力度大打折扣。后来，皮亚杰似乎并不太愿意重提这一论证方式。几年之后，在关于态射与范畴的研究中，皮亚杰重新界定了构成性函数，将其定义为"内态射水平的对应"。

本书译自 1977 年的英文版，是集体劳动的产物，具体分工如下：张勇（序言、导言、第一章至第七章、索引），查抒佚（第八章至第十五章）。第十三章至第十五章由蒋柯审校，其余章节由张勇审校，并对全书进行统稿。

张　勇

目　录

序言/37
导言/39
第一部分　从构成性函数到构成化函数/45
第一章　数对的协调/45
§1　实验Ⅰ:花的替换/47
§2　实验Ⅱ:位置的替换/51
§3　结论:"范畴"的结构/54
第二章　从构成性函数到等价类/56
§1　程序和一般结果/57
§2　探索与专属"适用性"/59
§3　等价类的连续形式/62
§4　互补/65
§5　结论/67
第三章　从规律到比例/69
§1　第一个实验:自发的规律/70
§2　第二个实验:对差异增长的初步觉察/73
§3　第三个实验:从序列对应到比例/78
§4　结论/83
第四章　一例因果函数和空间函数/85
§1　技术和一般结果/86
§2　因果性及其发展阶段/88
§3　第一阶段/90
§4　第二阶段/94
§5　第三阶段/95
§6　结论/96
第五章　从共性到共变:相等与不相等的估计/99
§1　技术和一般结果/99
§2　第一阶段/100

§3 第二阶段/102
§4 第三阶段/104
§5 第四阶段和结论/107
第六章 差值的组合:不相等的划分/110
§1 技术和一般结果/111
§2 第一阶段/112
§3 第二阶段/113
§4 第三阶段/114
§5 第四阶段和结论/115
第七章 一个变异之变异的组合例子/118
§1 技术和一般结果/118
§2 第一阶段/120
§3 第二阶段/123
§4 第三阶段和结论/126
第二部分 构成化函数的量化/129
§1 阐述/129
§2 实验假设/129
第八章 周长恒定的矩形的长宽之增减的函数关系——正方形周长的变化/131
§1 描述/131
§2 结果/133
第九章 序列规律性与比例/136
§1 描述/136
§2 结果/137
第十章 车轮大小与行驶距离之间的函数关系/140
§1 描述/140
§2 结果/141
第十一章 多个变量间函数关系的建立:行驶距离、车轮大小、转动频率/146
§1 描述/146
§2 结果/147
第十二章 在天平的平衡状态中重量 W 和距离 D(杠杆臂)之间的反比关系/150
§1 描述/150
§2 结果/151
第十三章 第八至十二章的结论:行为的一般发展/155
§1 函数观念建构中的发展阶段/155
§2 结论/158

第三部分　理论问题/159
第十四章　关于函数观念发生论研究的助益分析/159
§1　描述/159
§2　结构性函数与分类/166
§3　结构化函数与比例/168
§4　基本关系——运算/174
§5　阶段性结论/177
第十五章　总论/180
§1　函数的起源/180
§2　动作格式，协调器与函数/183
§3　函数与因果性/186
§4　应用、类与关系/191
§5　函数的量化与构成化函数的过渡/195
§6　总结：函数序列与包含的可逆性——协调逻辑（初级组合子）和运算逻辑/199
原版索引/203
文献总汇/225
历史文献/235

序　言

数年前，由格里兹、阿波斯特尔和 S. 巴贝尔发起，我们对函数进行了研究。但是，直至今日，我们仍未完全理解函数与运算之间的关系，以及它们在“构成化函数”水平中不断增强的相互作用。相反，近期关于“构成性函数”（或者前运算函数格式）的研究使我们确信，存在一种函数逻辑。函数逻辑先于运算逻辑而出现，它产生于动作格式，而运算逻辑则来自于动作之间的一般化协调和可逆性协调。这种前运算逻辑可以解释 4 岁儿童和 7 岁儿童之间的顺序关系，这些关系非常普遍，却一直没有研究清楚。用前运算逻辑来解释这些关系是自然而然的事，因为函数是有序的依存关系，而且产生于具有指向性的“应用”。而且，当这种“逻辑”最终以积极的方式获得形式化的结构时，它仍是有缺陷或有局限的。从心理学上讲，由于顺序关系的重要性，我们希望理解被试的系统化错误，比如不能区分“更长”和“更远”，或者因（各个水平的）序数估计所造成的不守恒，这与外延评估或度量评估完全相反。在真正的心理学意义上，我们可以说，构成性函数的这种前运算逻辑仅仅代表了运算逻辑的前半部分。而可逆性，则通过完成最初的单向结构，使运算逻辑的后半部分得以建构。

此外，关于动作格式（与一般协调和运算协调相反），函数构成了运算和因果性的共同来源。关于后者所涉及的观点，本书中的很多研究也提供了某些新的数据。

本书的第一部分由 J. 皮亚杰和 C. 福特，M. 梅兰-巴克斯，F. 奥尔西尼，S. 巴贝尔-克里斯托弗，E. 施密德-克兹科斯，H. 辛克莱，A. 斯泽明斯卡共同完成，主要涉及构成性函数或前运算函数，以及它们向构成化函数（与运算有关）逐步转变的过程。这部分的研究总共采集了 641 名 3 到 12－13 岁儿童的数据。

第二部分由万·邦执笔，共包括 5 个实验。这 5 个实验耗时数年，主要涉及构成化函数的量化，尤其是比例关系（实验对象是 353 名 6 到 14 岁的被试）。

第三部分包括两项理论研究。在第一项研究中，J. B. 格里兹总结了函数的逻辑结构的历史，包括之前各章节涉及的不同水平。在第二项研究中，J. 皮亚杰根据上述研究结果进行了“总结”。

导 言

阅读皮亚杰的书,如同进入一个系统。一般来讲,皮亚杰及其合作者(但尤其是他本人)是一整套令人印象深刻的结构化理论的创立者,这套理论以实验和控制为基础,探索关于人的认识活动和知识体系的真相。从皮亚杰的海量著作中挑选出一本书,这似乎很不恰当。读者总是会遇到大量的基本概念,这些概念来自极富创造性的思想,贯穿于皮亚杰及其几百位合作者所写的数十本研究著作中。毫无疑问,四十多年以来,皮亚杰一直都是"日内瓦研究团队"的先锋人物,他所具有的创造性和整合性的力量,支撑着几代日内瓦研究者。尽管不能列出所有合作者的名字,但他们一直若隐若现地出现在很多著作中。皮亚杰在其非常有趣的科学自传中,曾亲自向合作者表示感谢,包括心理学家巴蓓尔·英海尔德,艾琳娜·斯泽明斯卡,万·邦,布雷雄,格雷克和弗雷斯,心理语言学家辛克莱,数学家恩里克斯和贝丝,物理学家加西亚和哈尔布瓦克斯,控制论专家 S. 巴贝尔和塞莱里耶,生物学方法论学者诺文斯基,逻辑学家阿波斯特尔,格里兹和韦穆斯,"还有很多其他人"。

现在我们正位于国际发生认识论研究中心,该中心的发生认识论研究大都源于皮亚杰的指导。这本出版于 1968 年的独特著作,是该中心自 1956 年以来出版的第 23 本书。洛克菲勒基金从一开始就对该中心给予长期资助,瑞士国家科学研究基金从 1964 年起也开始提供资助,到目前(1977 年)为止,该中心一直保持着每年大约两本著作的产量。

不用我说,这些研究超越了通常意义上的心理学前沿。皮亚杰和他的继任者正执掌着日内瓦大学心理学和教育科学系。从 20 世纪 20 年代开始,作为让-雅克·卢梭研究所的负责人(前任负责人是克拉帕雷德),皮亚杰就开始了极富原创性的实验儿童心理学研究,尤其关注从儿童期到青春期的认知发展。某种程度上,这可能得益于皮亚杰对自己的两个孩子的观察。但重要的是(后面我还会谈到这件事的潜在意义),皮亚杰在更早的时候,当他还非常年轻时,他开始学习"自然科学",撰写了一篇关于蜗牛的博士论文,探讨生活在瑞士不同海拔的湖泊和不同生态条件下的蜗牛的多样性。同时,皮亚杰开始对传统哲学产生兴趣(在皮亚杰的学术道路中,他不断超越——可参见皮亚杰 1966 年出版的极富思想性的书《哲学的洞察与错觉》)。所以,在皮亚杰的早期生涯,他不仅在日内瓦大学和内切斯大学教授儿童心理学,同时还教授科学哲学,以及科学史中的观念变迁。皮亚杰甚至还给学生讲过人类社会学课程(请记住他做过生物生态学的

研究）。

正是由于皮亚杰的学术生涯起始于这些(和其他)出发点，再加上他人格中的“非理性”根基（喜欢探索那些非常重要的早期问题，比如生命的本质、真理和安全等），我们可以理解，他那颗极富成效的实验性和综合性的头脑，为何在很早的时候就开始思考一个相当大的交叉议题。他希望(采用生物预成)发现一种智力的“心理胚胎学”(psychological embryology)，探讨行动主体和思维主体与其经验对象之间的关系，以及主体和其他主体之间的关系。而这后一种关系，必须被视为生物“有机体”与其周围环境之间的关系的一种特例。二者的区别在于，第一种关系中交换的是信息，而第二种关系中交换的是物质。

皮亚杰也曾短暂地研究过个体与群体之间社会合作的发展，满意的社会交换，还研究过价值、动机，以及道德和正义的规范性思维的发展。但是，他的研究主线一直是认知发展，他从更严格的数学、几何和物理意义上探讨认知发展，研究发展的连续性，科学智力思维的阶段性，以及科学对其自身的认识论反思。

比如，对盎格鲁-撒克逊(Anglo-Saxon)读者而言，这种将心理学和认识论相结合的做法可能会引发质疑。这岂不是把大量的实验心理学知识和“哲学”混为一谈？心理学难道不是用实验方法来研究思维吗？心理学难道不是这样理解心智的吗？——人类的心智或主体建构了关于外部世界的客体的表象，通过内部的组织化过程(语言在其中发挥了重要的作用)，心理表象以可言说的文字对客观实在做真实的描述。皮亚杰及其合作者在解释智力和智慧行为时，一直与这种还原论做斗争。这可以参考他们于1968年在一次关于“超越还原论”的阿尔卑巴赫研讨会上提交的论文《经验主义的鸿沟》。基于动作和思维的还原论才是儿童获得关于外部世界的知识的主要来源，而不是基于感知觉的还原论。根据皮亚杰的说法，作为发展的最终结果，成年人所获得的逻辑规则也是源于前者。

而且——(继续追溯皮亚杰的部分批评者的思路)——认识论不是哲学的一个分支吗？皮亚杰强烈反对这个说法。他指出，先哲们(包括柏拉图、笛卡尔、莱布尼茨和康德)的认识论时代已经结束了。取而代之者是现代科学认识论，它源于现代伟大科学头脑的反思。他们通过科学探索，对自己知识的基础和追寻真理的方法提出质疑。这种认识论与形而上学和其他哲学领域截然不同，它与现代（数学）逻辑的蓬勃发展紧密相连。

参与这种连接的著名数学家和物理学家非常多——此处仅提及分子生物学家雅克·莫诺德。皮亚杰曾与莫诺德做过一些有趣的书面讨论，探讨生命系统在环境的干扰或促进下的发展和演化，以及偶然性、必然性和积极自我建构所起的作用，这些都要基于规范的、同化的生物能力。

皮亚杰很早就用他所谓的“哲学中的恶魔”来为自己辩护。凭借强大的理性，他投身于艰苦的实验工作和“真理的研究”。但他总是对“事实”所涉及的无法观察到的东西

感兴趣，并带领着我们。由于这种倾向，再加上他的生物学背景，皮亚杰在其早期著作中就已经设想过所有生活领域（有机体的、心理的和社会的）中的组织化或结构化的整体，从未想过各个元素孤立地运作。在我们的理解中，我们观察到的基本实在总是依赖于更大的整体，正是整体赋予了基本实在的含义。而且，不管在哪个层面上，都存在部分与整体之间的关系问题。比如，生物学中的物种问题引发了一个疑问，即这是一种"实在"，还是我们更广泛的概念的一种功能？在后一种情况中，它只是其中的一部分。记住，皮亚杰曾研究过不同生态环境或不同生活全貌中的蜗牛的多样性。这与所谓的"数学实体"到底是否存在的问题非常类似。现在我们知道，如果我们将数学思维发展成为更广泛、更强大的数学结构，它们将变得毫无意义。这又与哲学中关于"实在论"和"唯名论"的历史问题非常类似。

于是，皮亚杰转向研究人类思维（尤其是认识）的基本结构。开始时，他主要研究年幼儿童在非常早期的阶段所具有的"知识"，后来他频繁地回归这个主题。皮亚杰发现了"儿童的逻辑"。几乎从一开始，他就对儿童思维中的"错误"和"失败"不感兴趣，他想弄清楚儿童在回答我们以"成年人思维"所提出的问题中注定失败的原因。皮亚杰及其早期合作者开发了一种很好的"临床"研究法，根据每个儿童的水平对其进行访谈和询问，并追踪儿童的逻辑迈入更高的阶段（即他所说的组织、系统、思维结构），迈入青少年期，甚至是成人的科学思维阶段。即使在官方科学中，也并非只有一种，而是有多种研究方法（背后拥有不同的思维阶段）。我们的知识既不是在我们心智的内部结构中预先确定的，也不是在我们外部事物的先在（pre-existent）属性中预先确定的。"客体"的这些先在属性只有通过知识结构被逐渐知晓，而知识结构又是在经验的影响下，通过动作在不断发展的心智中逐渐建构起来的。这就是所谓的发生认识论。

皮亚杰发现，心理学是介于生物学和老式的对知识作哲学分析之间的一个实验领域。他一直通过实验方法来认识我们不断增长的知识。美国心理学会（APA）曾在一些学术庆典中向皮亚杰喊话，说他是以经验主义的方式在探讨哲学问题，而他的研究又使得心理学成了"副产品"。或许如此，但这样的说法不够精确。主要活动和次要活动之分是毫无疑问的。本质上，它是研究认识问题的一种实验分析方法，用于探究我们不断增长的知识背后所对应的不断发展变化的心理结构的直接反映。所以，最好像皮亚杰本人那样来看待此事：这些关于认识活动的判断，在意义方面严重超出了实验心理学的界限，但在验证方面却没有超出实验心理学的界限。

皮亚杰研究了成人的思维结构，以及他所谓的心理运算。思维在规则的活动中不断发展，变得越来越复杂，最终演变成完全可逆的思维结构。之后，皮亚杰转向研究最原始的思维结构，即他在很多不同的知觉场景和实际情境中发现的"守恒"或"客体恒常性"现象。

皮亚杰认为，在思维结构中，支配从心理发展到心理运算的规律，无疑与神经系统的结构化规律是一致的。目前已经可以采用定性的数学结构（群，格，等），部分地对神

经系统的结构化规律作形式化的描述。关于这个问题,可参考皮亚杰的重要著作《生物学与知识》。皮亚杰提出:形式化的(数学的、逻辑的)演绎结构,对应于现实中的心理活动的结构化过程的心理阶段;站在生物学角度来看待自动调整的控制论模型,我们就可以理解,运算思维(由现实中的思维主体的动作发展而来)是结构化的有机生命体和结构化的逻辑-数学"实在"之间的一座桥梁。

皮亚杰经常说,如果没有逻辑模型或数学模型的帮助,很难想象该如何对我们不断增长的认知功能进行心理学研究。这些模型代表了成人认知思维的最高形式。他进一步指出,如果不对我们的知识作持续的认识论分析,就不可能对我们的认知功能进行心理学研究。

在发生认识论国际研究中心的跨国和跨学科"全体会议"年会上,与会者对非常专业的研究结果进行讨论,他们试着在高度形式化的演绎过程和实验验证中寻找共同语言、共同方法和共同结论。在这个会议上,本书序言开头所提到那些人都出席了会议,还有一些来自国外的重要嘉宾,他们分别代表了不同的学科,并提供了合适的讨论角度。他们对实验进行了分析,并对其背后的理论进行了探讨。会议欢迎各位与会者站在不同学科的角度对同一实验作不同的解释,因为这是通往更高的相互理解和更高的认识形式的主要途径,同时也是下一步研究和实验的起点。

本书的独特重要性在于,它提出了问题。并且,前几年关于心理运算的发生、阶段及其在认知思维中的作用的研究都还尚浅,而本书则对此展开了讨论。以前,研究者们认为儿童直到6岁才拥有感知运动智慧,但还不具备运算智慧(它仅指人在处理具体事物的表征时的心理运算)。在此之前,甚至在语言出现之前,尽管儿童在处理具体事物时已经表现出一些智慧行为,但这些行为也只停留在感知运动层面。在此期间,也存在"动作格式"的协调,以及适应性动作的组织化。然而,本书对儿童在3岁5个月至6岁期间的智慧所持有的看法要乐观得多。这再次得益于成人思维的数学模型和形式化模型的帮助。本书是在儿童的心理现实中研究成人思维的起源,通过梳理函数思维(意即依存关系中的思维)和运算智慧(具有可逆性和在一个结构化整体内进行转换的可能性)之间的关系,获得了关于成人思维的初步认识。函数可被视为心理运算的前身。

本书还讨论了函数的起源,它可能源于儿童所处的物理世界,源于儿童的动作,抑或是儿童自己对客体的操作。本书在这方面讲得很丰富。

最后,当再次回到以皮亚杰为核心的"日内瓦研究团队"及其全部著作时,我要提及巴蓓尔·英海尔德在日内瓦大学负责的《让·皮亚杰档案目录》。这份目录共分为三个部分,第一部分包含了皮亚杰从1907年至今的所有著作,共有1500个标题。第二部分包含大约800张索引卡,涉及直接合作者的全部著作。第三部分主要包括由皮亚杰思想所产生的二级文献,共约1750张索引卡。出版商是位于美国波士顿的G. K. Hall & Co.出版公司。

皮亚杰不仅是现代科学领域的典范,在许多人看来,他永不停歇的探索和科学的实

验态度，恰恰代表了欧洲精神的传统。他与大自然建立了牢固的纽带，经常到瑞士山脉间游走；他拥有强大的理性、整合性思维和推理能力，绝非是因为运气好；他对友谊和美好生活拥有健康的品位，他具有迷人的简约风格和举止，又表现得冷静而清醒；他甚至还有非常顽皮的一面。所有这些，正是奥林匹克精神的含义。

A. 苏尼尔

第一部分
从构成性函数到构成化函数

第一章　数对的协调[1]

我们一度[2]观察到，当研究者要求儿童将一列物体按照从小到大的顺序 $A<B<C<\cdots$ 进行排列时，最年幼的被试仅仅只对这些物体做成对排列，比如 CF、AD、EH 等，维持"一小一大"的顺序。但是接下来，他们不能把这些成对的物体协调进一个序列当中。儿童在第一次对"图形集合"归类时也存在此类现象：尽管最年幼的被试可以轻松地建构出一个图形组合，比如将图形放成一排，但他们通常只是把一个物体放在它之前的那个物体旁边（比如，一个正方形挨着另一个正方形，或者一只羊后面跟着一个牧羊人），并没有考虑到前面的其他物体。换句话说，年幼的儿童再次未能将成对的物体协调进一个整体的线性序列中。1947 年，瓦隆（《儿童思维的起源》）曾集中探讨过这种数对（pairs）的概念，将之视为认知建构的最基础的形式。霍夫丁在其著作（《人类的思维》）中也谈论过类似的观点，他比较了关于圆规的连续位置的研究著作后发现，即使将圆规的一条腿置于一个给定的点，这也不能提供任何信息，除非我们将圆规的另一条腿放在另一个点或者另一个物体上。

---

① 与 C. 福特合作。

② 皮亚杰和斯泽明斯卡：《儿童的数概念》，Rouledge & Kegan Paul，伦敦，1952。

如果我们在数学意义上，将函数定义为朝右的单一关系①，比如有序数对，那么上文提到的数对尽管非常基础，但已经构成了函数。不过，假如我们从心理学意义上对函数作进一步思考，把函数视为动作的同化格式的表达，那么任何将客体 x 修正为 x' 或者 y 的动作，其概念化过程就已经表现为函数，即构成了一个有序数对 (x, x') 或 (x, y)。由于我们假设，函数是运算和因果系统的共同来源，因此我们可以在区分运算和因果系统之前，发现诸如 (x, y) 这样的最基础的数对形式（所以这些数对很容易指向两种方向中的任意一种）。在接下来的研究中，我们采用数对 (x, y) 来表示 y 对 x 的替换。这种替换②可被视为被试动作（或运算）的产物（比如，从 x 开始，选择 y，并且发现 x 和 y 之间存在某种特定的转换和对应关系），或者被视为因果动作的产物（比如，通过放大或变色等，把 x 修改为 y），抑或只是某个简单运动的产物（比如，通过用位置 y 来替换初始位置 x，移置一个移动的物体）。

由替换动作所产生的这些数对，引发了它们内部两个成分之间的组合问题。换句话说，这带来了协调阶段的问题。是否数对一旦被建构出来，它们就必定能获得协调？或者，是否存在一个发展水平，数对不能获得某种协调（譬如我们上面谈到的序列化）？倘若此，是否可以给数对指派某种暂时够用的结构，在数学家们（麦克莱恩等人）看来，该结构与“范畴”具有相似性。

我们设计了两个实验任务，这两个任务完全同构，只是具体的呈现方式有所不同。一个实验任务由花朵组成，花朵之间可根据两种不同的尺寸和颜色相互替换。另一个实验任务由分段轨迹线构成，某个物体沿着轨迹线运动，它的位置不停被另一个位置所替换。在这两个实验中，被试的任务是通过组合两三个连续的替换来达到某些预定的目标，这使实验任务显得尽可能简单和“充满童趣”。实验表明，尽管儿童有时马上就能建构出数对的组合，但发生这种情况的频率比我们预期的更低，因为组合常常是由连续试错得来的。这似乎指向了这一事实：数对的存在或形成，要先于数对的协调；其实，一个数对构成了一种单元或者单元结构，即使它并不独立，它也至少导致了一种相对独立

① 短语“朝右的单一”(univoque à droite) 是指一种属性，它能区分函数和关系，也即，函数由一组有序数对 (x,y) 组成，对于来自集合 X 的某个 x，函数 f 给它指派了唯一的值 y（y 是集合 Y 中的一个成员），于是，我们写为 $y=f(x)$。另外，如果函数在另一个方向也满足唯一性条件，即对每个 y 也只有一个 x 对它对应，那么皮亚杰会说，函数 f 是“一对一”函数。——英文版译者注

② 格里兹在其理论性的章节（第十四章）中有理有据地提出，构成性函数不是由运算（在群集和可逆性的意义上）来表达的，而是由库里等人的一般组合逻辑中的“组合器”来表达。现在，这些基本组合器之一是“交换器”C，它在本章中专门用于建构基本数对。我们只注意到，关于这个交换器，人们可以设想出各种样式或程度。比如，如果 a 只是“替换”了 b，那我们写为 C_0；如果存在互反替换，即 ab 交换为 ba，那我们写为 C_1。此外，除了与主体动作有关的交换器 C 之外，我们还可以设想与客体有关的交换器 C'。在这种情况下，序列 ab 变成 ba 意味着 a 与 b 发生了相对位移。正是通过这种位移或位置替换，主体首先构思出运动序列，而这又发生在建构度量方法（用于表示位移大小）之前。本章§2将会使用这一概念。

的觉察。此外，从这个起始点（它至少是相对的，因为在动作被概念化之前或者在被试觉察到动作之前，动作能够获得很好的协调）开始，函数可以通过类、关系系统或者因果系统（或因果律）的发展，被指引向不同的方向。

§1 实验Ⅰ：花的替换

向儿童呈现4张图片，每张图片包含8个方格（见图1）。在每张图片的上排的4个方格中，从左至右分别包括这四种花：大红花、小红花、大蓝花、小蓝花。在图片Ⅰ中，上下两排花朵的特征完全相同，即上排的每一朵花都可以被它下方的花所替换，且不会改变上排花朵的顺序和规则。在图片S中，上排的每一朵花都与它下方的花颜色相同，但大小不同。而在图片C中，上排的每一朵花都与它下方的花大小相同，但颜色不同。最后，在图片D中，上排的每一朵花与它下方对应的花在颜色和大小上均不相同。花儿全都被绘在小卡片上，一部分小卡片用在方格中，另一些留待备用。

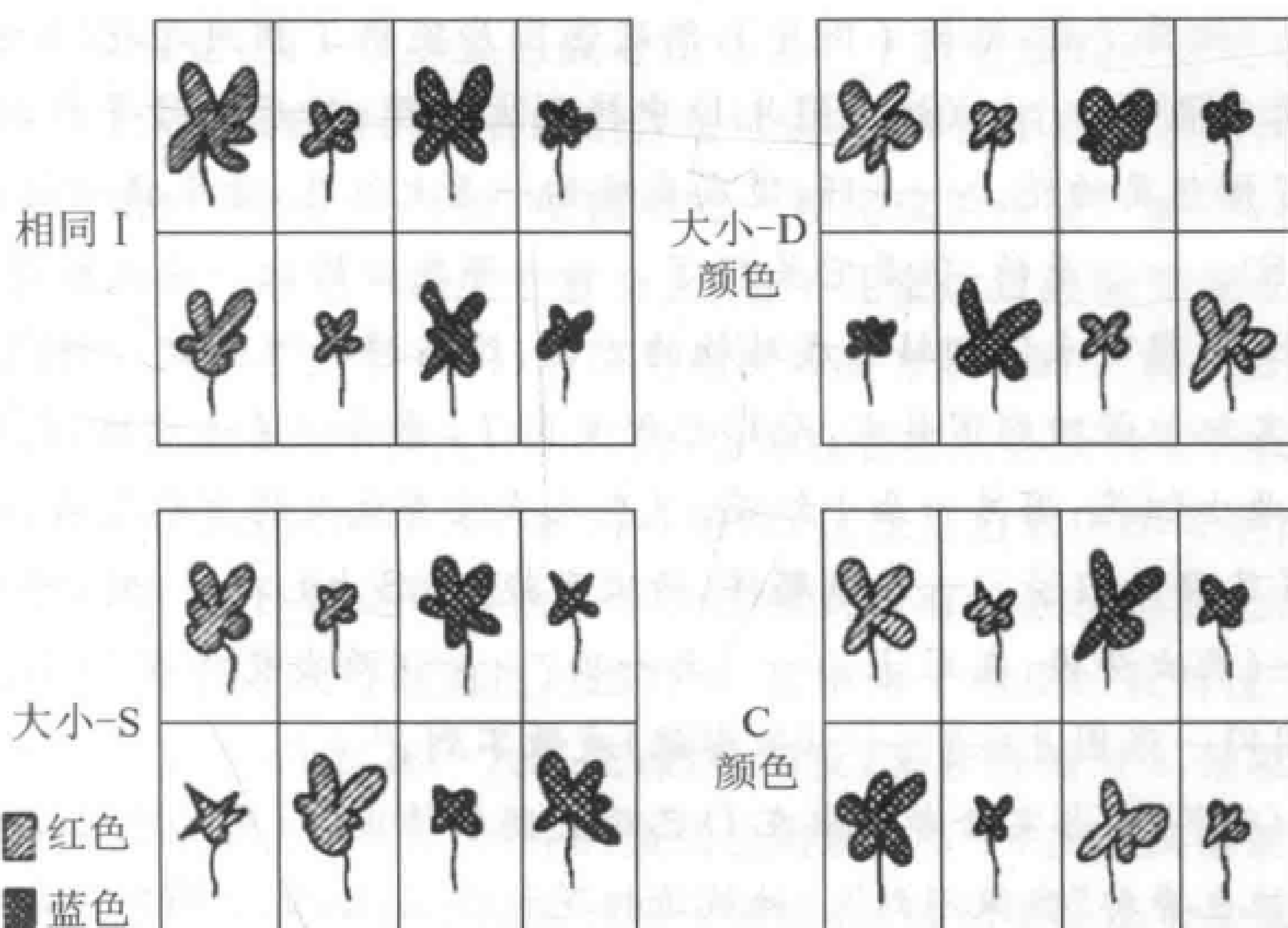


图1

一旦我们确定被试已经理解了4张图片中这些花儿之间的对应关系，我们就鼓励被试来玩一个交换游戏。游戏规则如下：只要儿童把一朵花放在另一朵颜色相同、大小相同的花（该花位于图片Ⅰ—D的上排方格）上，他就有权选择下排方格中所对应的花进行交换。被试有机会做少量的初步练习和试玩，直到他完全掌握游戏规则。之后，被试进入真正的实验，实验任务是用一朵给定的花（比如大红花）去获得另一朵花（比如大蓝花）。然而，当能够直接交换的“商店”关门时（在实验Ⅰ中该商店是图片C），被试必须至少通过两次交换（在实验Ⅰ中是S和D）来替换直

接交换。测试从关闭图片 D 开始，以关闭图片 I 为结束。在某些情况下（技术Ⅱ），实验以儿童自己建构图片为开始；在另一些情况中（技术Ⅲ），在儿童建构图片后，实验者用隔板将图片覆盖起来，该隔板只包含一张标签，用于解释各种潜在交换的特征：颜色、大小、颜色和大小以及相同①。

实验的初步结果表明，当年幼被试带着预期或者定向组合方式去构造交换数对或替换数对时，经历了相当大的困难；相反，只要被试成功地通过试错找到了组合方式，或者得到了间接的提示，他们就能轻松地理解这些组合方式：

Cla（5 岁） “如果你必须用一个小蓝花来找到一个大红花，你需要用到哪张图片？——这张（D：正确）。——试试看，还是找大红花，但这次不要使用这张图片（D）。——（他在另外三张图片中仔细寻找所需要的成对物）不行，找不到。——分几个步骤试试看，从其中一部分开始着手。——（长时间的犹豫：他挑出了大蓝花。）很好，接下来呢？——（再次犹豫：他以改变花朵颜色结束了任务。）——好的，现在重新开始（相同的问题）。——（他马上就成功了）我先找到大蓝花（指着图片 S），然后是大红花（图片 C）。——很好。如果我给你一朵小蓝花，你能帮我找到一朵大蓝花吗？——我到这里找（S）。——是的，但是商店关门了。——（他看了看，选择了图片 I，但这张图片提供了相同的花）这张不行。——想想先前的做法。——（他从图片 D 中找到大红花，然后继续寻找，最后在图片 C 中找到了他想要的花。）——好，现在我给你一朵大红花，你来找一朵大蓝花。——在那里（S）。——是的，但是它关门了。——那我必须找一朵大红花在下，一朵大蓝花在上。（接下来他翻转了成对物的方向，这在移动性上是一种进步，但他没有看到，这又把他带回到图片 C，而 C 已经关门了；最后他通过试错，成功了。）——现在，找一朵小红花，用另一朵小红花。（在几次没有成果的弯路之后，他又回到了图片 I，但 I 已经关门了。）——像那样（两次交换，在 S 上）。——对，那么另一种方式呢？——（两次交换，在 C 上。）——再一次？——（两次交换在 D 上。）——如果你不能使用同一张图片呢？——（做尝试）我做不到。”

Nat（6 岁） 当实验者提出在 D 已经关闭的情况下，要求她用大蓝花来找到小红花时，她也声称“我做不到”。她被迫把花放在 C 上，从中得到一朵小蓝花，然后在 S 上获得成功。当她再次尝试时，她通过反复试错最终成功了，但经历了从 I，C 到 S 的过程。当 C 关闭时，要求她用一朵小蓝花找到一朵小红花，她尝试 D：“在这里，但上面有一朵小红花，下面有一朵大蓝花，我做不到。”——找大蓝花，再试试。——（她在 S 中找到了它）可以用一朵大蓝花找到一朵大蓝花（当 I 关闭时）？——我做不到：大蓝花附近没有大蓝花。——试试之前的法子。——（她从 S 中获得一朵小蓝花）不，这儿不行（然后继续探索，她返回 S，发现可以用小蓝花找

① 标签由儿童自己制定。

到另一朵大蓝花)。——这儿(C)呢?——那样不行。等等。

Pas(6岁11个月) 他自己建构了四张图片(包括D),这展示出相同的非组合性试错和事后的综合性反应。但是,除了CC=I等,并未产生任何概括化。

儿童在建构这些组合时存在困难,这并不能归因于他们不理解实验指令,因为我们发现儿童在火车任务中同样不能达到协调。在火车的例子中,两条线段的连接点表示两条铁路之间的转换,看上去更加直观。因此,儿童所表现出来的困难需要某种更具普遍性的解释,这可以从两个方向来进行探讨。第一种解释是因果特征,它可以归结为工具性动作的传递性:除了在简单例子中,把推力传递给一个中间物体(比如木棍等),随后该物体又把力传送给一个移动物体(并不需要直接身体接触)。众所周知,7岁以下的儿童还不能组合他们所需的手段(比如钩子),去达到某个客观目标或终点。第二种解释涉及运算的传递性:直到7岁左右,儿童都不能从$A<B$和$B<C$中推导出$A<C$,或从$A=B$和$B=C$中推导出$A=C$,甚至,即使儿童已经建立起这种组合产物,他们仍然不能从中推导出所需的结论。在这些特殊组合事例中,C通过替换B以及B替换A,最终C替换了A,这使得工具传递性和逻辑传递性之间存在一个中间地带,这正是最原始的困难所在。

然而,看起来很明显,当一个单独的数对在与另一个数对形成组合之前,它就已经构成了某种结构,一旦儿童观察到二者的组合是可能的(即使不在儿童的预期之内),他们就把它理解为原始数对的扩展,因而使模型的一般化成为可能。确实,在这个水平,儿童还没有形成演绎的一般化。在这个意义上,由于儿童通过经验发现了两种解决方法中的一种(比如先C然后S再到D),所以对称的解决方案(顺序:先S然后C)既不是被演绎出来的,也不是通过经验被搜寻出来的,仿佛在替换的连续性上仅仅只存在一种可能的顺序。不过,儿童在前运算水平缺乏可逆性(这里是指顺序的可逆性,比如交换律),这是非常自然的;此外,缺乏可逆性并不会扩展到所有的候选函数上。相反,非常明显的是,Cla(5岁)一旦发现可以通过对图片S(其中两个相反的数对位于相邻位置)进行两次连续的反向交换(小红花→大红花,然后相反)来获得编号I,他就马上把这种解决方法推广到图片C和D中去。同样的做法也出现在5—6岁的其他被试身上。

下一个阶段,我们在8岁及以上的儿童身上观察到,他们不再单独依靠经验上的试错而形成替换的组合(除了有些初始尝试外),而是通过观看图片和演绎推导来建构组合。确实,被试仍然需要观看图片,不能仅依靠名称和运算意义来唤起组合(直到第三阶段他们才能这样做),而是通过观看图片,在心理层面将各种可能的替换组合起来。换句话说,在第一、第二和第三阶段中,当动作格式的结构与表示它的函数结构保持一致时,动作就稳步地得以内化。我们试图从抽象意义的“函数”的角度中分离出这种函数结构,与我们正在从心理“机能”的角度所做的一样。再次提醒,如果下一个发展水平的标志是获得交换律,那么拥有技术Ⅲ的被试就还未掌握它。为了确保交换律的有效性,被试还需要一个实际的控制:

Dan(8 岁 9 个月) “我将给你一朵小蓝花,你寻找大红花。——这里(D)。——对,但如果它关门了呢?——我做不到。——用一个小弯路试试?——我做不到。哦,我可以,在这里(C),然后那里(S)。”是这样。——如果我给你一朵小红花,如何找到一朵大蓝花呢?——(他盯着图片看。)——如果(D)关门的话,能用一步就找到大蓝花吗?——不可能(他发现了S然后是C)。——现在我们将关闭S,你用大蓝花去找小蓝花。——这里(C然后D)。——还有别的方法吗?——有,那里(D)和那里(C)。——它们有何不同?——首先,我做了(D,C),然后(C,D)。这次,我是按照跟之前相反的方向来做的。——如果(C)关门了,用大红花去发现大蓝花。——那样做(C,D)。——多少张图片?——两张。——还有别的方法吗?——有(D,C)。我按照反方向来做。——用小红花去找小红花。——这里(I)。——好的,如果它关门了呢?——那样做(D,D)。——还有其他法子吗?——那样(S,S)。——还有其他方法吗?——这里(C,C)。——还可以用其他图片吗?——(他发现了S,C和D)多少张?——三张。

Yve(8 岁 10 个月,技术Ⅲ) 先经历了一些试错,然后建构出四张图片(包括I)。他在纸上贴标签,用纸来覆盖图片:“颜色(C),相同(A),大小(S),颜色和大小(D)。”给他一朵小蓝花,要求他找到大红花,他说:“这里(D)。——如果它关闭了,你用其他办法可以做到吗?——没有其他办法。——如果你平时上学的路被拦住了,你会怎么做呢?——绕行。——那这里呢?——在(S)上我可以…… ——获得什么?——一朵大蓝花。——可以用它来?——在(C)上找到一朵大红花。——试试用一朵大蓝花找到一朵小红花?——去那里(C),我得到了小蓝花(错误答案)。——(C)能给你什么?——颜色。它给我大蓝花,我再去(S),它能给我小蓝花。——试试用大蓝花找到小蓝花(假如S已经关闭)。——我去(I),它给我大蓝花,然后(C)给我大红花,(D)给我小蓝花。——你能换一种方法吗?——不可以。——如果从(D)开始,会怎么样?——噢是的,它能给我小红花,(C)给我小蓝花。”当C关闭时他的表现是一样的,他找到了一种解决方案,但不能反向操作。他用I找到了一种解决方案而且能做反向操作,但直到拿开隔板,他都没有发现其实双重交换——比如(D,D)——可以出现在一张卡片上。

于是我们发现,只要图片是可见的,8岁及以上的儿童无须试错就能找到所有的解决方案及其互反形式(交换律)。然而,当图片被隔板所遮挡时,尽管被试能够找到某种解决方法,但他们不会做反向操作,甚至在一张图片中完成双重替换都做不到。另一方面,在第三阶段,被试的指令中所包含的演绎(和假设演绎)过程,有助于他解决这些问题,甚至无须对图片做知觉检测(技术Ⅲ):

Ari(10 岁 1 个月,技术Ⅲ) 建构了四张卡片,并将它们命名为“颜色”,“大小”,“颜色+大小”(D)和“相同”(I)。当D关闭时,她转向S然后C:“我们可以先查看C然后再S吗?”——“不行”。接着她改变了想法,找到了它。C和S相继关

闭时，她每次都能找到解决方案，并能完成反向操作。当 I 关闭时，为了用一朵小红花找到另一朵小红花，她指向(D)："我得到一朵大蓝花，然后在(S)得到一朵小蓝花，接着我去(C)找到一朵小红花。——你能换一种方法吗？——(她指出了另一条操作顺序。)——只用(C)或(D)行不行？——不行，我做不到。——为什么？——(一边沉吟一边深入思考)：噢对了，我可以做两次。我在这里(D)得到一朵大蓝花，然后重复操作一次，我就得到了一朵小红花。——那么只用(C)呢？——可以，我也能做两次。——用(S)呢？——也是两次。"

在这个阶段，儿童能解决所有的问题，甚至无须看着图片。但需要再次提醒的是，后期在儿童身上所发现的结构，其实早在第一阶段就已经出现，而当时儿童主要依靠试错和理解后的事实。然而，由于上述任务中所包含的数对已经涉及交换或替换的内涵(儿童随即对它们作如此理解)，而且由于最早的试错只发生在两个或更多的数对进行组合时，所以，数对自身的结构和它们的组合结构之间存在连续性。在解析这些数对组合的一般特征之前，我们还需考察被试在第二个实验中的反应，该实验与先前的实验在功能上同构。

§2 实验Ⅱ：位置的替换

在这个实验中，被试的任务是处理四种花。我们把起点的花叫作 1，把终点的花叫作 2,3 和 4。连接花朵的路径可能很简单(1→2,2→3,等等)，可能较复杂(1→2)+(2→3)，也可能是由任务目标所组合而成的捷径(1→3)和(2→4)。我们用位置 1,2,3 和 4 来代替这四种花(见图 2)，四个位置分别用绿色(1→2 和 3→4)、蓝色(2→3 和 1→4)和红色(1→3 和 2→4)的线连起来。我们把位置的变化或替换叫作"位移"(displacements)①。于是，数对的组合问题就能以位移的形式呈现给被试。向每个被试展示 12cm×15cm 的长方形(见图 2)，告诉被试彩色线段都是铁轨，每条铁轨上各有一列火车(=跟线段颜色相同的小矩形)在运行。

每列火车都只能沿直线运行，如果要从 1 到 3，那么必须在 2 换乘火车。此外，有些线路偶尔会"关闭"，所以当从 1 到 2 的绿色线路关闭时，必须采用线路(1,3)+(3,2)或者(1,4)+(4,2)。最后，所有任务的起点都是 1。

显然，实验Ⅱ所呈现的问题与实验 I 是一样的：每一个(1,2)数对都代表了一次位置替换，而数对之间的协调[比如(1,2)+(2,3)]则构成了两次替换的组合，这产生了单一的结果[此处指(1,3)]。唯一的区别在于，替换组合在直觉上显得更加简单，因为它只需要换乘火车和把两条行程首尾相连起来。向被试系统性地提出以下三个问题：

---

① 从这个地方开始，路线 1→2 将被记为"(1,2)"，等等(见图 2)。

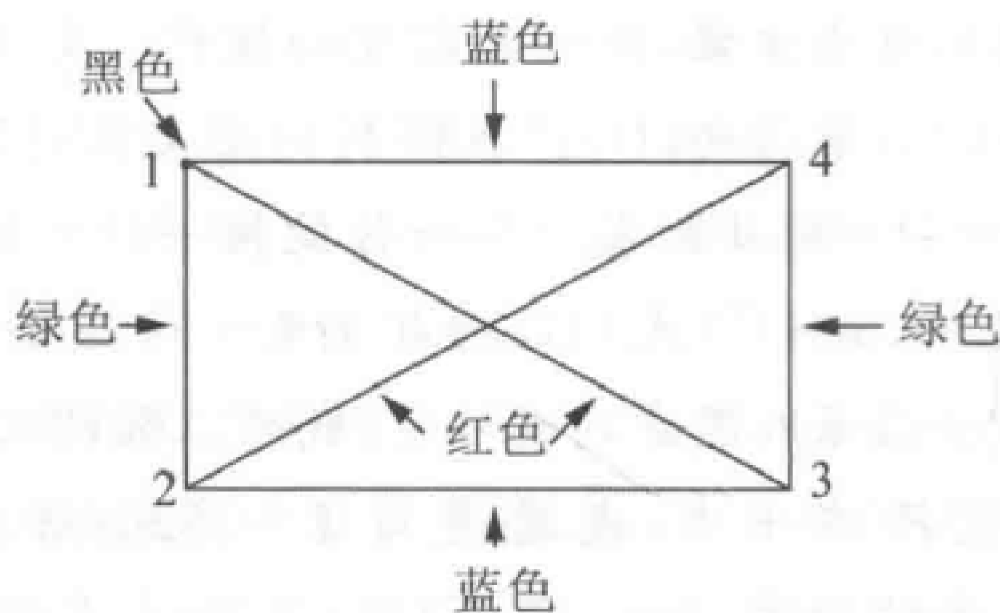


图 2

黑色、蓝色、绿色、红色、蓝色、绿色

(1)当蓝色线路关闭时,如何从 1 到 4;(2)当红色线路关闭时,如何从 1 到 3;(3)当绿色线路关闭时,如何从 1 到 2。此外,总是要求被试寻找另一种解决办法,且经常问及返程线路。最后,让被试找出一条行程,要求 1 既是起点,也是终点。

不管数对的替换组合看起来多么容易,我们注意到,它们给被试带来了困难,这些困难直追先前的任务。把问题(1)至(3)的正确答案汇总之后,我们发现被试的年龄与表现之间存在函数关系,其中被试的表现可分为一种成功(一种正确解决方案)和两种成功[两种正确解决方案,第二种是第一种的互反形式,比如(1,3)+(3,4)和(1,2)+(2,4),或者红+绿和绿+红]。下面的表格按照问题数量的比例,列出了正确答案的百分比:①

年龄	4—5 岁	6 岁	7 岁	8 岁
一种解决方案	52	78	96	100
两种解决方案	16	64	66	86

于是我们看到,从 6 岁开始,四分之三的被试至少能找到两种可能的解决方案中的一种;而从 8 岁开始,被试能够成功地找到两种解决方案,因为他们能理解问题的假设条件,不需要通过遮盖图片(类似于实验Ⅰ中的技术Ⅲ)来使用形式化演绎:被试所取得的成功处于相同的水平,因为他们的思维过程是相同的。我们还发现,成功并不会立即出现;在 4—5 岁的被试身上,我们观察到和先前一样的不完全解决方案:84%的问题没找到第二种解决方案,48%的问题仅建构出了数对而已,还缺乏数对之间的充分组合。

被试未能建立组合,这种现象值得我们探究,它与实验Ⅰ中的数对协调失败一致。关于这一现象,我们区分出五类错误。第一类错误仅出现在 4 岁的被试和一两个 5 岁零几个月的被试身上。他们以 1 为起点,仅能指出一种数对(图 3,Ⅰ)。第二类错误出现在 4—8 岁的被试身上,他们只能指出一种路线,而且主要关注终点,未能考虑到起点(图 3,Ⅱ)。第三类错误(直到 6 岁)的表现是,被试能找到两种数对或两条路径,它们拥有共同的起点但没有共同的终点(图 3,Ⅲ)。在第四类错误中,两条路径的起点不

① 12 个 4—5 岁的儿童回答了 36 个问题;14 个 6 岁的儿童回答了 42 个问题;9 个 7 岁的儿童回答了 27 个问题;10 个 8 岁的儿童回答了 30 个问题。这些被试与§1 中的被试不是同一批。

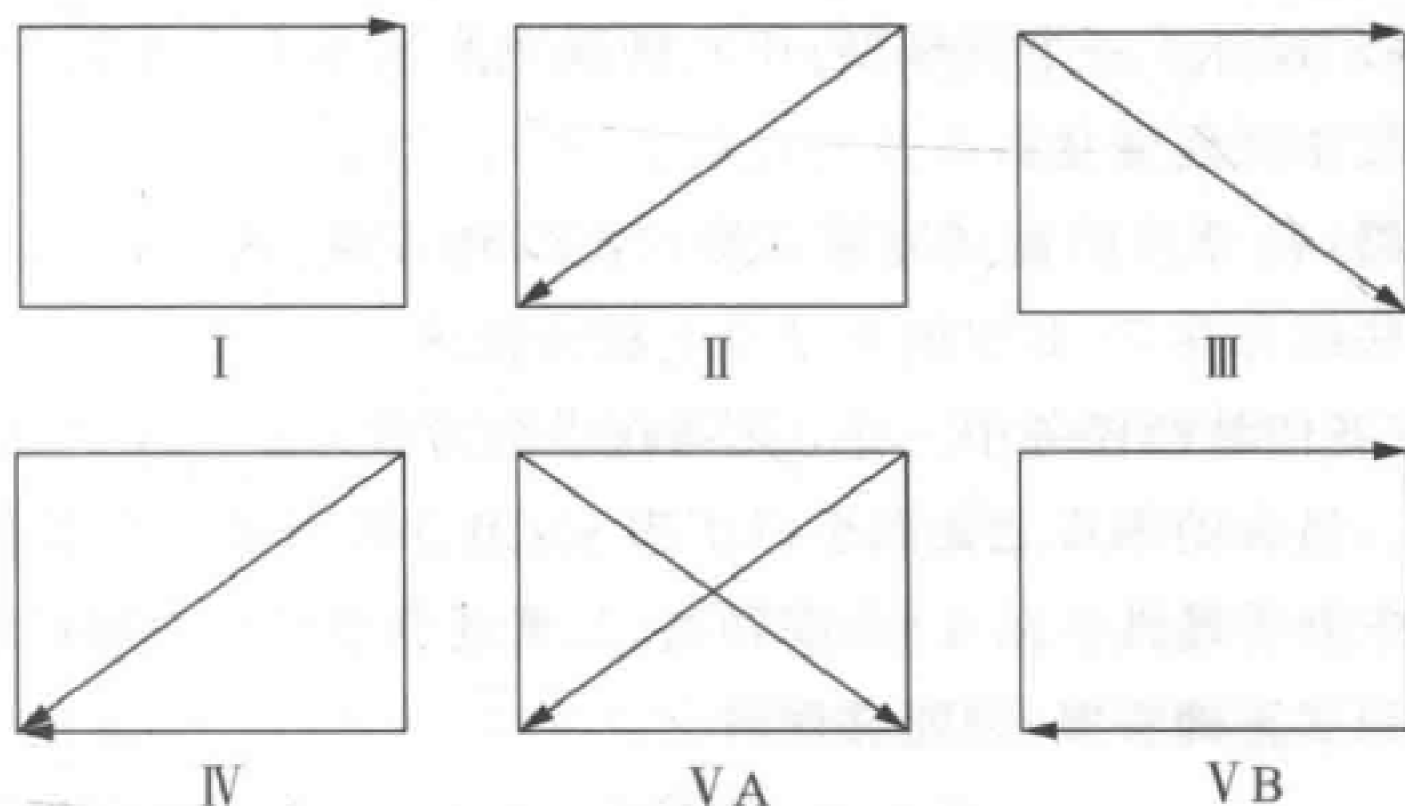


图 3

同，但都汇聚到主试指定的终点，这说明被试尚未获得协调（年龄 4－6 岁：图 3，Ⅳ）。最后一种，第五类错误（4－8 岁）最常与类型Ⅱ连在一起，它也是最有趣的：被试找到了两条互不关联的路径，其中一条路径的起点是 1，而另一条的终点符合任务的要求（图 3，ⅤA 和ⅤB 中的点 2）。但是要记住，通常情况下，在某个特定的被试身上，这些错误往往是混杂的。除了两个 4 岁的被试外，所有被试都至少提供了一种正确答案：

> Ala（4 岁 6 个月） 他很快理解了实验指令，马上建构出线路（1，2），（2，4）和（4，3）等等。另一方面，当他必须借助弯路来组合一条线路时，他给出的方案既有正确的内容，也有Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ和Ⅴ类错误，且正确答案只涉及两种可能的解决方案中的一种。
>
> 比如，为了从 1 到 4，不借助蓝线，他找到了（1，2）＋（2，4），这是正确的。但是，为了从 1 到 2，不借助绿线，他只找到了（1，3），而没有加上（3，2），这属于Ⅰ类错误。为了从 1 到 3，不借助红线，他的解决方案是（2，3），而没有加上（1，2），这属于Ⅱ类错误。等等。
>
> Bur（5 岁 6 个月） 她也做出了正确的、自发性的组合，然而，当轮到她回答问题时，她三次犯下Ⅱ类错误：为了从 1 到 2，不使用绿线，她给出的例子是红线（4，2）：“你是从这里（1）出发的吗？——不是。——那你能做到吗？——我做不到。”——主试向她演示操作方法，但她在其他例子中继续做出相同的反应。最后，她在结束时又犯了Ⅴ类错误：为了再次从 1 到 2，她给出了（1，3）和（4，2），未能将这两条路线协调起来。另一方面，她正确回答了其中一个问题，甚至发现了她的解决方案的反向形式。

我们再次注意到，这些组合失败通过三种不同的方式得以控制。首先，当要求儿童寻找返程路线时，他所犯的错误与他在原始线路中是一样的。对某个特定的被试而言，他在正反路线中的错误属于同一类型。其次，如果我们不确定被试是否完全理解实验指令，那就在火车上添加一名乘客。发生换乘时，该乘客从一列火车转移到另一列火车。被试在这种事例中所犯的错误，与先前属于相同类型。最后，为了查明被试是否受

到颜色的误导，我们设计了一个新模型，用六种颜色来表示六条不同的线路，但这并没有使被试的反应发生任何变化。

对于往返线路，4—6 岁的被试通常立即给出反转方案[比如(1,2)和(2,1)]，还包括一些组合。这些组合在 7—8 岁的儿童身上极为普遍。

总之，就像在花的替换任务中一样，儿童在学会对数对进行组合之前，时常止步于相互独立的数对。组合的困难之处源于以下事实：组合涉及位于工具传递性和逻辑传递性之间的一种中间传递性。从 4—5 岁开始，儿童逐渐能给出正确的解决方案。他们一旦通过试错找到了正确答案，就能够理解它。

§3 结论："范畴"的结构

根据这个假设——函数表达了动作格式的内在联系——函数结构必然出现在运算结构之前。这是因为，运算来自于最一般性的协调，被试在形成运算之前，已经在身体上获得了动作的协调。上面的两个实验表明，"数对"形成得非常早，相同的组合也很早就出现（成功并不普遍，但在 4—5 岁的被试中能达到 50％）。花儿实验涉及简单的交换，代表了易于理解的日常行为。在第二个实验中，系统可以具有"位移群"的运算形式。然而，我们必须指出，该系统最早出现在感知运动阶段(12 至 18 个月)[1]，它通过动作的逐步协调，以具体的经验形式出现。后来，被试直到 7—8 岁才通过演绎运算将它建立起来。

因此我们假设，确实存在前运算函数结构，我们必须找到它们的模型。之前，数学家们分离出群、网络等的主要结构，它们不仅非常优美，其内部组合也表现出丰富性和高度的连贯性。后来，数学家们开始探索更基础也更具一般性的系统。函数是"应用"，是多态射的来源。基于这个观点，数学家们试图消除 S. 巴贝尔所谓的"数学家的"运算和"数学"运算之间的差别。而在 S. 巴贝尔看来，这两种运算完全相反。这相当于在强调动作的作用，无论什么情况下，被试所执行的动作也许具有局限性，但也是有效的。所以，数学家们已经能分离出系统，这些系统极富创造性，但并不是我们此处所关心的内容。我们感兴趣的是，从发生的角度来看，其中一部分系统在本质上讲非常基础，它们很可能兼有技术意义和琐碎的意义，因而对智慧心理学、发生认识论以及数学有用。

这就是麦克莱恩等人提出的"范畴"概念，J. B. 格里兹将在本书第十四章中对之进行评论。在最一般的意义上，范畴是指一组对象，其中包含有连接其属性的函数（正如格里兹所强调的，这更强调后者，而不是对象，因此允许在外延和内涵之间有一个中间位置，从发生的观点来看，该位置非常有用）。范畴不同于运算系统，因为其中的组

---

① 皮亚杰：《儿童"现实"的建构》，Basic Books，New York，1954。

合——在任何可能的情况下都具有关联性——从未被定义，而这并不适用于封闭的外延运算结构。（但是请注意，鉴于“群集”在这方面的本质特征，除非按照“连续”的方式，即一步一步的方式，否则是不可能形成组合的。）此外，由于函数具有指向性，因此存在两个中性元素，一个在左侧，一个在右侧。

格里兹所谓的“范畴”形式化表明，范畴不仅包含两个数对的组合，还包括数对(a,b)本身（根据前面的结果这是必不可少的），因为它包括函数(a,a)，(a,b)，(b,a)和(b,b)。如果是这样，那我们可以设想，逐步扩大这些局部系统。这些局部系统刚开始受到各种可能动作的特征的限制，但通过协调的相互作用，逐步从函数走向运算，一个一个地增加，直到建立起一个完整而可逆（可逆性尤其重要）的系统。

最后，使用“构成性函数”一词有一些实际的好处。这不仅因为它保留了函数与运算之间的连续性，且无需将后者还原为前者，还因为它使对身体动作做函数分析成为可能，而函数的不可逆性使其不能被还原为运算。通过完成外部函数连接，直至源自系统之系统的因果解释得以出现，将运算归结于对象的过程才算完结。

第二章　从构成性函数到等价类[①]

当儿童在构成类之前，仅根据相似性和差异性（即一个客观平衡的系统）来建立分类时，我们观察到一个初始阶段。在该阶段，只存在一些"图形集合"[②]，适用于以下原则：同一个类的元素不仅在空间上进行排列，赋予图形集合一种整体的形状（列，矩形，等等），而且（至少在更简单的形式的情况下）还使得一个元素通过各种"适用性"（"惯例"）和另一个元素相连，而其中的适用性与相似性并无关联。比如，为了搭建房子和屋顶，需将三角形放在正方形上面，还有钉子和榔头，冷杉和小棚屋（而不是另一棵冷杉）等等。我们也知道，儿童早期所下的定义，并不是基于"某种特定的差异"（最后阶段），而是基于"用途"，证据是儿童使用了（不论何种语言）"用来"这一短语：山是"用来爬的"，蜗牛是"用来压碎的"，等等。因此很明显，运算分类基于外延中的加法类包含和内涵中的不同顺序的客观平衡，但在运算分类之前，存在一种基于动作之间的关系的分类模式，它具有两方面的功能：一方面是动作格式的应用，另一方面则表达了依存关系。

所以，为了研究构成性函数，我们必须弄清楚这些原始"应用"的方向，尤其应该研究被试是如何从功能相连[以"适用性"或具体的依存关系（比如空间关系、因果关系、目的关系等）为基础]过渡到等价类（以客观相似性为基础）的。因此，我们必须设计一种情境。在该情境中，每一个待分类的元素反过来被视为一个动作工具，根据这些动作的格式，可对这些元素进行分类；元素也可被视为拥有不同属性的客体，根据它们的质性特征和量化特征，可对它们进行分类。对上述这些动作和属性而言，最重要的是它们具有相同的本质（即都具有空间性），这使得在动作的中心化和客体的去中心化之间，存在充足的连续进步。同时，这也使我们有机会理解，初始的构成性函数是如何通过具体的依存关系过渡到由客观的等价类所构成的函数的。提醒一下，"构成性函数"一词是指处于前运算水平的动作格式中所固有的联系或者依存关系。构成性函数代表了起始点，它既是被试正确运算（会导致构成化函数，在这种特殊情况下，这将导致等价类包含的建构）的起点，也是因果系统的起点。在因果系统的某个水平，因果性由可归结为客体的运算所组成（它不会进入当前的情境）。

在这个实验中，要求儿童用可移动的、形状各异的红色剪贴画来遮住正方形底卡的

---

① 与E.施密德-克兹科斯合作。

② 参见英海尔德和皮亚杰：《儿童早期逻辑的发展》，Routledge & Kegan Paul，London，1964。

白色部分。尽管这些小剪贴画的形状各不相同,但针对某个特定的底卡,都有少量几张剪贴画可以遮住它。于是,我们可以根据动作的“适用性”或者根据客体自身的属性(相似性和差异性)来考察剪贴画被儿童分析到了何种程度。由于这些属性已经干预到动作中(“适用性”要依靠它们)——尽管更加宽松(需要重申,因为少量几个可移动的剪贴画可以满足同样条件的“适用性”)——所以我们将在每个水平上找到等价类,虽然它们在形式上有很大的区别。在以动作为主的水平,等价只可能来自某个具体动作内的替换,而在以客体为主的水平,等价则基于客体之间的相似性和差异性。从那时起,底卡的“适用性”作为一种通用框架开始介入,不再是比相似性本身更重要的具体特征。正如我们所看到的,这一实验情境足以让我们实现探讨上述问题的目的,即去研究从构成性函数和源自动作的依存关系或“适用性”过渡到客观等价类的具体条件。

§1 程序和一般结果

实验材料首先包括4张固定的底卡,我们称之为A,B,C和D(见图4)。这些卡片的上半部分是红色的,而下半部分是白色的。实验任务是用可移动的红色剪贴画来遮住底卡的白色部分,使每张底卡完全变成红色。根据红色剪贴画所对应的底卡的适用性,我们将这些可移动的红色卡片标记为A_1,A_2,A_3,B_1,B_2等。图5展示了与底卡C相对应的剪贴画C_1,C_2和C_3(在12张剪贴画中,有10张完全不同,还有2张则与10张中的2张是一样的);所有的剪贴画都以塑料正方形为底压制而成,这使被试更容易将它们应用到正方形底卡上。还有一些可移动的白色剪贴画(也是压制而成,但特别之处是它们的各个部分并非总是连着的),我们称之为A_1'和A_2'等,它们代表了A_1,A_2等的互补形状。如果把其中一张可移动的白色剪贴画,比如C_1'(见图6),调整和叠放到其互补卡片C_1上,我们就会得到一个红色正方

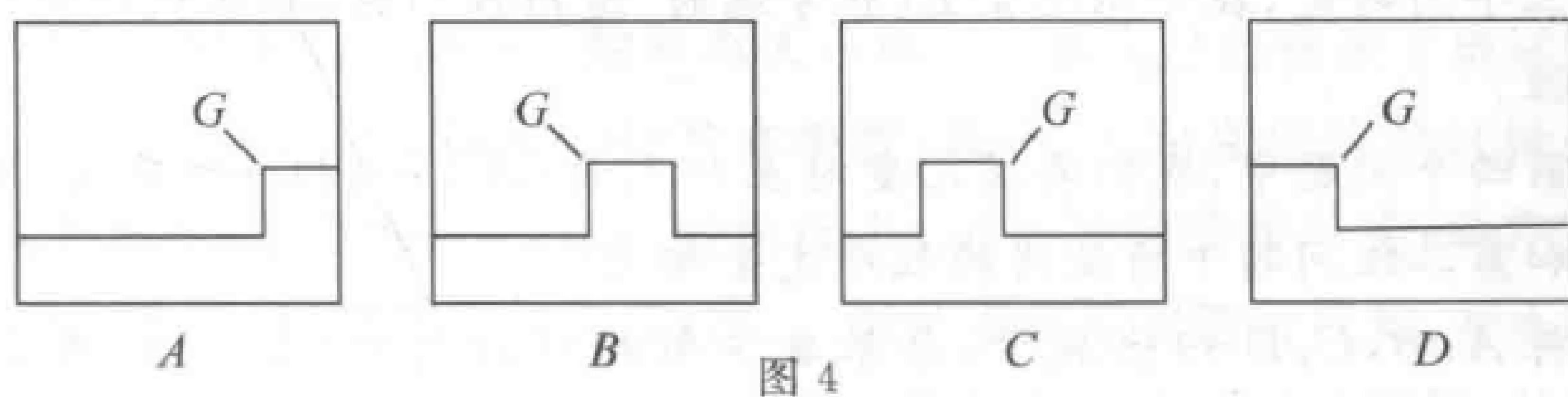


图4

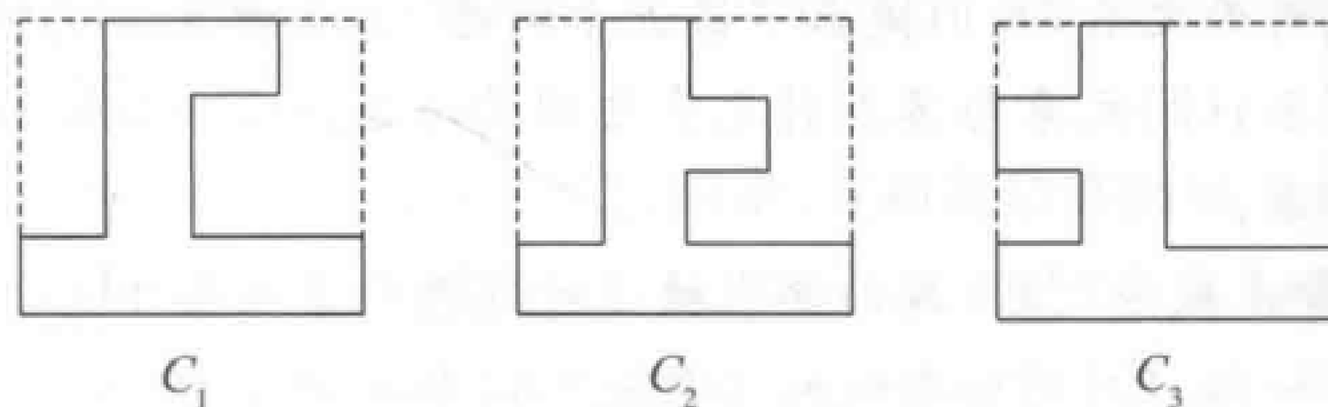


图5

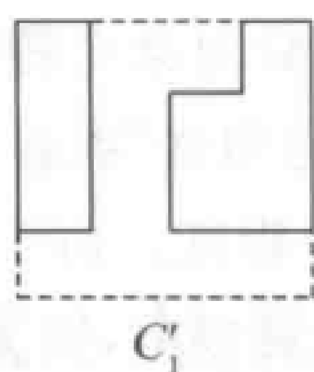


图 6

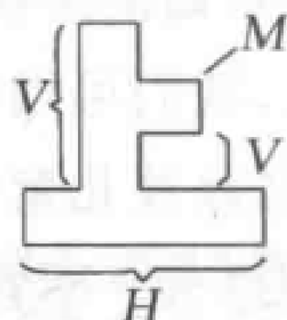


图 7

形，若不做任何叠放，则是一个白色正方形。

需要进一步说明，每张可移动的红色剪贴画，如 A_1，A_2 等，只适用于 A，B，C，D 这 4 张底卡中的一张（专属的“适用性”）。此外，我们还有两张红色剪贴画 E_1 和 E_2，它们能遮住不止一张底卡的白色部分，即 E_1 可以遮住底卡 A 和 C，E_2 可以遮住底卡 B 和 D（非专属的“适用性”）。

最后必须指出，为了分析剪贴画的各个局部，我们将使用图 7 中所示的符号：M 代表位置可变的小片段，H 代表所有图像都具有的水平大片段，V 代表垂直大片段，v 代表介于 H 和 M 之间的那一小段 V。同样地，在底卡 A，B，C，D（图 4）中，我们把位置可变的白色小正方形称为 G，它与红色剪贴画中的 V 相对应，决定了被试应该选择哪一张红色卡片。

在实验过程中，先呈现底卡 A，B，C，D 和 12 个可移动的元素 A_1'，A_2'，…，D_3'（不包括 E_s'），将它们混在一起，散放在桌上。之后，要求儿童探索每个元素与其底卡之间的“适用性”，然后（通过预期，如果他不能，则通过实际尝试）说出每个元素是否“适用于”两张底卡（专属的“适用性”）。

然后我们提出第二组问题：(1)请指出某个底卡的各元素之间的相似性和差异性：如 A_1 与 A_2 和 A_3 等。(2)请指出不同底卡（A_1 与 B_3 等）的元素之间的相似性和差异性。(3)请说明这些元素的某些特征是否“比其他特征更重要”：比如 M 或 V 与 H 相比，等等。(4)请思考两个元素：(a)是否相同（B 中有一些）；(b)在形状上是否非常接近；(c)在“适用性”上是否等价。

第三个问题是，在介绍元素 E（非专属的“适用性”）时，要求被试发现元素 E 的固有特性。

在第四个问题中，我们要求儿童对互补元素（A_1'，…，D_3'）做反应，实验程序与第一个和第二组问题中所使用的程序完全相同。

在将 A，B，C，D 四张底卡，每张底卡所对应的元素（A_{1-3} 等）及其互补元素（A_{1-3}' 等）放在对面之后，我们提出了第五个问题，主要涉及以下关系：(a)底卡与其元素之间的关系；(b)元素与其互补元素之间的关系；(c)底卡与其红色元素及互补元素之间的关系。

最后，在拿走底卡之后，我们要求被试对这些元素做如下分类：“把所有非常相配的元素放到一起。”对那些未被问过前五个问题的被试，也要求他做同样的分类。

我们总共测试了 50 名被试①:11 名 5—7 岁的儿童,16 名 8 岁儿童,14 名 9—10 岁儿童,14 名 11—13 岁儿童,还有 4 名更大的儿童。在儿童身上所观察到的水平,可大致分为以下三个阶段:

在第一个阶段,分类基本取决于被试的动作。只有当客体被同化进同一格式,继而被整合进同一动作时,被试才开始认为客体是等价的:比如,当被试遮住一张底卡时,它们是真实的动作吗? 又比如,当被试认为两个红色元素等价时,它们是否有一部分是虚假的(这可用于说明客体上的去中心化是多么微小)? 因为为了使它们相等,替代其中一个片段就足够了,比如 M。这种对动作的普遍从属性,甚至比知觉上的相似性更加重要。

在第二个阶段,分类主要基于客体在相似性和差异性上的特征:大小、位置、局部之间的距离,以及某些局部相对于其他局部的重要性。这些比较是按元素进行的,并不考虑每张底卡的专属"适用性",而是作为元素之间的一种特征。很明显,到目前为止,还没有类包含,也没有包含子类。

在第三个阶段,被试采用元素与其底卡之间的专属对应关系,来作为一种通用的层级框架,最终将所有客观的相似性和差异性都考虑进来。然而,由于元素 V 相对于 H 的连续位置,子类通过其相对于 V 的分化属性被区分开来。

下面我们按提问类型来讲述,并指出在儿童身上观察到的每一类问题的演变过程。

§2 探索与专属"适用性"

(元素 A_{1-3}, B_{1-3}, …)

看起来,被试在材料上获得成功(即通过遮盖来发现适用性,尤其是适用性的专属特征)对我们这样研究函数并无作用,它仅对智慧心理学有意义。然而,被试在摸索正确反应的过程中所使用的方法——跟所有人一样——其实已经揭示了被试建立的连接类型。一般来说,我们可以识别出两种基本模式:其一,儿童采用连续试错的方式开始探索,他们既无预期,也无概括化,在这种情况下,对于等价类的形成,动作本身即构成了它自己的单一参照点,这其实很正常;其二,被试带着期望进行探索,并不断将他发现的内容概括化。在这两种情况下,被试越来越重视这些元素的具体特征,从而更加重视元素客观的相似性和差异性。

在第一个阶段,被试以试错的方式开始探索,直到他能够把底卡遮住为止,当然,它必须以对应函数或者集合 $X_{1,2,3}$ 在集合 $Y=A,B,C,D$ 上的"应用"函数为前提。但是,只有在遮盖底卡之动作的启发下,被试才发现一个给定的元素 X_n 只能对应一张底卡,

① 原文如此,疑为 59 的笔误。——译者注

而当他只比较图形(期待性地检测)时,他并没有认识到这一点,并且他没有使用他在之后的尝试中已经观察到的方法。换言之,被试仍然既没有意识到 G 在底卡中的普遍作用(图 4),也没有意识到它与元素的 V 片段的对应关系:

Jea(5 岁 6 个月) 从 B_2 开始,最后把它放在 B 上:"它遮住了白色。"接着他用类似的试错来处理 A,然后 C_3,并且说:"可以了。"——你怎么发现的?——我发现小脚(H 的两端)可以放那里。——为什么?——大块遮住白色(V 和 G)。但这一发现在事后并不能指导他给 D 选择一个"适用"的元素,他通过试错再次看到了这一点。而且该发现也无助于他理解底卡和剩余元素之间的一对多的对应关系(满射):"其他元素呢(在给他的 10 个元素中,除了 2 个一模一样的元素外,只剩下 6 个)?——没有更多了。——你觉得每张底卡只有一块吗?——……(他尝试 A_2,并发现了它):这个可以。——(他继续试错,给 C_3 找到了 C。)——你看看还有没有其他的?——我们来看看(尝试 B):不,不行。——为什么?——因为它转过来了。"他指着 M,说它转向左边,但他并不明白 M 其实不重要,只有 V 与 H 的相对位置能起作用。

Cla(5 岁 7 个月) 也是从试错开始,并指出了 C_3 与 C 之间的对应关系,他只发现:"那里(H)是平的,那里(V)有一点上升,"虽然事实上,V 及其与 H 的相对位置是有用的。"如果不能试(从而只能通过简单的知觉检测),你能说出那个(C_2)可以放在哪里吗?——不行(他尝试 B,说):它伸出来更多了(即 V 在左侧太多了)。——那它(C_3)呢,能放到其他地方吗?——可以放在 B 上。——试试看。——不,不行"。

Fra(6 岁 2 个月) 同样从试错开始,他简洁地陈述理由:"我查看那里(他指着 H 中的底),于是我就知道了。"但每当他的预期失败时,他会说:"我必须试试看。"

正如我们所看到的,这些被试依靠动作本身以及动作的结果,只能到达对应或应用的水平。他们既缺乏预期(基于知觉检测),也没有将后续例子概括化,更没有弄明白"适用性"的原因,尽管被试已经通过动作发现了它。另一方面,虽然下一个阶段的被试也缺乏预期,同样不能将后续尝试的结果概括化,但他们能够分离出其经验性成功的部分原因:

Cat(6 岁 2 个月) 在开始时表现出第一阶段的某些反应,但在通过试错取得一些成功之后,她说:"我看看它是不是那样(她指着 H)。——它遮住了白色吗(意在帮助她的暗示性提问)?——不,它最高(V):你必须看看它是否在那里(位置),它是否起作用(底卡上的 G)。"接着,她追溯性地理解了一些原因,但却未能把这个发现应用到后面的例子中:"C_2 能发到其他地方吗?——那里也许可以(她尝试 B)。不,那里不行。"可见,她仍未理解 V 的位置的作用。

Dom(7 岁 9 个月) 没有任何预期,通过试错来探索,但很快发现"要把(C_1)

放在(C),我必须把(V)放在这里(指着G的位置)。——它遮住了什么?——那个(底卡C上的G)。——(C_1)还能放到别的地方吗?——可以,这里(B,但他失败了)。——只能放在(C)上?——是的。——那个呢(B_1)?——它也可以放在(C)上”。

Cru(8岁2个月) 他经过反复的试错之后,发现“大块部分(V)遮住了这个(G)”,但在此之后马上预见到C_2可以放在D上,等等。

Oli(9岁4个月) 他经过试错之后说:“我看看空间,看红色的(V)和(底卡的)白色部分是否在同一个地方。”这似乎表明他已将V的位置应用到G上,但其实只参考了V和G的左右两侧的空白间隔。不过,他确实能够预测B_3适用于C_1,以及C_3适用于B等等,但为了检查自己的预期是否正确,他每次都要尝试一番。

简而言之,被试在第二阶段中的进步,在于能发现V和G之间的对应关系,即V可以遮盖G,且与M和v无关。另一方面,尽管被试能对空白“空间”做全盘考虑(Oli),但他仍未意识到V或G与H、与大正方形边框的相对位置的作用。直到第三个阶段,被试才能发现V和G相对于H的共同位置的充要条件,并立即将其概括化。至于早期阶段的试错行为,随着第三阶段所引发的理解和预期,它要么不复出现,要么缩短,甚至降低到最小值:

Ren(8岁9个月) 经过长时间的试错之后:“有一个柱子(V)!——你发现诀窍了吗?——不,我是后来才发现的。”接下来,他连续在C_1,B_1,D_2,B_3和A_1中获得成功:“每张卡片有几种形状?——三种。”

Cha(8岁10个月) 很少进行试错,然后:“那里(C上的G)它在左边,那里(B)它在右边。那个(用C_3来遮住B)不能遮住白色,它只能遮住一种。”其他反应都是正确的预期和概括化。

Nic(9岁9个月) 少量的试错:“我看到一个垂直的大柱子(V),因为白色的小正方形(G)在那里。由于白色的小正方形(G)从A移动到D,所以大红线(V)只能放在一张卡上。”

Jac(9岁10个月) “左右两边的空间是相同的(在一个元素和它的底卡之间)。小正方形(G)属于另一个地方。”后来,Jac采用跟第二个阶段中Oli相同的方式,发现了“位置”的作用,继而做出正确的预期,甚至能处理多价元素E_1和E_2(与前面的被试一样)。

上述关于第一至第三阶段的事实已经向我们表明,被试是如何从某个特定的动作(动作格式构成了函数)过渡到具体的满射对应的。这里,动作主要是将一个客体(图形$X_{1,2,3}$)“应用”到另一个客体(图形$Y=A,B,C,D$)上。此外,动作还包括模仿客体(从而将其应用于它自身)、发现客体(将其应用于另一个位置上的它自己)、转换客体(根据某种修正或保存的依存关系,将其状态a应用到状态b上),等等。在这种特殊情况下,我们所处理的是将一个平面简单地应用于另一个平面上(条件由颜色来界定)。下面,我

们将说明被试是如何从动作过渡到对应的。

起初，对应与应用动作并无区别，二者都具有整体性（将整体应用于整体）。只有动作的结果，才能（在事后）说明条件是否得到满足。后来，被试继续试错，直至取得成功，但并未对应用的未分化特征作修正。接着，被试通过数对逐步建立起对应。所有的数对都是相似的，因为它们都是相同的动作格式的应用的结果（“将 X 应用于 Y”）。客体只在动作结束时才开始介入，把上述这些对应分为两类：错误对应（在更正之前，暂时存在）和正确对应。反过来，被试解释的理由又只提到这些客体的“不相干”的属性（M，v，等等）。另一方面，在第二个阶段，应用一边保存这些普遍特征，一边通过客体与客体在分化点上的对应变得丰富起来：比如，将 V 应用于 G。因此，我们拥有了半未分化(semi-undifferentiated)和半分化(semi-differentiated)的应用，前者指动作格式的应用，后者指 V 元素和 G 元素的逐项对应。这就是数对（A，A_n）和（B，B_n）（仍然是在事后）的构成过程，但由于缺乏对格式化数对（V，G）的概括化，上述数对仍是并列的双映射，如在 X_n 中当 $n=1$。在第三个阶段中，一种新的分化出现在 V 与 H 的相对位置和 G 与 H 的相对位置之间。这不仅使概括化和预期成为可能，也促成了联合单一对应或者满射：即对 1 个 Y（A，B，C，D）而言，对应于 3 个 X'（$A_{1,2,3,\dots}$）。

§3　等价类的连续形式

函数的发展经历了如下过程：从一个重复 n 次的整体数对，过渡到分化但不协调的数对（第二阶段），再到通过满射而获得协调的数对。而这一发展过程可被理解为三种连续形式的等价类的构成过程。

在第一个阶段，当被试首次尝试用任意 X（A_{1-3}，等等）来遮盖任意 Y（A，B，C，D）时，他是从这个假设开始的：存在一种总体无分化的类，它由应用动作的格式所决定。然而，通过不断试错，他发现存在与 4 个底卡相对应的 4 个类，以致对这些类的唯一合格的定义仍然是对动作（但现在是指一个成功的动作）格式的同化。这种对动作的中心化（与尚未对客体充分地去中心化），以及这些与所有动作（与客观对应相反）有关的“适用性”（见本章的引言），它们最突出的标志就是这一事实：当要求被试回答两个 X' 是否“相似”时（问题Ⅱ：§1），他非常自然地做出了肯定的回答，因为他为了如此作答而必须要做的全部事情，只是对其中一个对象进行修正，而且修正方式不再有任何区别：

Jea（5 岁 6 个月）　已经在 §2 中被引用过，比如，我们提出比较 C_1，C_2 和 C_3，问：“它们有点相似吗？——是的，因为如果它们更长，这些脚（H 的右端，在 C_1 中，由于 M 放在它上面，所以它看起来更长）就是一样的。——但它们的某些部分相似吗（我们枉费心机地让他提到 V）？——如果我们剪掉它们，它们就一样大了。”比较 D_3 和 D_2 时反应也很相似：“我们可以说它们是同一个家庭吗？——是

的，或多或少。——他们是表兄弟吗？——是的。——为什么？——如果我们剪掉它（M的末端），它们就一样了。”

Mar（5岁7个月） 对D_1：“那个（M）太多了，它不应该在那里，”对元素B_{1-3}：“它（V，B_2中的V比B_1和B_3中的更矮）应该更高，它（M）应该更小。——但它们看起来相似吗？——有一点。——为什么？——如果我们把它（M）移到那里（V的顶端），它们就一样了。——这个（A_1，B_1，C_1）呢？——我们必须把它移到这里（右边C_1中的V）。”

Phi（6岁2个月） 在比较B_2和其他B元素时：“是的，它（V）应该上升到顶端。”

Fra（6岁2个月） 已经在§2的第一个阶段中被引用过：“如果我们改变这个正方形（M），那就会成功。”对C_3他说：“如果我们把它（M）转过来，它就跟那个（C_2）一样了。”

我们都很熟悉这个故事：小男孩在看到一只灰色的小猫后，坚持说那是一只棕色的大狗，“因为我可以使它变大，剪掉它的胡须，把它涂成棕色”。我们的被试往往以同样的方式在前进。然而，更严格地来讲，他们的反应让我们想起4—5岁儿童在浮力实验中的反应——抓住一块板子，把它在水下浸一会儿，看它是否会停留在水下，然后以此来验证他们之前的预测①。换言之，既然动作的固有特征就在于修正它们的客体，那么应用动作就能以这种方式被共同构想出来。而且，既然初始的等价类联合了那些与原始底卡“相适合”的元素，但还未考虑客观的相似性和差异性（见本章的引言），那么通过对客体作简单的心理修正，就可以先确保从“适用性”向相似性过渡，而这反过来又使它们的同化成为可能。

在第二个阶段，客观对应的出现引发了对共同性质的搜寻，从而将等价类从一般的动作格式中解放出来，最终有助于在客体之间建立起直接的关系。换句话说，鉴于这个事实——把X元素应用于Y底卡，被试正在开始考虑它们的差异化特征——被试把这个应用推广到某些X元素（而不是其他元素）的可能的联合应用上，从而确定它们的相似性。但是，由于X元素（即$A_{1\cdots3}$，$B_{1\cdots3}$，等等）仍处在操作当中，因而一直和动作很近，而Y'（A，B，C，D）却只构成了应用点，所以我们在第二个阶段仍然没有对Y底卡本身做充分的比较。被试确实注意到这个事实：所有底卡的共同点是它们都有一个G；但他们并没有注意到G元素的位置是不同的。总之，第二阶段的分类反应导致等价类的出现，这些等价类以X'的相似性为基础，与Y底卡的特征无关（也在$A_{1\cdots3}$和$B_{1\cdots3}$等元素之间）。某些X'共同拥有Y底卡中某一张的“适用性”，而每一种“适用性”可以作为某种可能的相似性而介入进来，但只作为诸多因素中的一个：

Dol（7岁4个月） 在他作比较时，首先说：“是的，它是一样的（$B_{1\cdots3}$，等）：到

① 他们还尝试着用手在天平的两臂上施加一个倾斜或水平的方向。

处都有两个大平面(H 和 V)和一个小正方形。"他对 C_2 和 B_1:"它们都有长条和一个正方形(M)。"但后来他却说:"它们是相似的,因为三个都可以放到同一张卡片上。"

Nat(8 岁 3 个月)　(对 B_1 和 C_3)也说:"那个和那个最相似,因为他们的形状,"还对 $D_{1,2,3}$ 说:"它们有点儿相似,因为三个都可以放到同一张卡片上。"

但是,由此建构出来的等价性,只导致了或多或少的并列类,几乎没有层级结构。这是很自然的,因为被试还没有发现 X' 从属于某个特定 Y 底卡的共同特征,即 V 相对于 H 的恒定位置。因此,正如 Dol 和 Nat 所提到的,X 从属于某个特定底卡 Y 的性质,只是亲属关系(kinship)的经验表现。然而,这些被试仍然继续对其中涉及的原则感到困惑,而且只有通过整体的知觉检测和有点模糊的特征,如"相同的形状"或"两个条(V 和 H)和一个正方形(M)",他们才有可能进行控制。不同的底卡(比如 B 和 C)对应于不同的元素,被试在对各个元素作比较时,也可以发现上述这些特征。此时,分类仍然停留在类或集合的并列水平。从客体的角度来看,它类似于从动作角度所建立的最初"合适"数对的并列(参见 § 2 中第一个阶段的对应)。总之,由于缺乏层级类包含,这个阶段只是应用的构成性函数与构成化函数(或运算函数)之间的一个中间步骤。

在第三个阶段,我们到达了层级分类(即对应于底卡 A,B,C,D 的 4 个类),其特点在于元素 G 的位置。这些类可以在由 G 和 V 元素的对应所界定的总类中联合起来,但除了这种情况和多价元素 E 之外,这些类是不相交的。但我们必须清楚地认识到,在这种情况下,$A_{1,2,3}$ 和底卡 A 等之间不再只存在"多对一"的对应,而是对每个 G 还存在"一对多"的对应,其突出特点是 G 相对于几个 V 元素(专门对应于 G)的独特位置。正是由于这种双重可逆的"多对一"和"一对多"运动,元素被包含在 4 个类 A,B,C,D 中,反过来后者又有可能被包含进一个单类(其特征在于掌管 G 和 V 元素的位置的规则)中。然而这并不会回到第一阶段,或者回到从属于动作格式的等价:如果 $A_{1,2,3}$ 在 A 之下被分类,那是源于 V 相对于 H 和 G 不断增大的位移规律,即源于客体本身的属性。被试不仅明确提到了这些位置特征,而且有时为了验证元素的共同特征,被试甚至把它们重叠起来,即把不同元素放在同一张底卡上来作为控制①,或者把一个元素叠放到另一个之上:

Gra(8 岁 9 个月)　联合 $B_{1,2,3}$ 并将它与 $C_{1,2,3}$ 区分开来:"如果它们相似,或者我们必须试试,那我们可以马上看到吗?——我们可以看到。——怎么做?——用(V 的)末端。——那它们呢?——在(C)中它们更近地在一起,在(B)中它们更靠左边。——最重要的是什么?——末端(V)。——那它(M)呢?——它没有什么用处。"

Cor(9 岁 5 个月)　比较了 $B_{1,2,3}$:"它们可以放在一起。——为什么?——它

① 需要指出的是,底卡在比较或分类过程中,一直位于它们的边上。

们有相同的柱子(V)。——你怎么知道?——我们可以把它们放在那儿的顶上(指着底卡 B)。"在建立起四个主要的类之后,Cor 将某些 A 元素、B 元素和 C 元素进行类比,认为从 M 或者 V 的角度来看,它们"也可以放在一起"。至于 E 元素,我们可以把它们"和很多柱子"放在一起。

Dav(10 岁 11 个月) 比较了 $D_{1,2,3}$:"它们在同样的地方都有一个条(V 相对于 H)。——你确定吗?——因为如果把一个放在另一个上面,(V)就在相同的地方。"

通过把单向应用合并到可逆运算,这些阶段展示了从函数格式过渡到运算群集的过程。可逆运算的对应在这两个方向上具有共同单一性:"多对一"(应用)和"一对多"(我们从中获得了外延类的加法包含)。

于是,构成性函数(或者前运算函数)在第二个阶段出现,在第三个阶段更加常见,而构成化函数则是将构成性函数引入双向运算系统的结果。

§4 互 补

关于白色互补元素 X',存在两个问题,即它们与红色元素 X 的关系,以及它们的内部等价关系。

在第一个阶段,被试通过试错成功地填充了 $A_{1,2,3}$ 等的部分表面与 $A'_{1,2,3}$,$B'_{1,2,3}$ 等之间的空隙,但他们既不理解互补的一般关系,也不明白互补的共同属性:

Jea(5 岁 7 个月) 当他问"它们关闭了透明度吗"时,他把任务概括得非常好。然而,一旦他成功地完成了指定的动作,他就发现在某个特定底卡的各个互补之间并没有任何共同点,除非(正如他在§3 中所呈现的反应)在心理层面对形状作修正:"那些(A'元素)之间有没有相似之处?——如果我们稍微改变一下白色元素,它们就一样了。"

Cat(6 岁 2 个月,从第一个阶段开始,并过渡到第二个阶段) 也通过经验尝试成功完成了任务:"我们可以把红色元素放在相同的柱子上吗($C_{1,2,3}$)?——可以。——白色元素呢($C'_{1,2,3}$)?——不行,因为它们看起来一点也不像。"

在第二个阶段,为了把白色互补 X'放在没有红色 X 元素的空间,被试仍需通过试错来进行,因为他还没有(正如我们在§3 中看到的)意识到柱子 V 相对于水平柱 H 的位置。然而,他确实开始理解互补关系,并以此为基础,分离出互补 X'的一个共同元素,即柱子 V'的存在,虽然他还没有考虑到 V'相对于 G(或 H)的位置:

Dol(7 岁 4 个月,已经在§3 中引用过) 在他的所有尝试中都取得了成功:"我们可以把(D'_2)与那些(两个 B_n)放一起吗?——不行,因为在这里(B_n),小末端(M)在同一边,"等。——我们用 $C_{1,2,3}$ 来重新开始。——"红色元素相似吗?——

是的。——白色的(C')呢?——它们不相似(记住,互补包括不连续的元素)。——我们不能把它们放在一起吗?——是的,因为有一个透明的柱子(=部分的红色 V 在元素 $C_{1,2,3}$ 上,但它仍然是空的,覆盖着透明的塑料,把白色的部分从互补 $C'_{1,2,3}$ 中分离开来)。——透明的部分代表了什么?——我们(在 $C_{1,2,3}$ 上)有红色。——这就是它们相似的原因吗?——是的,它们都有两个透明柱子(V 和 H)。——其他的呢?——还有一个大末端和一个小末端($C_{1,2,3}$ 的白色表面)。"

Syl(7 岁 10 个月) 同样取得了成功,并说明她是如何做到的:"我看看在(B_3)上是否有一个大洞,"或"它(C'_2 上的白色表面)必须是透明的。"至于相似之处,它们可以被放在一起,"因为它们都有一个柱子(她指出 V 是透明的)。——我们能把红色和白色放在一起吗?——可以"。

有趣的是,儿童要到 7—8 岁左右才开始理解这种互补关系,也是在这个水平,互补介入到由离散(即在空间上不连续)元素组成的类群集中。但是,只有在第三阶段的被试(即能够建构出层级包含的被试)身上,互补才形成了一个明确的子类。该子类与红色元素的子类($A_{1,2,3}$ 对 A',等)具有对应的共同属性,它们都可归入由共同底卡(A,B,C 或 D)所界定的一般类。下面是一些例子:

Chr(8 岁 10 个月) 发现互补"具有相同类型的设计,因为红色元素(X)与白色元素(X')是一致的"。由此取得的分类包括每个底卡的子类 X 和 X'。

Cor(9 岁 5 个月,在上文 §3 中已经引用过) "它们(在知觉上)看起来不一样,但当我们把它们放在一起时,它们看起来确实很像。——为什么?——如果这些孔都不存在,那它们就不会放在一起。——只有当我们做什么时,它们才能放在一起?我不太懂。——只有当我们把红色元素和白色元素放在一起时。红色元素与白色元素并不相同,但有了白色元素,你会得到卡片(=完全遮住底卡)。"

Rin(9 岁 11 个月) "它们必须看起来很像,因为那些(C_2 和 C_3)很像。——是什么让它们很像呢?——空白(他指着 C_{2-3} 中的空白处和 C'_{2-3} 中的白色部分)。"

Nov(10 岁 7 个月) 它们是相似的"因为白色元素框住(=关闭)了透明的红色元素。如果我们把一个红色元素和一个白色元素放在一起,它们会形成一个群。红色元素中未被遮住的表面与白色元素的表面相对应"。

如上所述,被试对互补的反应证实了我们在被试对红色元素(X)作分类时所观察到的现象。至于被试所获得的分类(将子类及其互补包含进整个类)和函数(通过应用而构成)之间的关系,我们必须指出,当 X 元素由它们能否直接应用于 Y 底卡来决定时,互补 X' 并没有在 Y 底卡上,而只在 X' 的空白部分上构成了应用 F'。

因此,下面的相关性和同步性是非常有趣的。当 X 元素在 Y 底卡上的应用 F(通过柱子 V 和底卡中的 G 之间单一对应,因为 V 和 G 都与 H 的位置相关)变得概括化和可预期时,互补 X' 的子类最终与 X 元素一起归入一般类(被试 Nov 在整体集合的意义上称之为"群")。换句话说,分类的运算群集产生于两个函数的组合,它们分别是 X 元

素在 Y' 元素上的应用 F 和 X 元素在 X' 元素的空白处上的应用 F'，这最终引发了 $X+X'$ 元素在 Y 底卡上的总应用。

§5 结　论

我们关注的问题是，被试是如何从应用的简单构成性函数过渡到等价类的，从而能在层级包含（分类的群集）中做运算处理。我们所观察到的这些阶段，给上述这一过渡过程提供了全部的渐进解释。

初始阶段是函数 $y=f(x)$，即 x 对 y 的简单应用。从被试当时的角度来看，连接 y 和 x 的函数依存关系可以表达为"适用性"：如锤子和钉子等。在本实验中，适用性即用红色元素（$X=A_{1,2,3}$；$B_{1,2,3}$；等）遮住底卡 $Y=A,B,C,D$。在这些例子中，几个不同的 X 元素可以满足一个给定的动作：斧头可以取代锤子，或者在本实验中，A_2 可以取代 A_1。假定有这样一个动作 F[函数 f 在 $y=f(x)$ 中的一个具体例子]，那么 x' 的等价只涉及被试在完成特定动作 F 时对 x' 的使用（参见导言中引用的"根据用途来定义"）。所以我们可以看到，等价仍然仅由动作来决定（可将之理解为，客体 x 是它的工具）。因此，在心理学意义上，等价主要在于对动作格式 F（函数的来源）的同化。

第二个阶段涉及从基于动作 F 的特征的等价（"相同的适用性"）向基于客体的属性的等价（x' 之间的相似性）的过渡。如果最初的等级是 x' 对格式 F 的同化，那么这一过渡过程就很容易在心理学意义上予以解释。其实，所有的同化都是重复、概括化和识别，以致当被试不再偶然地，而是系统性地获得 x 对 F 的同化时，问题变成了识别其中的一个 x'，以及引导被试去分离 x' 的共同特征。但是，被试对于 x' 的同化的系统性识别，并不是马上就建立完毕。在变得概括化和预期性之前，同化仍然以动作的成功或失败为基础，并以追溯的方式发展。因此，在第二个阶段，被试分离出一个单一的共同特征（元素 V 的存在），而不是作为一个整体的特征（元素 V 相对于 H 的位置，尤其是相对于 G 的位置）。所以，这个水平对应于由种类（kind）单独来定义的水平，并没有具体的区别（妈妈"是女人"）。种类并不是通过层级包含来细分的，而是通过元素之间的直接的个体联合，由小等价类的简单构成来细分的，这即是数学家所谓的"划分（partition）"①。因此，在自发分类的层面上，这一水平与非图形集合的水平对应，尚缺乏由一个量化的外延包含所组成的包含（$X<Y$ 如果 $Y=X+X'$）。

从这个中间阶段向分类的运算群集过渡的过程，引发了一个问题。这是因为，只要

---

① 但我们长期以来一直使用这个术语来指定其他的东西：一个连续体的内部划分，从而将客体的各个部分与集合的子类对立起来。因此，我们在此处说"个体的联合"（参见，数学意义上的"划分"），用来区分元素的个体联合与类或子类的联合。

新的运算(比如类的联合)不介入进来,通过简单的“个体联合”(数对的最简形式)所形成的等价类,就不会把它们自己分成整体类和子类。当被试对一个特定的类,比如$A_{1,2,3}$的类和它的互补$A'_{1,2,3}$作比较时,类的联合将强行发生(因而证明它出现在第三阶段),这源自第三阶段的特征类的联合运算:$X+X'=Y$。这个运算尚未蕴涵在类型“多对一”的单向应用(在这个水平之前就已经存在)中,它的源头是什么呢?第三阶段的典型发现是,X'中的元素V相对于Y底卡中的G的不同位置之间存在区别,这导致几个X'对应于一个Y,从而允许将Y划分为四个不同的应用项目。但是,这对于从这些应用中得出的类包含系统来说是不够的,虽然正如格里兹所言,应用定义了域(X)上的商数集和范围上的子集。实际上,为了从这些应用过渡到分类或者类的群集(与各种不同的包含一致),仅在“多对一”的对应中把X'应用于Y'是不够的;还需要运用逆向过程,构成“一对多”的对应(比如,把属细分为种的原则)。在第三个阶段,正是这一原则,明确地允许被试从A,B,C,D四种形式(其特征在于元素G的位置)中的每一种形式开始,使之对应于A'_n,B'_n等,并根据它们的元素V的位置,把它们联合成子类。但是,这种“一对多”的对应就不再是应用了!相反,从运算上讲,它是“多对一”应用的互反,它们二者一起描述了分类群集所基于的联合单一对应的一般运算。简而言之,从构成性函数过渡到运算的过程,使单向应用变得完整,即把单向应用引入到一个可逆系统,而这种可逆性正是包含的来源。事实上,当我们从应用过渡到商数集和子集集合时,我们暗中参考了这一运算,因为两者基本上都暗含着整体与其子类的关系,亦即一对多的对应关系。

第三章　从规律到比例[1]

如果函数表达了动作格式中的固有联系，从而构成了运算和因果关系的共同起源，那就应该可以从应用的基本函数出发，设想出两种模式的构成函数。这两种组合函数截然不同，尽管它们天然地包含有大量的相互关系。一方面，被试可以组合客体之间的函数依存关系，继而将自己引向物理决定(physical determination)的综合系统，从而确保对这些系统的因果解释。另一方面，被试通过协调自己的动作，也可以达到运算组合。而这些运算组合的内在固有特征，恰恰表现为动作的最普遍的协调。然而，在达到这些主要的运算结构(它们既是封闭的[2]，也是可逆的)之前，被试可以而且必须完成各种不太普遍的协调，但协调的组合仍然是可变的和开放的，尚不能产生包含有各种规律的综合系统。

动作的部分协调，其构成是多样化的和不明确的，但它们具有相同的标志：未封闭。动作的部分协调可以用"组合器"(适用于组合逻辑，此处的"组合"并不是指 n 与 n 的组合等)来表示：比如，识别、重复、替换、联结等的组合器。鉴于上述原因，这样的清单是没有限制(尽头)的。因此，我们假设，由于这些运算器，被试在运算水平之前，能够通过协调动作来构成和组合函数。然后，这些运算器产生了某些函数规律，而这些函数规律反过来又能作为运算结构的起始点。在下文中，我们将把这些组合器称为协调器(coordinators)，因为它们确实在可观察到的行为水平上起到了心理作用，而且逻辑"组合器"往往需要在形式化水平上个别处理。

由于函数格式之间的协调，规律可能表现为以下形式：如果 $y=f(x)$ 和 $y'=g(x')$，g 和 f 之间存在某种规则关系(识别 $g=f$ 只是其中的一个特例)，那么，不仅 x 和 y、x' 和 y' 之间存在某种关系，而且还存在着关系之关系，或者说组合函数，比如"y' 之于 x'，相当于 y 之于 x"。这些关系之关系，被心理学家斯皮尔曼称之为"相关"(例如：乌鸦的喙相当于狐狸的嘴)，但它们仍然不是比例关系(甚至还离得很远)，因为矢量积之间并不等价。不过，我们可以把它们视为"前比例(preproportional)"。我们的第二个假设是，组合器(后来即格式的协调)确保会产生函数组合，而源自函数组合的这些前比例关系，迟早会产生一种运算处理。该运算处理在其最规律的形式上，将会带来严

---

① 与 F. 奥尔西尼(§1)，M. 梅兰-巴克斯(§2)和 H. 辛克莱(§3)合作完成。

② 例如，从"群"的意义上来讲，其内部组合被封闭在群内。

格意义上的比例概念。格里兹曾经表明，比例这一概念在历史上总是经常与构成化函数的精细化阐述紧密相连。(这是非常真实的，当我们平时说一种可重复的关系“在数学上很确定”时，我们十有八九是在说比例关系。)

本章分为三个部分。第一个实验将考察自发动作的规律，即要求儿童把两种颜色的球排成一列，但不允许他们查看已经建构的部分(每放进一个球，先前的孔里的东西就被隐藏起来)。在这个特别的任务中，可以观察到非常有趣的规律，因为规律构成了其自身，并通过协调器从一个得到另一个。此时的协调器虽然还未达到运算水平(我们称之为可逆结构)，但是它们变得越来越复杂，最终导致诸如 abb，abb 等序列的出现。第二个实验将从序列 $1a2b$ 开始，也排成一排，但重点是孔，而不是客体。研究者向被试呈现一系列的客体 $a,b,c,d,\cdots$ 和它们的对应物 $a',b',c',\cdots$(两者在所有方面都很像)(序列不再是自发的)，元素 $a,b,c,\cdots$ 将被分别放进一个孔里，$a',b',c',\cdots$ 则被分别放进其他的孔里。于是，被试的任务就是通过查看第 n 个客体所放置的位置(前面的孔是空的)，来预测第 n' 个客体的位置。因此，我们将会看到，最初是简单序数($n'=n+1$)、后来是超序数($n'=kn$，其中 $1<k<2n$)的对应是如何产生比例的。但是，由于这个游戏的规则比较随意，所以将会有第三个实验。在这个实验中，主试向被试呈现三条鱼(直径相等但长度不同的鳗鱼)，被试必须以鱼的尺寸为函数，来决定该喂多少鱼食(厚度相同但数量不同的食丸，或不同长度的饼干)，从而再次引发比例问题。

§1 第一个实验：自发的规律

实验装置由一个 30cm×3cm 的长盒子组成。将长盒子水平放置，并划分为 24 个连续的隔间，即 24 个“孔”。儿童可以从一个装有 25 个白球和 25 个红球的容器中自由选择，但必须向每个孔里成功地放进一个球。儿童每填满一个孔，主试就拉动一个滑动的盖子，将被试已经填满的隔间盖上，从而将小球隐藏起来。一旦被试将这个盒子完全填满，主试就向他们呈现第二个类似的盒子，要求被试“把同样的事情再做一次”。接下来，向被试提出言语表达的任务：“你做了什么？解释一下你是怎么做到的。”然后，多次要求儿童做“一些别的事情，不同的事情”，等等。最后，还有一个涉及可能的位置转换的测试，例如，用颜色相同但形状不同的两种卡片(25 个正方形，25 个三角形)来替换红球和白球，通过模拟两个尺寸的黏土球(25 个大的和 25 个小的)等①。

① 若想了解我们所使用的技术细节和总结果，可参考 F. 奥尔西尼的《儿童的规则和关系系统》，《心理学手册》(Soc. de Psych. du Sud-Est)，Ⅷ (1965)，第 143－155 页。也可参考 F. 奥尔西尼的《关于一些‘自然’规则的研究》，《心理学和发生认识论，皮亚杰专题》，Dunod，1966，第 149－158 页。

一、F. 奥尔西尼获得的第一个结果是，被试自发建构的序列表现出非常明显的规律：对于 30 名 3—8 岁的被试所建构的 8 个原始序列（因此不包括位置转换），我们在 3—4 岁儿童身上观察到 58%的规律，在 5—7 岁儿童和 8 岁儿童身上则观察到分别为 85%和 90%。

这些规律基本上表现为以下三种类型：(α)首先是统一性，即把同一类物体（比如所有的白球等）排成序列。这种类型在 3—4 岁的儿童身上非常主流，在 5—8 岁儿童中，也有三分之一的人偶尔表现为这一类型。(β)第二类是简单的或同质的交替（1 个红球、1 个白球，或者 2 个红球、2 个白球，等等）。3 岁的被试中已经有三分之一的人表现出这一规律，随着年龄的增长，这种规律越来越明显，在 30 名 5—8 岁的被试中，约有 28—39 人表现出这一规律。(γ)第三类是异质的交替（1 个红球、2 个白球，或者反过来，2 个红球、3 个白球，等等）。在 30 名 3—4 岁的被试中，仅有 1—2 人表现出这种规律；在 30 名 5—7 岁的被试中，约有 10—13 人表现出这种规律；而在 8 岁的被试中，有 23 人表现出这一规律。

相对而言，这些规律的复制和言语表达是不错的。对于超过 70%的 3 岁被试、50%的 4 岁被试和 14%的 9 岁被试，言语表达主要包括简单的列举，在此之后，才慢慢被建立规律所取代。最后，关于位置转换，30 名 3—4 岁的被试中只有 2—7 人成功地做到了，但在 30 名 5—8 岁的被试中，约有 19—29 人获得了成功。

现在我们试着区分出动作的类型，它们会影响这些规律，并将其转化为协调器或基本格式的语言，而协调器又能够单独或通过渐进组合的方式来构成函数。为了达到这个目的，让我们回顾一下，这些规律是以相当稳定的形成顺序相互跟随的（F. 奥尔西尼发现，这一现象即使在智力发育迟缓的儿童身上也真实存在，这里当然考虑了他们的发展水平），而且类型(γ)（异质交替）只有在简单交替(β)家族（2—2，3—3，4—4 等，一般按这种顺序）形成之后才开始出现，这似乎意味着，存在一个将一种规律和下一种规律连接起来的组合过程：

(1) 被试最初的反应是随机地排列整齐，尽管前面的规律自然是由局部规律所构成（分析这些规律是非常有趣的，因为心理学是否涉及纯偶然性仍是一个悬而未决的问题）。我们将只考察由排列整齐所预先假定的基础协调器，我们称之为 W ＝重复。它只包括对动作的重复，在本实验中，即不停地放进一个球。

(2) 现在，如果重复 W 表示动作格式的复制同化，那就存在第二种基础协调器，它表示认知同化，此时主要集中在动作的对象上，即识别＝I。这就是被试识别随机序列的白球 a，并从中获得自应用 $a=a$ 的函数的方式。此外，这个识别器 I 的范围从纯粹识别(I_0)一直到对客体完全等价(I_1)，其中 I_0 表示找到相同客体的动作（单一客体的永久性），而 I_1 则与那些以简单相似性为基础的不同顺序的等价($I_{2\cdots n}$)相等但却不同（一个 a 与另一个 a）。

(3) α 类型的规律（统一性 $aaa\cdots$）并没有预先假定一种新的协调器（它包括“增加

相同的东西”)，因为它已经被设想为 W 和 I(此处是 I_1)之间的协调的结果，即 WI 通过使动作对相同的元素产生影响，来重复该动作。而且，由于这样的重复是连续的，所以我们可以记为：(WI)W。

(4) 接下来，被试在将白球 *aaa*…排列整齐之后，又必须将另一个序列的红球*bbb*…排列整齐。因此，我们引入一种新的协调器①，我们称之为替换＝C。于是，序列*bbb*…对应于 C[(WI)W]。

(5) 接下来就是β类型规律，或者 *abab*…。我们马上就知道，它包括 *aaa*…和*bbb*…的结合，而且是第一个序列的一个元素与第二个序列的一个元素之间的交替组合。因此，这是一个识别 *a* 或 I 的问题，随后用 *b* 替换 *a*，或者 CI，而反过来重复一定的次数之后，得出[I(CI)W]W，等等。

(6) 从那开始，被试继续表现出诸如 *aabbaabb*…或 *aaabbb*…等类型的规律。这与重复 *a* 因而 WI，或者重复 *b* 因而 WC 是一样的事情。对于前面的组合，即使[(WI)(WCI)]W。

(7) γ类型的规律(*abb*，等)很容易形成，而且我们还可以通过改变协调器或动作的顺序，将集合 *ab* 转换为 *ba*。但是，分配一个反转协调器 C_2 是有好处的，因为被试有时会立即具体地提到它：“我们也必须做相反的事情”(5 岁)，等等。从那时起，被试通过颠倒一对事物的顺序，很容易就发展为对称性，比如 *abba*。

于是，这些“协调器”具有某些特征，而函数也可以被定义为相互依存的元素之间的联系(物理客体，或者关系的“术语”)。这样的协调器正是在与先前类似的组合情境中对元素之间的联系进行操作。这就是当我们把函数描述为“应用”的结果时，我们所说的内容。这是因为，当被试根据组合器 W…C 等来实施动作或协调动作时，应用并不构成具体的组合器，而是表达了动作 A_1 的结果与动作 A_2 的结果之间的对应关系(即在客体的初始状态和最终状态之间，动作已经被实施)。结果，我们获得了同一性($a=a$)函数、等价函数和双射函数等。

二、还需注意的是，在γ类型的规律中，有些规律是不断累加的，比如 *abb*，*aabbb*，*aaabbbb* 等②，但也有些规律是成倍增长的(例如 *abb*，*aabbbb*)，从而引发了比例。对这些规律而言，尽管很容易引发长序列，但长序列的构成通常是没有原因的，这好比在暗含了补偿的情境中引发加法组合一样。比如，在补充实验中(此处我们并不对之作分析)，F. 奥尔西尼使用前面的实验装置研究了两种反应：(1)如果我们(连续 3 次)给被

---

① 在组合逻辑的术语中，C 是由置换所定义的。但是存在三种程度：C_0 是当项目 B 被简单地替换为 A（如这里给出的例子）时，C_1 是当 B 被替换为 A 以及互换(适当地称为置换)，而 C_2 是当集合 BA 被替换为 AB 时，我们将称之为“反演”。

② 我们还注意到，到 11－12 岁，序列的形式包括 *ab*，*aabb*，*aaabbb* 等；或 *abb*，*aabbb*，*aaabbbb* 等；甚至是 *aaaab*，*aaabb*，*aabbb* 等(在最后这种情况下，有一个向补偿的过渡：见下文)。

试1(a)2(b)，那么对于 2(a)，被试会放下多少个 b?① 同样是拿着 1(a)2(b)，那么对于 4(a)[或 3(a)，5(a)，6(a)和 10(a)]呢？又或者，如果我们(3 次)放进 1(a)3(b)，那么对于 2(a)[或 4(a)，3(a)等]，被试会放下多少个 b？(2)如果我们(3 次)放进 4(a)1(b)，那么对于 3(a)[或 1(a)，或 2(a)，或 0(a)]，被试会放下多少个 b？我们可以看到，第一组问题涉及比例，而第二组问题涉及补偿。

本章我们暂不讨论补偿问题，因为本书第五章和第六章会谈到该问题。此处我们只是指出，这种简单的补偿[给定 b，使方程 $n(a)+n'(b)=5$ 成立]从 7—8 岁开始变得频繁起来。

至于比例[对 $n(a)$和 2(b)，即 $2n(b)$]，一般要到被试 10—11 岁时，它们才能产生正确的乘法反应。一旦被试跨过了简单波动或相等方案的阶段，他们最常见的反应是加法：如果对于 1(a)，是 2(b)，那么对于 2(a)，则是 3(b)，等等。但是，为了分析这些前比例的构成过程，以及它们向比例的早期函数结构的过渡过程，我们最好通过空格对应或者数字与空格之间的直接对应来进行探讨。正因如此，我们将继续使用上述实验装置，客体被放进一个个孔里，但是孔与孔之间的空格数量会发生变化(§2)。随后，我们将引入 3 条不同长度的圆柱形鱼，编号为 1，2 和 3，要求被试找到相应数量的食物，从而给空格—数字的对应关系增加了一层因果依存关系。这将导致比例函数的形成，它是对应关系的延伸。

§2 第二个实验：对差异增长的初步觉察

给儿童两把尺子，每把尺子各有 10 个孔，孔与孔相互间隔 1cm。向被试提供大量的客体，这些客体以相似而成对(A,A')和(B,B')……的方式分组。当把客体的茎干放入孔中时，它们与尺子和孔完全匹配。主试拥有其中的一把尺子，上面放着客体 A,B,C,D，每孔一个。主试将另一把尺子给被试，上面对应地放着客体 A',B',C',D'，也是每孔一个。我们向儿童解释，这是一个游戏("装饰花环")，目标是找到"诀窍"，以便能继续玩下去。要求儿童反复建构元素 A'—D'的序列，直到我们确定他完全理解。然后，我们从放置 A,C 和 D 开始，接着只放置 C，等等，最终使两把尺子的孔 1,2,3,4 和 2,4,6,8 被填满，而且让被试直接看到，以便被试从中获得参考。一旦被试理解了这些初步解释，主试就向他们提供两把带有 38 个间隔均匀的孔的尺子Ⅰ和尺子Ⅱ，并像之前一样操作。接下来，我们移除元素 B,C 和 D 等，只留下 A 和 A'(即单独留下 10 孔模型)，之后我们在尺子Ⅰ的第 6 孔或第 10 孔中放进一个客体，要求儿童根据游戏规则或者"诀窍"在尺子Ⅱ中放进相应的

① 没有给被试提供任何指示，只让他完成他想做的序列。

客体(这意味着他应该选择尺子Ⅱ中的第12孔或第20孔)。只要被试给了答案,我们就在第1孔和第10孔之间插入一些客体,要求他们进行对应的操作,以此作为控制。随后,我们在第19孔(尺子Ⅰ的中间)放进一个客体,要求被试在尺子Ⅱ上作对应的操作(=第38孔,即最后一个孔)。其间,我们总是要求被试解释理由,重复规则或者"诀窍"。

10孔的尺子相互对齐,中间留出一个间隔。那些38孔的尺子有部分相互重叠(Ⅰ在左边),但在起始点之间有一个间隔,以免呈现直接的视觉对应。

在12名6岁儿童、10名7岁儿童、10名8岁儿童、10名9岁儿童、13名10岁儿童、11名11岁儿童和10名12岁儿童身上,我们发现了三种行为模式。它们分别对应于截然不同的阶段Ⅰ和阶段Ⅲ(其特点是答案很稳定),以及一个中间阶段(该阶段的界定尚不清晰,经常具有过渡性质,即它的答案有时很接近阶段Ⅲ,但有时又退回到阶段Ⅰ)。

在这三种反应中,第一类反应是只跳过一个孔。因此,对于放在尺子Ⅰ的第N个孔中的元素E而言,对应的客体E'将被放在尺子Ⅱ的第$N+1$个孔中。第二类反应是把客体E'放在尺子Ⅱ的第$N+k$个孔中,k是大于1且小于$2N$的常数(或多或少是个常数,即$k+n$)。最后,第三类答案是正确的:如果E被放在尺子Ⅰ的第n个孔中,那么根据计算孔的数量或者根据简单的空格复制,E'将被放在尺子Ⅱ的第$2n$个孔中。

这三种反应的分布情况如下(括号中的数字是指被试的个数):

	$n+1$	$n+k$	$2n$
6—7岁(22个被试)	91(20)	9(2)	0
8—9岁(20个被试)	55(11)	15(3)	30(6)
10—11岁(24个被试)	37(9)	9(2)	54(13)
12岁(10个被试)	0	10(1)	90(9)

因此我们看到,此时只有50%的10—11岁被试和90%的12岁被试达到了函数$y=2x$,而在6—7岁的儿童中,90%的被试只调用了加法函数$y=x+1$。虽然我们在所有年龄阶段都发现了中间反应,但是在6—7岁组,它标志着儿童理解能力的极限,而在8—11岁组,它只是被试朝着发现确切的比例关系所迈出的一步。这种非常简单的空格复制或数字重复要到后来才出现,但它在开始时非常令人惊讶。下面我们将对几个例子进行考察,寻找造成上述情况的原因。

以下是第一阶段的例子,此时的函数仍是加法函数:

Ani(6岁10个月) 理解两把模型尺子之间的区别:"那里(被试的尺子),有些不见了(孔里没有客体),那里没有。"接着,我们把一个客体放进尺子Ⅰ的第6孔中:Ani在附近的几个孔(第5孔)之间犹豫片刻,后来选择了第7孔。"为什么?——我们留一个空格(于是,空的第6孔+1)。——你尺子中的空格一定要比我的大吗?——是的。——大很多吗?——不。——大多少?——大两倍。——非常好。现在那个孔里是对的吗?——是的。——为什么?——(她指向尺子Ⅰ

中的第 6 孔)。"

Cri(7 岁 9 个月) "应该怎么做?——你应该总是跳过一个孔,"但他停在 $N+1$。

Geo(8 岁 8 个月) "在你的尺子(Ⅰ)中,它更窄,在我的尺子(Ⅱ)中,它更宽。"我们把 E 放进第 10 孔,她把 E' 放进第 11 孔。我们插入新的客体,这迫使她将 E' 移回到第 13 孔。——"所以,诀窍是什么?——是多个孔($N+k$)",但随后她又回到 $N+1$。

Ria(8 岁 1 个月) "你必须总是跳过一个孔。"我们把 E 放在第 4 孔,Ria 把 E' 放在第 7 孔,看上去是一种复制。"你是怎么做到的?——……——(我们把 E 放在第 19 孔。)——(她把 E' 放在第 21 孔。)——(主试把尺子Ⅱ中的 E' 移到第 36 孔。)——这样对吗?——是的。——为什么?……——(E 在第 9 孔。)——(Ria 把 E' 放在第 10 孔,然后从那时起,停在 $N+1$)"。

Mar(11 岁 3 个月) 是所有被试中处于另一端的一个例子,他正确回答:"你必须总是在每个客体之间留一个孔。"但对于 $E=10$,她放置 $E'=11$,等等。我们插入中间客体,这迫使她把 E' 放回第 16 孔。"为什么?——因为你需要更大的间隔。——(E 在第 19 孔:她把 E' 放在第 20 孔,我们把 E' 放回第 38 孔。)——这样对吗?——不,不对:你还需要一个孔"。

这些例子清晰地说明了儿童对模型的理解。由于模型是可见的,被试看到,放在位置 1,2,3,4 即对应于放置在孔 2,4,6,8 中。被试的回答说明了这一点,比如我们必须"总是"跳过一个孔(Ria),比如我们必须"在每个客体"和它前面或后面的客体之间留一个孔(Mar)等。然而,被试找到的解决方案只是 $y=x+1$,而且当被试暂时偏离该方案时(无论是因为主试建议还是被试发现空间不够),他总会重回该方案,并将它视为唯一可接受的关系。

我们已经在许多其他类似的情况下观察到这种类型的反应(我们在§3 将再次发现它),我们需要对它作解释。其实这也很容易,因为加法运算比乘法运算更简单,或者整个序列是累加的,而儿童受制于经济原则或者对使用加法组合感到混乱,就好像加法在发生上要先于乘法。在现实中,乘法组合与加法组合是分不开的,因为乘法只不过是后者的 n 次重复,即 $n\times m=n$ 个 m 相加。在这个特殊例子中,当被试明确表示"你必须每次都跳过一个孔"时,这种重复特别简单。而且,这正是我们将在第三阶段的被试身上看到他们从 8 岁开始所做的事。因为某个原因,第一阶段的被试坚持使用 $y=x+1$ 组合,该组合在发生上先于基数加法的形成,即由于尚不能区分基数加法和序数加法(或等级的连续性)。儿童简单地推断:如果 y 上的孔比 x 上的孔排名更高,那他需要做的就是在 x 的最终排名上加 1,而不考虑前面的东西。这种错误与我们在这一水平的被试身上观察到的其他错误是相同的:要求被试完成估计长度的任务,由于直线线段 y 比另一条线段 x 超出更多,所以他判断 y 比 x 更长(更长=更远),完全不考虑线段的

起始点。这个错误源自顺序优先于间隔(数字的或度量的)①,而这种优先性本身就源自函数(=定向的应用或有序对)优先于运算(由于运算的可逆性,运算将使被试返回到起点,并要求被试考虑起点与终点之间的间隔)。因此,从顺序的角度来看,存在一种序数加法,它通常对应于基数加法(超限除外),但不存在序数乘法。这造成了加法(序数)数字组合的初始优先地位,而在类或关系的运算领域,乘法矩阵与加法类包含是同期发生的。

第二阶段的标志是解决方案 $n+k$,这与我们在第七章的实验中所看到的很相似。在那个倒满瓶子的实验中,被试预计瓶子 B 的高度间隔会比瓶子 A 的更长,但其实所有的瓶子都相等(§3 中 Jac 的例子)。一旦被试理解了每个元素和下一个元素之间必须有一个空孔,他就会意识到,在 E(解决方案 $n+1$)之后,他需要多个空格,而不是只需要一个空格。然而,出于同样的原因,他没有获得函数 $2n$,因为他并不认为是转换导致了越来越大的差异。换句话说,与第一阶段的儿童相反,第二阶段的被试承认存在一种转换,但他是立即获得的,并没有把它视为一个累积的过程:

Eli(9 岁 11 个月)　刚开始的解决方案是 $n+1$:对于 E 在第 6 孔,她把 E' 放在第 7 孔。但是,在插入第一个元素之后,她说:"那是错的,我必须跳过一个孔。"随后,Eli 把客体移到第 10 孔:"我必须把它放在第 4 孔。"我们把 E 放在第 19 孔:她把 E' 放在第 23 孔,等等。我们把 E' 放在Ⅱ上,距离是 E 的两倍,问 Eli 她是如何看待此事的:"我认为这是正确的,因为距离更大了(对于 $E=19$)。——有什么诀窍吗?——你必须总是跳过 4 个以上。"

Fra(10 岁 1 个月)　对于 $E=10$,把 E' 放在第 15 孔。"如果我们把它放在这里(11)呢?——不,那就太近了。——这里(20)呢?——那可以;可以有几个孔,但你至少需要一个孔"。

Cla(12 岁 3 个月)　对于 $E=9$,把 E' 放在第 12 孔。当我们插入几个客体时,他将 E' 移到第 16 孔。"你留下了多少个孔?——几个"。对于 $E=19$,他拒绝把 E' 放在第 38 孔:"那是错的,那太远了,我会把它放在中间(他把它放在第 30 孔)。——有什么诀窍吗?——每次你都必须使它更大,这样你就不必移动客体了(如果我们在 E 和 E' 之间插入客体)。"

虽然最后这个被试还没有获得比例,但他正在靠近第三阶段,因为他承认当我们把 E 移到离起始点更远的地方时,E 和 E' 之间的间隔变得越来越大。Fra 几乎已经达到了这个水平,证据是他接受了间隔是可变的,只是还未理解间隔应该有规律地增长。Eli 是第二阶段的典型,因为她理解了"间隔>1"这一事实,但却赋予间隔一个恒定值,原因在于她未能掌握"转换即使是不连续的但也是可变的"这一概念。因此,在这个中

① 毫无疑问,正是由于这个原因,在前运算水平的守恒实验中,被试往往只考虑一个常规的评估维度(水位的高度、香肠的长度等),这导致了他们出现系统性的不守恒。

间阶段，被试逐渐掌握了变异之变异的概念。

以下是第三阶段的例子，此阶段的被试在8岁以上，他们的年龄和推理方式表明，虽然被试使用的函数逐渐通往比例结构，但明确的乘法对于解决问题并不是必不可少的：

Air(8岁4个月) “你的没有孔，但我的必须有一些孔。”当我们放置$E=6$，她放置$E'=12$等，无须试错。“有什么诀窍吗？——我不知道。——如果你要向朋友解释呢？——她应该每次都跳过一个孔。——解释一下。——你有6个孔，对于每个孔，我都需要在我的上面增加一个额外的孔；你有6个，所以我有12个。——你是怎么知道的？——我们在我的上面跳过一个孔”。

Rol(8岁4个月) 对于$E=5$，他放置$E'=8$：“这样对吗？——不对（他把它放在10）。——你是怎么做到的？——我数了孔的数量。它们应该是你的两倍。”

Ber(9岁4个月) 对于$E=10$，把E'放在20：“你怎么知道的？——我数了孔的数量（在Ⅰ中），然后我又数了10个（在Ⅱ中），因为两者之间每次都有一个孔。”对于$E=19$，把E'放在38：“为什么？——每次我们在两者之间留下一个孔，那每次都会多出一个额外的空间。”对于$E=5$，把E'放在10：“因为我在那里数了5个，这里数了5的2倍。——为什么这样做？——每次我们在2之间增加1，就会使它翻倍。”

Dol(10岁2个月) “如果你跳到7，我需要比7更多，我必须增加。我必须走这个距离，然后再走一次。我们把相同的距离翻倍了。”

Ada(11岁6个月) “你必须计算跳过了多少个孔，然后翻倍。”

Ali(12岁6个月) 在演示过程中马上就明白了单与双倍的关系，并毫不犹豫地将其与Ⅰ和Ⅱ联系起来：这是唯一的例子，Ali具有对乘法关系的直观，而不需要从（对空孔的）加法慢慢过渡为乘法。

这些例子非常有趣，尤其是最初的几个被试，因为几乎所有被试都使用了与第一阶段相同的公式“我们每次都跳过一个孔”等。但从那里他们得出结论，找到“双倍”是必要的。即使被试以加法的形式建构了双倍（比如Ber和Dol），这仍然构成了一个新的元素（与第一阶段和第二阶段相比而言）。它是由什么组成的呢？

在比较三个阶段的反应，特别是第二阶段的中间反应时，我们发现，对被试来说，任务本质上就是考虑排列Ⅰ和排列Ⅱ的差异，然后在两者之间建立对应关系。最初，被试为了建立对应和寻找同构，把重点放在尽可能地减少差异。在这个例子中，首先，最小差异位于排列Ⅰ的最终界限，它也是动作的终点，或者建构它的定向应用的终点。因此，将差异降低到最小值，差异即为$n+1$。换句话说，被试只考虑了最后一个空孔。这就产生了第一阶段的系统反应，在该阶段，被试通过对空孔作简单相加，试图实现从Ⅰ到Ⅱ的转换。但是，由于这个初始函数与单纯地识别排列Ⅰ和排列一样，仅仅只是终点不同，所以被试在插入元素（主试这么做是为了使问题更清晰明了）的影响下，想到了用

转换来建立对应。然而，鉴于由同化格式所引发的将Ⅰ简单地“应用于”Ⅱ的一般态度，这一格式的顺化，由于面临新的紧急转换，只能以大块的方式被执行，来作为一次给予但一直持续的静态的差异。而且，格式的顺化还导致一个静态的加法方案，即先增加恒定数量的孔，然后增加可变数量的孔(并非系统化地增加，而是通过试错)，但缺乏连续转换。所以，第二阶段的反应仍然是不稳定的。这是因为，一旦被试承认差异大于1且容易变化，那么变化不断增强(从而产生关于孔的数量的连续转换，它以Ⅰ中的 E 的排名为特征)的观念就会逐渐推行开来。到那时(但只有到那时)，在从排列Ⅰ开始来建构排列Ⅱ的过程中，被试才明白差异在增加。他不再从最终元素 E 开始，而是遵循 A，B，C，…的顺序并且考虑整个空孔序列，而不再只关注最后一个空孔。即使程序仍然是加法性质，但它此时不断累积，并以函数 $y=2x$ 结束。当被试使用“双倍”一词时，他终于意识到了函数 $y=2x$。这似乎就是这个函数的历史，它始于简单的构成性函数的同化或者初始整体格式的应用，而后得以形成。

应当指出，这种演变似乎是由一种一般过程所主导的，该过程的特征是可逆性在最初唯一的主动方向上不断进步。其实在第一阶段，在定向的函数“应用”的影响下(=“单向朝右”，根据它们的形式化定义)，被试在Ⅱ或 y 中复制了他在Ⅰ或 x 中观察到的内容，但他的应用具有顺序和方向，而且主要集中于最终界限，这就导致 $y=x+1$。后来，他回到(第二阶段)，开始考虑间隔，而不仅仅是连续应用的顺序。为了以主动应用的方式来考虑所有的间隔，当序列的重构过程(回溯过程)回到起始点时，运算的可逆性就出现了，被试也到达了平衡。因此，正是构成性函数从属于运算可逆性的过程，把它们转换成了比例的构成化函数。

§3 第三个实验：从序列对应到比例[①]

先前的结构已经在某些方面构成了序列对应，因为在排列Ⅰ中，元素 E 和起始点之间不断增加的距离对应于排列Ⅱ中元素 E' 和起始点之间不断增加的距离，而且后一种距离的增长更大。刚开始，被试往往只在排列Ⅰ和排列Ⅱ上移动和增加相同的距离，而且只能逐步在Ⅰ的规律变化与Ⅱ的差分数列之间建立对应关系。正如我们所看到的，这种共变关系走向了比例关系。在第一个实验中，距离是唯一的变量，它可以按序列排列，但客体 A，B，…，E 并没有表现出增长的规律。因此，接下来这件事可能会很有趣，我们将探究一种新的情境：即客体自身会发生变化，它们处于排列Ⅰ的连续增长序列中。因此，在排列Ⅱ中建构出来的客体，也会根据排列Ⅰ中的客体按比例增长。

---

① 下面的实验由 H. 辛克莱主持，它是 S. 罗勒和 M. 丹尼斯关于比例的系列实验中的一部分。我们感谢辛克莱授权我们在这里使用它。

在排列Ⅰ中给被试呈现三条鱼，分别长5cm、10cm和15cm。三条鱼形似鳗鱼，具有统一的直径，所以被试只需考虑一个维度。我们并不要求被试对这些维度作精确测量，但我们详细地说明，由于三条鱼长短不一，所以鱼B的食量是鱼A的两倍，而鱼C的食量是鱼A的三倍。这等于向被试提供了解决办法，尽管只是口头提示。被试的任务则是确定排列Ⅱ上的食物数量，这又分为两种不同的类型。在第一类试验中，向被试提供50个相同的珠子，用来表示50颗鱼食。被试的任务是为每条鱼选择合适的食量。在第二类试验中，鱼食由长度不一的条形"饼干"组成，被试要解决的问题也是使鱼的食量与其大小相对应，即鱼的食量与食物相对应，但这个任务中的食物是连续的(而非离散的)。

我们需要再次指出，这样的序列对应与常用于类似结构的运算试验之间的区别在于，在这种特殊情况下(正如§2中一样)，被试对排列Ⅱ的元素不只是在排序，而是在进行建构(在之前的实验中，元素是间隔，而在这个实验中，元素是客体自身)。在另一个测试中，我们给被试10个玩具娃娃、10根拐杖和10个登山包，每一种东西均大小不一。然后，我们向被试提问，比如要求他们找到属于第6个娃娃的包和拐杖。这只需要被试把这三个集合按顺序排列，使它们根据尺寸大小相互对应(这同样适用于两个维度的双重序列矩阵，比如大小和颜色)①。另一方面，由于在这种情况下，排列Ⅰ中的客体A，B和C是已经给定的，所以被试必须建构出相应的客体A′，B′和C′(珠子的数量或线段的长度)，而这实际上是一个函数问题：如果给定$y=f(x)$和x，被试不仅必须确定y，还要确定函数f的形式，即该函数是加法还是乘法。

在被试被问及的所有问题中，我们主要对其中六个感兴趣(还有另外三个涉及蛋糕切分的问题，但它们不是我们此处关心的重点。由于主试是在谈话的最后阶段才提出这三个问题，所以它们并不影响被试对在它们之前的问题的回答)，它们分别是：(1)如果鱼A的面前有一颗鱼食(=一个珠子)，那鱼B(其食量是小鱼的两倍)和鱼C(其食量是小鱼的三倍)分别需要多少颗鱼食？(2)如果鱼B收到4颗鱼食，那鱼A和鱼C需要多少颗？(3)如果鱼C这次收到9颗鱼食，那鱼A和鱼B应该得到多少颗？(4)与问题(1)相同，只是换成"饼干"②，即把长度为1个单位的饼干给A；(5)与问题(2)相同，鱼B收到长度为4个单位的饼干；(6)与问题(3)相同，鱼C得到长度为9个单位的饼干。

我们能够区分出以下四个阶段。在第一个阶段，被试只从"更多"和"更少"的角度来思考问题，接受所有的解决方案，但他们只在一定范围内，指出鱼B比鱼A更多，而鱼C比鱼B更多(这些反应在5—6岁被试的鱼食任务和饼干条任务中很普遍，而且在饼干条任务中会一直持续到6—7岁)。在第二个阶段，被试建立起关于整数1，2，3或3，4，5等的数字序列，使得差值$\alpha=+1$(在某些情况下，这些反应开始于5—6岁，在鱼

① 皮亚杰和斯泽明斯卡：《儿童的数概念》，Routledge & Kegan Paul，伦敦，1952。

② 应该注意的是，我们先让他们按1至10级对饼干条排序，以方便选择。

食任务中会持续到8岁，在饼干条任务中甚至会持续到9岁）。对第三阶段的被试而言，差值等于$K\pm m$，且$K>1$。第四个阶段可以被细分为两个子阶段：在ⅣA子阶段，两个关系（AB和BC）中只有一个是对的，另一个是错的，而在ⅣB子阶段，被试终于同时理解了这两个关系。

关于第一个阶段，我们首先注意到，在5岁至5岁6个月的被试中，五分之三的人正确地重复了任务，五分之四的人懂得如何计算（其中一个女孩说："我能算到20，兴许更多，但我从来没算过更大的数！"）：

Cho（5岁6个月）　问题1：他分2颗给B，分4颗给C。"解释一下。——看起来是对的。——如果我分5颗给C，这样可以吗？——也许可以，但不能是6颗"。问题2（分4颗给B）：他分2颗给A，5颗给C。"解释一下。——嗯，2颗给（A），因为它更小，5颗给（C），它更大。——你能分6颗给C吗？——哦，可以！——分3颗给A呢？——不行，这对小鱼来说似乎太多了"。问题3（分9颗给C）："3颗给A，然后[5]颗给B（没有计算）。——如果我们给它6颗呢？——可以，那样也可以。——给8颗呢？——或许也行。——9颗呢？——不，那不行，那它就和（C）一样多了。"问题4（分1个单位的饼干条给A）：他分4个单位给B，6个单位给C。"为什么？——我不知道。"问题5（分4个单位的饼干条给B）："我分[2]给（A），分[9]给（C）。但我不会分[4]给（B），否则那就和早餐（问题4）吃的一样多了。我们必须给他更多。——给多少呢？——例如给[8]。"

Kar（5岁5个月，是那个知道如何算到20并且"兴许更多"的儿童）　问题1（分1颗给A）：她分2颗给B，分3颗给C，"因为（B）是中鱼，（C）是最大的鱼"。问题2（分4颗给B）："分2颗给（A）和5颗给（C）。——如果我分1颗A呢？——不，这还不够，这就跟第一次一样了。——那分6颗给（C）呢？——可以，那也很好。——7颗呢？——也可以。——9颗（给C）呢？——不，那一定太多了。"问题3（分9颗给C）：她分3颗给A，4颗给B："如果我分6颗给（B），可以吗？——可以。——8颗呢？——可以。——9颗呢？——不行，大鱼（C）必须更多：你是这么说的。"问题4（分1个单位给A）：Kar分2个或3个给B，分4个、5个或6个给C。问题5（分4个单位给B）：她放下1个单位给A，7个单位给C。问题6（分9个单位给C）：Kar分7个给B，1个给A："这对（A）来说足够吗？——够的，他是条小鱼。"

于是我们看到，鱼的体型大小和它所需的食量之间的依存关系背后的规则，只是一种简单的、定性的序列对应，二者的差值并不相等。但是在第二阶段，我们观察到，每一个食量（鱼食或饼干条）都与下一个相差一个单位。事实上，三条鱼的长度差异非常大（5，10和15cm），以致被试不能产生等差知觉，只能注意和遵守A<B<C这个不等式，并将之复制到鱼食的数量关系中。同样，只要每条鱼的鱼食数量或饼干长度都不相同，而且维持A<B<C的顺序，儿童就会接受几乎所有的变异。至于数字，它们还不具备

迭代运算的基数值(比如 2=1+1 等),只是对应于不同大小(定性而非量化)的序数符号,可以这么说(这就是为什么 Kar 相信,如果她尝试,她也许能够计算超过20 的数字!):还缺少对差值的数值量化。此外,这些被试有时会拒绝接受某些数值:比如,若 A 只有 1 颗,Cho 希望分 5 颗给 C,"但不能是 6 颗";当 B 有 4 颗时,3 颗"对小鱼 A 来说似乎太多了"。Kar 也有同样的反应,如果 B 有 4 颗,那么分 1 颗给 A 是"不够的",而分 9 颗给 C"肯定太多了"。但是,这些定性的比例仍然只是一种序列对应,即必须维持 A<B<C的顺序,以保证每个数量既不会太少,也不会太多。

如果被试的估计仍是内涵的或定性的估计,还不是数量的估计,那么潜藏在这些限制背后的规则又是什么呢?在前面的实验(§2)中,函数源自于随意的规则,而且数量是由实验装置中的间隔和小孔以某种方式来实现的。与之不同的是,在这个实验中,被试发现,鱼和食物之间的函数依存关系,位于因果关系和运算关系之间,这在所有的基本构成性函数中都是如此。从日常喂食的情况来看(由于儿童受到社会习俗的强化,可以在实验任务中暗示他们早餐和"其他餐"之间存在差异),我们完全可以调整一条鱼的食量,给它 $n+1$ 颗或 $n-1$ 颗,而不是根据尺寸所得出的 n 颗。但是,太多就是太多,不够就是不够。除了这些可预见的限制之外,只要定性的估计遵守 A<B<C 的顺序,它们就可以完全不受其他限制。

数值量化开始于第二阶段,很自然地体现在鱼食和珠子的任务中,因为鱼食和珠子都是非连续的等价单元。而另一方面,饼干条因其长度是连续值,儿童直到更晚才会对之进行可计算的度量化。数值量化通常以其最基本的形式开始:即 n,$n+1$ 和 $n+2$ 的简单连续。下面是一些例子:

Jan(5 岁 11 个月) 对于问题 1(1 个给 A):Jan 分 2 个给 B,3 个给 C。问题 2(4 个给 B):"减 1 个,分 3 个给 A;加 1 个,分 5 个给 C。"问题 3(9 个给 C):"减 1 个,分 8 个给 B;再减 1 个,分 7 个给 A。"类似地,在问题 4—6 中,Jan 对饼干条的预测分别是 1,2,3 和 3,4,5 和 7,8,9。

Den(6 岁 1 个月) 相同的反应。对于问题 2,即 4 个给 B 时,他分 3 个给 A,分 5 个给 C。我们让他重复任务,条件为 B 的食量是 A 的两倍,C 的食量是 A 的三倍,但他仍然坚持他的数字。"那么做公平吗?——是的,分 3 个给 A,因为它更小,分 5 个给 C,因为它更大"。然后我们问他另一个问题:如果 A 分到 3 个,B 分到 6 个,那么 C 应该分多少个?"分 8 个给 C。第一个分到 3 个,因为它很小,B 有 6 个,是 A 的两倍。B 比 A 多,而 8 个更多。——如果你分 12 个给 C,分 8 个给 B 呢?——那就分 6 个给 A。你跳过两个数字,9 和 10。在 B 和 A 之间,你跳过一个数字"。

在饼干条任务中,我们试图观察 Den"跳过数字",但他恢复到了加法单元的系统:如果我们分 2 个给 B,A 将分得 1 个,C 将分得 3 个;如果我们分 4 个给 A,B 将分得 5 个,C 将分得 6 个,等等。"分别给它们 4 个、5 个和 6 个,这真的公平吗?难

道不会出现一条鱼太饿，而另一条鱼吃太多吗？——会。——那如果我们分3个给A，分6个给B呢？——C将分得7个”。

这些反应与§2中第一阶段的反应非常一致。然而，在上一次实验中，被试以连续+1的方式来构思整个序列，这还只是一个连续的既定序列的问题。但是这里的问题是，被试需要量化他从一开始就直觉到的定性序列对应(比如Cho和Kar的第一阶段，等等)。在这种情况下，被试在鱼A，B，C之间所觉察到的这种定性比例或者序列比例，以及食量A′，B′，C′(B′对应B，A′对应A，等)之间的顺序，在他看来就可以表达为最简单的基数形式B′=A′+1和C′=B′+1。

但是，与实验Ⅱ一样，我们发现在连续律$N+1$和数值比例之间存在一个中间水平(阶段Ⅱ)$N+k$。我们还观察到一个中间阶段Ⅲ，事例如下：

Pal(7岁3个月)和Vel(7岁5个月) 若分9个给C(即问题3)，那么分3个给A，分5个给B，因为“你看它，它看起来是正确的”，或者因为C“吃得有点多”；对于饼干条2，4和9等，他们的反应是用手指去测量。

Dir(7岁4个月) 对于问题3，给出的答案是5，7和9：“我从9中拿走2个，从7中拿走2个。”

Syd(5岁10个月) 对于问题3(分9个给C)：分3个给A，分7个给B。对于饼干条，若A有1个，他分2个给B，分10个给C，等：“我把最大的给C。”

于是，我们越来越接近某种比例关系，但这种比例关系仍然是“超序列的”或外延的关系。量化比例的形成过程分为两步：第一步(第四阶段的子阶段A)是仅具有两个关系中的一个，而缺少另一个；第二步(第四阶段的子阶段B)是同时具备两个。以下是一些逐步形成或者立即形成比例关系的例子：

Gol(7岁6个月) 成功地回答了问题1。对于A分得2个，他开始提出B′=3和C′=4，后来他更改为：“B应该分得4个，因为它是2的两倍，而C应该分得5个。”对于分9个给C，他使用了同样的推理，但要求他在9，8，6和9，6，3中做选择时，他理解了：“因为鱼B是A的两倍长，所以它应该分得两倍的鱼食，而鱼C是A的三倍长，所以它应该分得三倍的鱼食。”在饼干条任务中，他说了相同的话：“B应该分得A的两倍，C应该分得A的三倍。”

Hub(8岁6个月) 在问题1(分1个给A)中，分2个给B，分3个给C。若A有2个，B将分得3个，C将分得4个，“因为前面已经有2和3了。哦不，不行：B应该分得4个，C应该分得6个，因为B吃了两倍，2乘2等于4，对于C，我乘了3。——那如果B分得6个，C会分得多少个？——9个，因为B是A的两倍，C是A的三倍，所以是9”。在饼干条任务中，如果B有4个，“那么A将分得2个，B是2+2，C是2+2+2。——如果分9个给C呢？——我除以3，得到A是3个，然后再乘以2，得到B是6个”。

Mar(8岁5个月) 正确回答了所有的问题：“因为B比A大两倍，C比A大

三倍。”

因此，儿童从仅仅涉及长度等级的前比例关系，逐渐地过渡到基于长度关系的数值比例。上述四个阶段的分布（绝对数字）如下表所示：

年龄（岁）	颗粒（鱼食）					条状（饼干）				
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	ⅣA	ⅣB	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	ⅣA	ⅣB
5	5	1	3	0	0	6	2	1	6	0
6	3	1	1	1	0	3	3	0	0	0
7	1	2	3	1	0	2	1	2	2	0
8	0	2	0	2	3	2	0	0	2	3
9	0	0	0	0	5	0	0	0	0	5

我们看到，被试在回答关于不连续单元（颗粒）的问题时，表现出微小的进展。而饼干条则完全不同，它的数值不太容易立即获得。我们首先观察到，与第二次实验（§2）相比，这些实验结果已经表现出明显的进步。要知道，在第二次实验中，只有10－12岁的被试才达到了等距的比例关系。这在一定程度上归结于，这34个被试均来自一所国际学校，那里的学生的水平明显高于日内瓦的其他小学。但毫无疑问，这也是由于问题的差异所致。在第二个实验中，实验任务是一个延长的序列对应，在这种情况下，不变的起始点（模型的元素）可能仍然不够结构化，因而以加法＋1的形式得以完成。但是在当前的实验中，A＝1，B＝2A，C＝3A的关系是以可变的方式呈现的，并且更迅速地转换为它们的对应A′，B′和C′。

§4 结 论

根据前面的两个实验，我们不禁对从简单应用的构成性函数过渡到比例关系的构成化函数的过程进行有趣的观察。两者都开始于第二排对第一排的同化，因为被试并不是把第一排转换成第二排，而是将第一排的构成性动作格式应用到了第二排的建构中。这就产生了初始的一对一的构成性函数。但正如格里兹在他的理论观点中所坚持的那样，这种同化已经包括了某种“前比例关系”。一般来说，这种前比例关系与类以及有序集或序列集相关，它逐渐变得与我们所观察到的一样，即对于两个具有相同特征a或者等价特征a和a'的集合A和A'，我们知道：a'之于A'，正如a之于A。在序列化或有序序列的情况下，如果$A<B$，而且它们的对应或应用被表达为$A'<B'$，那么前比例关系是：B'之于B，正如A'之于A。这里，我们已经正在处理数量问题，由于B包括“多于”A的内容，B'包括“多于”A'的内容，那么这些数量在某种程度上仍然是准定性的关系，或者更确切地说是内涵的关系①，因为它们唯一的显著特征就是它们的顺序：“多”

① 关于内涵数量、外延数量和等距数量的定义，参见第十四章§4的末尾。

或者“少”(不管具体的数值)。

但是,这个顺序可以用序数(第一,第二,等)来表示,它很快就会导致基于有限整数特征的数字对应,而且明显与数字的某些前运算建构出现的一样早,也即那里的每一个整数序数都对应于一个整数基数,反之亦然。这引发了一种直觉:对于 A,B,C 而言,存在对应的基数值 1,2,3。由于有序数或序列数之间的差异尚未被考虑在内,而后者仅存在“多于”或“少于”的差别,所以当时显示的比例导致了这样一种观念,即这些已经确定的差异仍然等同于+1。

在第二个实验(§2)中,毫无疑问,正是这种即时的和虚假的蕴涵,导致被试忽视了对第一行的元素 A,B,C 之间的间隔和第二行的元素 A',B',C' 之间的间隔进行详细的比较。这里,被试得出结论,由于第二排“缺少了一个孔”,那么在第一排的最后一个项目后添加+1,就足以获得第二排的对应的项目。在第三个实验中,被试只是根据第二排所建构的 $B=A+1$ 和 $C=B+1$ 关系,来表达第一排的数量等级。但是,被试从序数的前比例关系出发,非常自然地到达了其他更复杂的关系,只是这些关系并不是等距的,但是源于苏佩斯所谓的“超序数”的量表。关于顺序量表,被试只是假定 $B>A,C>B$ 等,而不知道它们是多大。另一方面,关于等距量表,被试知道 A 和 B 之间的间隔或差异 a,B 和 C 之间的间隔或差异 b 等等(在顺序量表上仍然是不确定的),并且能够用单元的形式来表示它们:$b=na$ 等等。被试在两者的中间发现了超序数量表:虽然可以对间隔 a,b,c 做比较,但这只能从“多于”或“少于”的角度来完成。例如,被试将会知道,B 和 C 之间的差异 b,比 A 和 B 之间的差异 a 更大。如果 a 和 b 相等,那他将只知道它们相等,而不知道用单元来表示它们(即不去测量它们)。这个实验中处于阶段Ⅲ和Ⅳ A 的儿童,和前一个实验中处于阶段Ⅱ的儿童(除非他们用孔的数量来表达 $N+K$),都处在这个水平。他们的前比例关系已经具备这一形式①:b'之于 b,相对于 a'之于 a。很自然地,这一形式还缺乏跨物品的等同性。

最后,通过对间隔的数值量化,被试更容易地过渡到构成化函数(具有真正的等距比例的结构)。这一过渡过程还得益于以下原因:在这种特殊情况下,这些数值关系非常基础,而且实验任务是以既定的口头呈现方式指派给被试的。

最后,值得注意的是,在从简单的函数对应过渡到比例关系的过程中,§3 的实验向我们呈现了一种名副其实的态射。在这个水平,函数超越了简单的对应,以确保从原始集合的结构进行转变。正是结构的转变导致了比例,毫无疑问,也正是由于这种转变的直接性质,在这种特殊情况下,被试比通常情况更早获得了比例关系。

---

① 我们在本实验的第一阶段发现了这个方向的迹象,但正如我们所说,它可能受到因果关系的影响。

第四章　一例因果函数和空间函数[①]

如果我们假定，函数表达了动作格式在双向因果和运算（或前运算）方面所固有的内在联系，那么，对因果情境进行研究就是顺理成章的事情。在因果情境中，变量比较容易区分，也更容易被分开或合并来加以分析。从发生的角度来看，由一个动作所引发的单一推力而产生的传递运动，无论是直接的还是被要求的，它都肯定是最原始的例子。但是，它不适合用于对因果函数（涉及原因和结果的整体性质）做详尽的分析，而且年幼的被试在对之进行精确量化（尤其是计量）时也存在困难。因此，我们设计了一种看似非常复杂、实则相当简单的实验装置。该装置包括一个重物 z、一段弹簧 x 和两段细线 y 和 y'，其中 z 通过一段长度恒定的细线（该线分为 y 和 y' 两段，y 与 y' 相互垂直，因此存在反向变化的关系）与一段长度可变的弹簧[②] x 相连（见图 8）。此外，还有两个箭头 Fa 和 Fb，其位移标示在刻度上，对应于重量 z 和弹簧长度 x 的变化。

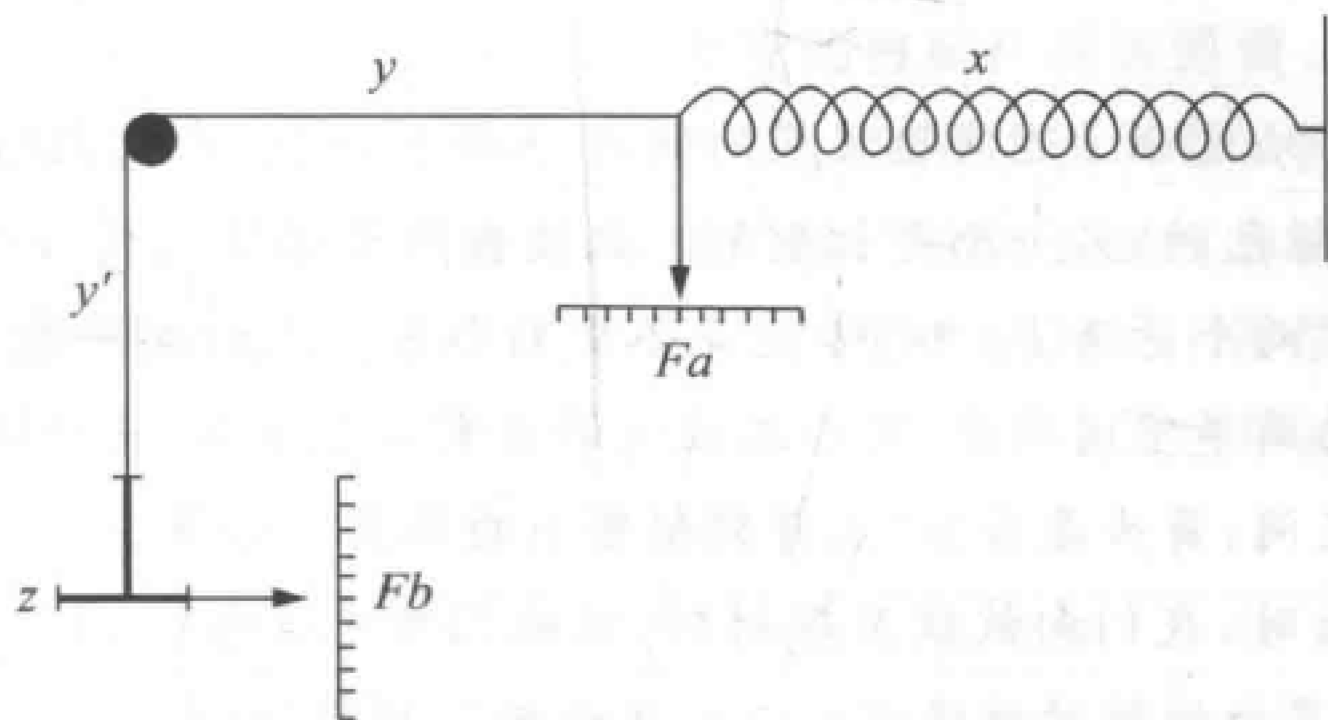


图 8

一方面，这个装置在操作过程中所涉及的函数，自然地包含了某种因果性：即弹簧 x 的伸长与重量 z 的增长之间存在依存性质。不过，也可以把重点放在 x、y 和 y' 的长度的空间共变上，不去考虑箭头 Fa 和 Fb 的位移。这样一来，空间变化可以引发运算处理，比如 $(x+y)$ 的守恒和 $(y+y')$ 的守恒，以及 x 或 y' 的长度增加与 y 的长度减少之间的补偿，等等。所以，第一个问题是，按年龄来考察因果成分和空间成分的相对重要性，无论被试是单独考虑还是同时考虑这两个因素。

---

① 与 M. 梅兰-巴克斯和 S. 巴贝尔-克里斯托弗合作。

② 对一部分年幼被试，换成弹力带。

第二个问题取决于第一个问题的结果，它将确定函数是否立即组成一个整体系统，如果是，其性质如何；又或者，确定“第一个”函数单元是否由数对所构成，如(x, z)或(x, y)等。如果是这样，那将会出现另一个问题，即分析它们之间数对的渐进组合过程，或者更一般地说，分析它们之间依存关系的模式。数对(y, y')取决于数对(z, x)吗？这样的依存关系是否以另一种方式联系在一起？最重要的是，依存关系的一般构成模式究竟是什么？如果变量 v_1 取决于 v_2，而变量 v_2 又取决于 v_3，那么 v_1 是否也取决于 v_3？连接与传递(这是从一开始还是后来发生的)可以比较吗？这些联系更复杂吗？

事实上，该装置所涉及的联系是一种环形结构，因此非常复杂：重物 z 的重力拉着细线 y'，y' 拉着 y，而 y 则又拉着弹簧 x，当弹簧 x 伸长时，将会使 y 发生从右向左的位移，y' 发生从上到下的位移，最终导致重物 z 的下降。尽管某些水平的儿童能够成功地区分这两个依存关系的不同方向，但是毫无疑问，对年幼的被试来讲，只要他们还未曾质疑重物 z 作用于弹簧 x 的方式和媒介过程，他们就不会考虑上述问题。不过，尽管存在这些困难，但并未阻止对渐进组合过程作分析，实际上，9－10 岁的儿童已经掌握了这样的分析能力。

§1 技术和一般结果

为了更好地区分上述实验装置的细线 y 和 y'，我们在它们后面放置了两种颜色条，一个是绿色的，另一个是红色的。这使我们能够将细线 y 称为“绿条”，将 y' 称为“红条”。两个箭头 Fa 和 Fb 也是不同的颜色。允许测量箭头位移的刻度，以相当于厘米的简单空间单位(用小纸板做的水果和蔬菜①)进行校准。这就使得研究者会如此发问：箭头是否会“上升到胡萝卜的位置”，等等。

实验开始时，我们向被试呈现材料，让他们给元素命名，并允许他们分别把玩每一个元素(其余的暂时被隐藏)，以便被试确定它们的作用。一旦交代清楚，我们就会让被试预测，当放上重物时，每个元素会发生什么变化。我们会详细询问他们在每一次重量增加或减少时的预测。然后，我们继续增加重量，并请求被试对他们所观察到的关系进行描述和解释。我们还会提出两个问题，一个是关于“路径”$x+y$长度恒定的问题(即两个螺丝钉之间的水平距离，其中一个螺丝钉固定着弹簧，另一个允许细线 y 和 y' 通过)。另一个问题涉及长度 $y+y'$ 的守恒。此外，为了确定被试对元素之间联系的理解程度，我们建议被试把移动箭头 Fa 当作老鼠，把第二个螺丝钉(把 y 和 y' 分开)当作一块奶酪，然后问被试，我们如何帮助老鼠得到奶酪。

---

① 水果靠近其中一个箭头，蔬菜靠近另一个箭头，以免暗示位移相等。

最后，我们进一步比较了当增加或者减少重量时，箭头 Fa 和 Fa 的位移大小（接下来会要求被试预测，获得这样的位移，一般需要多大的重量）。不管被试能否预测，也不管被试在操作后是否接受，这首先涉及在箭头的运动和重量大小之间是否存在联系的问题①，然后还涉及位移 Fa 与 Fb 之间的关系问题。为了这个目的，我们要么使用水果和蔬菜来作为定性尺度，要么使用定量刻度（以 1、2 或 3 个手指的宽度，或者以厘米为单位），甚至可以让被试构建他自己的刻度。

第一阶段（4—6 岁）的结果可以概括为，被试在 x 和 z 之间建立起了初始数对，即弹簧的伸展是重量的函数。不过在此时，媒介变量要么被忽视，要么非常不稳定。被试以观察为基础，建构出不协调的数对，除非（被试注意到弹簧的运动）运动方向是 x, y, y'。

在 7—10 岁的被试中间，我们区分出以量化组合为特征的第二阶段，这些量化组合越来越符合函数的构成，尤其是长度 $(x+y)$ 和 $(y+y')$ 的守恒问题，以及 y 的减少与 x 或 y' 的增加之间的补偿关系。同样，这一阶段的特点还包括，被试在位移 Fa 和 Fb 之间建立起关系，并理解了它们的等价性，以及它们与重量的函数联系。此外，还存在第三阶段（11—12 岁）。处于该阶段的被试，除了以两倍或三倍等数字比例来进行表述之外，并未在位移和重量之间增加任何新的东西。

为了提供一个参考框架，不把不恰当的值归因于媒介事件和提问期间所做的修改的数量，这里列举了 72 名 4—5 岁至 11—12 岁的被试在理解弹簧 x（其伸展性得到所有孩子的承认）和细线 $y+y'$ 之间关系时的反应。当要求被试做预测时，A 组的被试猜到了弹簧 x 的运动，但认为细线不会动；B 组的被试猜到了细线的运动，但未能正确理解 y 和 y' 的关系，即使在观察之后也是如此；C 组的被试到达了补偿关系。在下表中，被试对老鼠和奶酪问题的反应被列在括号中：A 组被试无法给出解决方案，B 组被试会拉着细线，而 C 组被试则会拉着 z 或者增加重量：

	4—5 岁	6 岁	7 岁	8 岁	9 岁	10 岁	11—12 岁
A	6(8)	2(2)	0(0)	0	0	0	0
B	7(4)	3(3)	3(1)	3(4)	0	1	0
C	1(2)	6(6)	7(9)	7(6)	11(11)	7(8)	8(8)
被试总数	14	11	10	10	11	8	8

关于长度 $x+y$ 的守恒问题和两个箭头的位移之间的关系，成功数量如下：

	4—5 岁	6 岁	7 岁	8 岁	9 岁	10 岁	11—12 岁
$x+y$	1	3	7	8	11	8	8
箭头	1	2	8	8	11	8	8

关于长度 $y+y'$ 的守恒问题，结果列在上表格的 C 行。

① 应该注意，箭头被固定在重物的支架上和弹簧与细线的连接点上，这种方式迫使被试觉察到物体的连接。

§2 因果性及其发展阶段

应当指出，上述实验技术并没有提供任何关于因果性的问题。由于实验装置中的因果关系很复杂，而可观察到的元素却很简单，且它们的函数关系又很明显，所以对我们而言，只接受这些规律而不提及对它们的解释，在方法上似乎是可行的。然而，事实告诉我们，尽管通过简单的观察就可以发现实验装置中所涉及的函数，但如果缺少因果性的解释，被试（在本实验中）将无法组合出函数，甚至无法预测之。也即，要理解所观察到的现象，被试必须意识到因果解释。因此，我们测试了 20 名左右 5—8 岁的被试，使用以下三个装置（图 9）：（Ⅰ）一条红色弹力带（R）连接着一根细线（S），线挂在钉子（N），并悬挂着重物（W）（铁环 W）；（Ⅱ）一条红色弹力带（R）连接着一根蓝色弹力带，蓝色弹力带悬挂着重物（W）；（Ⅲ）一条红色弹力带（R）连接着四段：依次为一小段蓝色弹力带、一根短线、一小段蓝色弹力带、一根短线，后面还悬挂着重物，但总长度与Ⅰ和Ⅱ的原始长度相同。被试需要回答的问题，包括预测各个元素的运动及其传递（即媒介的作用）。

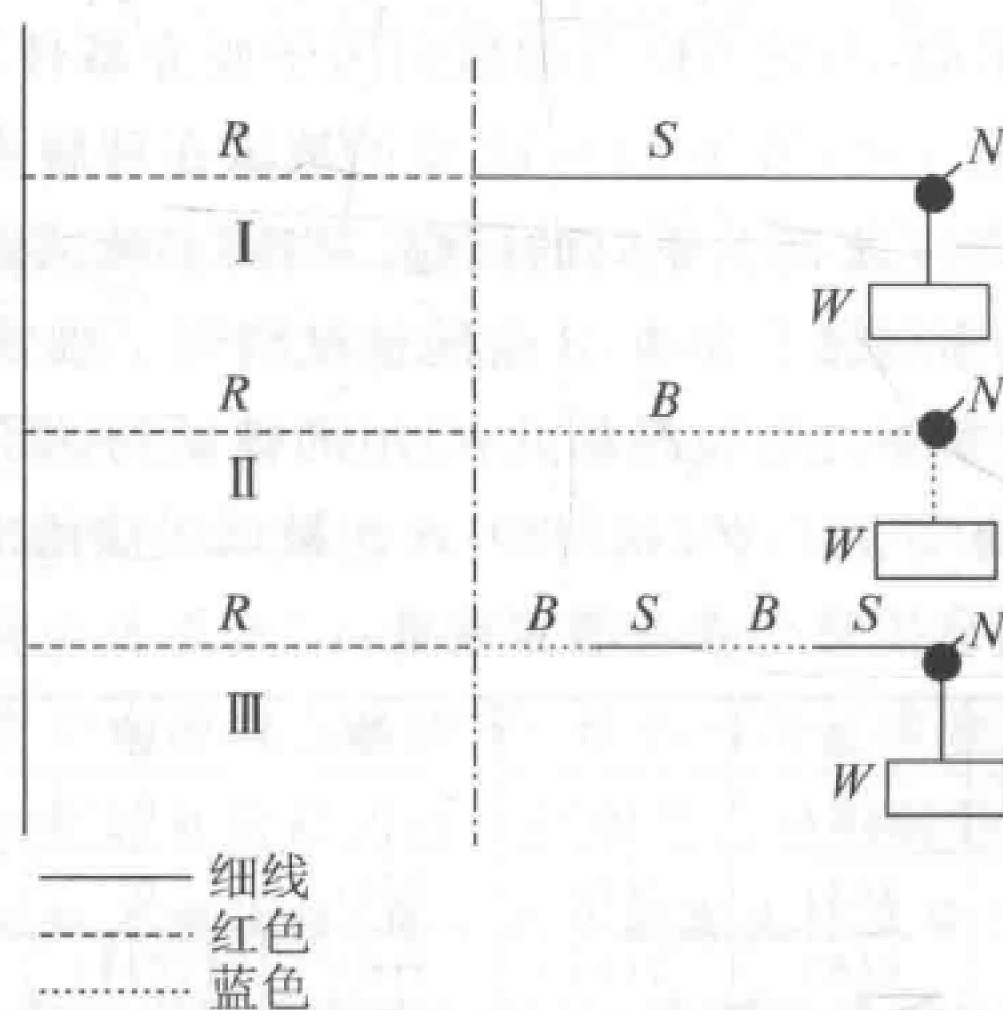


图 9

正如我们从前面的结果中所推断的那样，被试一直到 7 岁，对媒介的作用的理解，和对媒介的连续顺序的理解，都表现出非常系统性的困难：

Cri（5 岁 1 个月） 预测了装置Ⅰ中 R 的伸展，然后观察说："红色弹力带到那里了，因为我们拉着。"是重物拉着 R 和 S。在装置Ⅱ中，被试表现出同样的反应。"是铁环拉着它们吗？先拉着（R）还是（B）？——那个（R）。——为什么？——因为它更短（$R<B$）"。我们转向 S，问被试，重物"先拉着哪个？——那个（S）。——为什么？——因为它更轻"。——在装置Ⅲ中，重物拉着"那个

(R)。——还有别的吗？——有，那个(B+S+B+S)。——是那些(细线)拉着弹力带(R)吗？——不，因为它们不会弹回去”。

Nat(5岁1个月) 解释了装置Ⅰ中弹力带的拉伸，理由是：“因为它很紧。——是有什么东西让它变得这么紧吗？——是的，是它(纸板架)。——那它们(重物)呢，它们起到了作用吗？——是的。——那它(S)呢？——没有。”之后，Nat说，装置Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ中的任何一个元素都“拉着”其他每一个，没有任何顺序：装置Ⅱ中的弹力带B拉着R，反之亦然：“如果我们拿走重物，(B)还拉着(R)吗？——是的(然后，我们取下铁环)。是的，它把它拉到那里。”她把它拉回到分界线上，此处的“拉”是指她把它带回这条线。在某些特定的时刻，装置Ⅰ中的重物快要碰到装置Ⅱ中的弹力带B，Nat对此说道：“但是，并不是它(装置Ⅱ中的重物)拉着装置Ⅱ中的B，而是它(装置Ⅰ中的重物)拉着B！”

Amb(5岁) 简化了问题，他说：“是你拉着(R)。——用什么？——用你的手。——它(重物)也拉着(R)吗？——没有。——那它拉着(S)吗？——没有。”——随后她承认：“铁环拉着(R)。——(装置Ⅰ中的)细线拉着R吗？——没有。——(装置Ⅱ中的)蓝色弹力带拉着R吗？——没有。——那么，是什么让红色弹力带像那样伸展？——是铁环。”

Ana(6岁5个月) 预测在装置Ⅰ中铁环拉着R：“它拉着它。——它也拉着细线S吗？——没有。”经过观察，她坚持认为事实就是如此。在装置Ⅱ中，她说重物拉着R和B。我们回到装置Ⅰ，Ana还是认为，重物W不影响S。——但是如果互不接触，W是如何拉着R的呢？——因为它很重。

Tal(6岁7个月) 在装置Ⅰ中，开始时有点犹豫：“它拉着细线，然后是弹力带。它拉着弹力带，然后是细线。——它先拉着哪个？——先拉着弹力带，然后是细线。——为什么先拉着弹力带？——因为它是第一个。”

Ben(6岁7个月) “它(W)先拉着(R)，然后拉着(S)。——先拉着(R)？——是的。——为什么？——因为它是最后一个！”

Car(7岁4个月) 在装置Ⅰ中：W拉着R，也拉着S：“是先拉着(S)，然后拉着(R)，还是先拉着(R)，然后(S)？——先拉着弹力带。——为什么？——因为它很重。(R)是第一个，(S)是第二个。”

因此，毫无疑问，重物和红色弹力带之间的传递顺序引发了一个守恒问题。甚至当被试看起来像是遵守了顺序时(比如Cri在装置Ⅰ中，当我们回去时)，被试给出的理由也与从下到上的连续性无关：因为S“很轻”，而连续性也被否认了，因为“它不会回去”。然而，在用手推动(手→棒→外部物体)的实验情境中，5—6岁的被试却接受了推力的传递，并弄清楚了其顺序。另一方面，被试对拉力的理解仍然是模糊不清的，因为在这个特殊的例子中，物体是从左向右、从上向下发生位移，而拉力的传递是通过媒介从下向上传输的。在第一阶段和第二阶段之间的过渡阶段，被试似乎有所理解，但却遇到同

样的困难，并得出结论认为，这是一个同时产生的一般性结果：

Nik(5 岁 2 个月)　在装置Ⅰ中，开始时并不做任何预测，但经过观察，他正确地得出结论："铁环很重，细线连接着弹力带，所以细线因为铁环而拉着弹力带。"但他发现，不可能确定顺序："它同时拉着这两个。"在情境Ⅱ中，他表现出同样的反应："铁环是先拉着(B)然后(R)，还是先拉着(R)然后(B)？——不知道。同时拉着两个。"在装置Ⅲ中，被试对顺序的理解也是如此。

第二阶段的被试毫无困难地建立了媒介的连续顺序，这些被试大多处于 7—8 岁，有些甚至更早：

Mar(5 岁 8 个月)　在装置Ⅰ中，开始时没有做任何预测，但她不久就明白了："因为它非常重，它使细线和(R)移动，因为弹力带连接着细线。——铁环拉着什么？——细线。——那谁拉着(R)呢？——细线。"在情境Ⅱ中：同上。在情境Ⅲ中，她开始时预测，弹力带不会被拉着，"因为它有几截(段)"，后来意识到："因为它非常重。——铁环拉着什么？——(她按升序指出每个小截)。"

Bo(6 岁 6 个月)　在装置Ⅰ中，预测得很好："它很重，它使弹力带伸展。——但是铁环没有碰到它。——它拉着细线，细线又拉长了弹力带。"在情境Ⅲ中，也给出了正确的顺序。

Phi(7 岁 4 个月)　同样的反应。情境Ⅲ："重物连接着细线，细线连接着弹力带(指出正确的顺序)，所以拉着(R)。"

我们认为，提供这些关于因果理解的数据是有用的，因为它不仅澄清、甚至可能还解释了被试对于在第一阶段和第二阶段中所涉及的函数问题的反应(将在§3 和 4 中讨论)。至于第三阶段，我们无须在这里对将要得出的因果解释进行评论，因为关于函数本身的问题将足以清楚地说明这些因果解释(我们将在§5 中看到)。

§3　第一阶段

通过一个 4 岁被试的例子，让我们回到函数上来。该被试没有做任何预测，从而使我们能够观察他是如何建立最初的联系的。之后，我们将介绍一些不那么原始的例子，用来展示连续数对是如何构成的：

Cec(4 岁 5 个月)　当我们放置重物时，她没有预测任何动作，但当面对相反的事实时，她说："它(y)没有动，它(x)动了。——如果我拿掉重物呢？——它会动。——怎么动？——(做出从右向左的手势)。更大(她拿走重物，看到了相反的结果)。"她也没有预见到，我们可以拉着 z 而不用增加重物。后来，我们替换了这些，让她注意看细线："更大(y')。——那这里的细线(y)呢？——更小。"对于老鼠问题，她唯一的解决方法就是切奶酪。她没有预期箭头会发生什么运动。关于"路

径”$x+y$,它会变化。——我们来看看(我们放上重物)。——这使它更大(因此,这是一个关于两个螺钉之间距离的问题)。——为什么?——(她指了指重物)。

Fre(5 岁 1 个月) 也没有做任何预测(我们用弹力带替代弹簧),但看到重物拉长 x:“红色上的细线(我们指 y)会怎么样?——我猜更大。——看一看。——不,更小。——如果我拿走重物,弹力带会怎么样?——……(他观察):更小。——如果弹力带变小了那么多,细线(y)会变大吗?——稍微小一点。”对于老鼠问题,他没有找到任何答案,但当被问及重物会产生什么结果时,他发现:“弹力带将会更大(即到达更远),老鼠就能吃奶酪了。”因此,他的观察使他发现在拉伸和收缩两个方向都存在数对(z,x)。他也立即将之应用于(z,y),毫无疑问,他自己是基于这样的想法:向左的位移即等于伸展。

Ver(5 岁 7 个月) 知道弹力带会伸展,但细线不会。因此,他预测了这样的联系(z,x):对于 x,“以后会发生”,而对于 y:“它走了,它掉了,它下来了。”z 和 $y+y'$(作为一个整体)之间也存在一种联系,因为它们都向下移动,所以同样可以表示为拉伸:“它(细线 $y+y'$)变得更长。——(我们试图让他分离 y 和 y'。)——但那里的红色细线呢(y)?——它变得短了一点。——为什么?——因为它很重,所以($y+y'$)变大了。——那一片呢(y')?——更大。——细线拉长了吗?——没有。——哦?——因为它很重,所以它变大了。”但是“路径”$x+y$ 并不守恒,变得更大了,而且 $y+y'$ 的总长也不守恒:y' 拉伸的长度比 y 收缩的更多。这些不是相同的路径吗($y+y'$ 的总长取决于重量)?——“不,因为那里(y')更重。”相比之下,因为考虑到重量的作用,Ver 成功地解决了老鼠问题:“你必须把所有这些东西(重物)都放上。”他接受重量和箭头之间存在联系,但并没有预测 Fa 的位移与 Fb 相等。因此,这个例子比前面的例子表现出明显的进步,被试建构出(z,x),(z,($y+y'$)),甚至(z,F)的数对,并通过 x,($y+y'$)和 z 的位移的明显顺序将它们并列起来。

Pat(5 岁 7 个月) 与 Ver 处于同一水平,但由于我们用的是弹簧,他预测会出现来回运动,并用他的手展示出可能的伸展和收缩。初始函数也是 $x=f(z)$,然后被应用到细线上:“因为它变大了”($y+y'$ 作为一个整体)。但是,如果它伸长,那就是“因为它很重”:z 和($y+y'$)的联系;也可能“因为弹簧已经伸展了”,这就产生新的数对(x,($y+y'$))。后来,他观察到 y“会小很多……因为它变成这样(过渡为 y')”,但没有在 $-y$ 和 $+y'$ 之间建立补偿,“因为它(指着路径 $x+y$)像这样(水平)走了,而它($y'+z$)像那样(从上到下)走了”。细线 y' 变大的部分比 y 变小的部分超出一根手指。路径 $x+y$ 不再是一个恒定的长度。另一方面,Pat 成功地回答了老鼠问题:“您必须放一个重物,因为细线(y)变小了。”这引发了一个新的数对:(z,y)。

Ari(5 岁 8 个月) 同样的反应:数对(z,x)引出了(z,$x+y$),但两个螺钉之间

的距离并不守恒，因为道路“变大了。——如果我们走路，会怎样？——那会走得更长”。——整个细线$(x+y')$“变大了”，与“更远”和“更长”之间的同化相符合。这个同化过程已经在Fre、Ver和Pat的反应中得以体现，它源自(z,x)模型，又凭借符合这一水平的有序评估，因为“重物z拉长了细线$(y+y')$”这一观念而变得更加巩固。Pat未能预测箭头的任何位移，但与Pat不同的是，Ari马上就预测到了[数对(z,F)]，只是并不认为它与Fa和Fb的位移相等。与此相反，最后三个被试马上认可了逆向函数：如果我们减少重量，那么所有线条都会缩短，箭头的运动方向也会发生变化。不过，他们不能保存距离，这使我们无法提及逆向运算。

Ala(5岁11个月) 同样的反应，但对于$(y+y')$，他说：“细线变大了，但弹力带没有。”这相当于在说，它整体上变长了，但并没有伸展。

Gra(6岁11个月) 尽管已经快7岁，但他仍然认为，细线“变大了”，因为它随着重物下降了，并且由于同样的原因，路径$x+y$的长度也发生了变化。他既不接受y和$+y'$之间的补偿，也没有预测到如果重量发生改变，箭头会移动。尽管如此，他还是观察到装置的各个部分相互连接，并且被事实和自己的观察所说服。后来，他正确地预测Fb将会随着重量的增加而下降，随着重量的减少而上升。但他仍然猜测，当重量减少时，Fa将向左移动。一旦他清楚地理解了，我们就只使用Fa和Fb来衡量y的减少和y的伸展：“那么，如果我放上这个重物，Fb会去哪里呢？——那里（正确）。——那个跟这里（把Fb遮住）是不是相同的路径（箭头的位移）？——这里(Fa)它更小，那里(Fb)它更大。——为什么？——因为那里$(y'$，于是$Fb)$它会下降，而那里$(Fa$，于是$y)$它将上升。”

首先，这些反应表明了初始函数的重要性。动作直接联系着起点（即放上一个重物），而初始函数将可见的动作，转化为动作的最终结果（即弹簧或弹力带的运动），也即数对(z,x)。初始函数的整体性不言而喻，因为动作的两个本质方面在于，动作既是函数的原因起点，又是它的终点或最终结果。所以，被试Cec说弹力带“移动了”，但她甚至没有注意到，细线也移动了。其实，其他被试也看到了，但是却完全忽略。这个函数甚至是先出现的，之后被试才发现函数方向和事实观察必须达到某种很快就会变得一般化的形式：x的伸展与重量的增加相联系。此后不久就出现了逆向函数，只是并不像我们在Fre的例子中看到的那么快。

第二种基本的初始函数，比当前的情况所表现的要普遍得多，也即，它在项目的顺序和项目的数值之间组成的对应关系。我们在第三章的§2和§3中见过很好的数值例子，在这些例子中，任何增加都被简化为$n+1$，这是因为排名$n+1$是由序数单位的加法或减法而从排名n出来的。在空间关系的例子中，等价就是“更远”对“更大”或“更长”的同化。因此，这种同化并不是此处的研究情境所独有的，相反，它被以下事实大大加强了：在这种特殊情况下，每一个位移都是拉伸的结果。

一旦第一阶段的被试发现了数对或函数(z,x)，他马上就会把它应用于其他的变

量,甚至应用于常量。他不相信细线是有弹性的和可拉伸的(Ala 非常清楚这一点),而只相信重物拉着细线,细线又拉着弹簧。在这种情况下,它"上升了",它"走得更远"(Ver)等,并且,由于前面提到的量化有序对应,整根细线($y+y'$)变得更长,而两段细线又没有被区分开来:这导致数对(z, ($y+y'$))与(z, x)相类似,只是它缺乏弹性而已。这同样适用于路径 $x+y$:由于沿着 $x+y$ 移动的可移动元素(x 和 y)是被重物拉着的,所以路径自身变长了,以至于"要走更多的路"(Ari)。

守恒这一概念可以抑制被试的这种观念:细线会伸展。但是万·邦的研究(《发生认识论研究》,第 20 卷,第 7 页)表明,若将一根长度恒定的细线,分成两段垂直的线 A 和 B,当 A 和 B 的长度发生变化时,小于 7 岁的被试不认为整根细线的长度是守恒的,也即,A 段的伸展并不必然导致 B 段出现相等长度的收缩,反之亦然①。在当前的实验中,细线是被重物 z 拉着的,这同样更加适用:被试能够清楚地看到,然后预测 y 将减少,而 y' 会增加,但是数对($-y$, $+y'$)不涉及补偿,因此它仍然从属于(z, ($y+y'$)),然后是(z, y)和(z, y'),但缺少足够的长度组合。

最后,关于箭头,被试的反应过程是一样的,但存在些许的弥补。起先,被试认为箭头是不可移动的(参见 Cec 在细线任务中的水平)。接着,被试认为箭头因重物而移动,从而导致了(z, Fa)和(z, Fb),但被试尚未把这两个数对联系起来,因此认为箭头的位移并不相等。被试再次把不相等归因于拉力:Fb 走得更远,"因为它要下降"(Gre)。

不过,仍然存在数对组合的问题。由于这些数对是同一种函数格式的应用,所以它们都很相似。在第一阶段偶尔出现的唯一组合表明了运动的方向,而不是拉力的传递方向(拉力由重物作用于细线,细线又作用于弹簧)。这并不是说这种组合是错误的,因为细线的运动取决于弹簧的运动,短线 y' 的下降和伸展取决于短线 y 的位移和缩短(这些函数及其逆向形式因此是正确的)。不过,这并不是被试说出来的话。第一章中关于数对组合的实验结果,提醒我们应该谨慎行事,这是因为,当要求被试改变火车的位置,让火车通过一条或者两条轨道(隶属于一个非常简单而清晰可见的线路网络)从 A 点到达 B 点时,只有到 6—8 岁的年龄,75%的被试才能够把路线连接起来。所以,如果这个实验已经通过少数可能的路径(不仅是 y 和 y')中的一条,解决了弹簧和重物之间的连接,那我们早就在 5—6 岁的儿童身上发现同样的不连续[如图 3(Ⅰ到ⅤB)所示]。因此,唯一的数对组合,就是(z, x)承接着(z, y),以及(z, y)承接着(z, y'),等等。在上文的被试反应中,这种组合或多或少地表现出某种确定性,并且暗含在"上升,下降"等语句中。这些组合并不是函数之函数,而只是一种可变的承接顺序(关于此顺序,请参阅第 2 节中第一阶段的被试对因果关系的反应)。

① 另见下文,第八章,注释 1。

§4　第二阶段

第二阶段的两个标准是：(1)用于固定实验装置的两个螺钉之间的距离 $x+y$ 守恒，(2) $y+y'$ 的长度守恒，因为 y 的减少和 x 或 y' 的增加之间存在补偿。除此之外，还有能够快速理解箭头 Fa 和 Fb 的位移相等，因为这相当于说增量 Δx 和 Δy 相等：

Pie(7 岁 4 个月)　他是介于第一阶段和第二阶段之间的中间案例。他理解当 y 的长度减少时 y' 会变得更长。因此，当 y 被缩短，并且实验装置的一部分被遮住时，他马上理解了，"你增加了更重的重物"。但是，当我们(通过一根小棍子)向他展示 y 的长度减少时，他一开始无法推断出 y' 会变长，而且变长的部分与 y 减少的部分相等。问他是否能找到"来自 y' 的细线的末端"，他声称"哦！这里"(在 y' 上)，然后承认 $y+y'$ 的长度是恒定的。另一方面，由于缺乏传递性，他仍然拒绝接受弹簧的长度增量 Δx 等于 y 的长度增量 Δy："它会更大，因为有弹性伸展，而它(y')会降低。"

Ana(7 岁 4 个月)　他则与下面的案例一起，属于典型的第二阶段的被试。在他看来，距离 $x+y$ 似乎是恒定不变的，因为当弹簧伸展时，"细线(y)变少，弹簧变多了"。至于 y 增加的部分，它与 y' 减少的部分"一样多"，不多也不少。最后，箭头 Fa 和 Fb 的位移具有"相等的长度，因为它们同时移动：当它下降时，它也会推动那个(Fb)"，因此 $\Delta x=\Delta y$，"这里跟那里一样多"。

Flo(7 岁 4 个月)　距离 $x+y$ 保持恒定，"因为如果我们添加一个重量，它是一样的长度"。$y+y'$ 也是如此，"因为细线的长度始终一样"。至于箭头的位移，"如果那里变多，那么这里也会变多"，因为"拉着它们"的重量是一样的。

Jea(7 岁 6 个月)　路径 $x+y$ 恒定不变，"因为弹簧替换了细线"。箭头"覆盖着相同的路径：如果你悬挂重物，那里的细线没有弹性"。对于 Fa 的 2 个盒子，我们在 Fb 中也会有 2 个盒子，"因为细线的长度总是不变的，弹簧伸展了两个盒子的长度"。

Pac(7 岁 6 个月)　$x+y$"总是相同的路径：路径不会移动，它们可以被延长"。至于箭头，"如果我们放置相同的重量，它们就会覆盖相同的路径"。后来他预测，Δx，Δy 和 $\Delta y'$ 都相等。

Cur(8 岁 4 个月)　同样的反应："(Fa)被拉长了一个手指。我们可以通过放置的重量来衡量。你放了 100 克(自发的!)。——如果我放 200 克呢？——那将会被拉长两个手指。"在 Fb，y' 和 y 中，与在 Fa 和 x 中，反应都是如此。

Tri(8 岁 7 个月)　相同的反应(除了以克为衡量指标)，但方向相反：如果我们拿起放置的重物，"(x)也会变短两个手指，(y)将变长两个手指。这很简单

啊。——但你怎么确定的呢？——因为它(y')上升了”。

Mar(8 岁 7 个月)　两个箭头所移动的距离相等，“因为它们同时移动”。以及 Fra(8 岁 11 个月)：“因为重物使这两个同时移动。”

Lov(9 岁 5 个月)　他表示，长度增量 Δx 等于 Fb 的位移：“你怎么知道？——因为细线拉着它，少了一个盒子。”以及 Fal(9 岁 5 个月)：“我们放一个重物，它拉着细线，”这导致了相等。

于是，我们看到这些守恒和相等的一般性质，它们自然地构成了运算推理的一个方面。但是，也有因果性的观点，Jea 让我们认识到它的意义。无论多么含蓄，当 Jea 宣称[①]：“如果你悬挂重物，细线就在那里，它不具有弹性。”这从本质上相当于在说：重物对弹簧的动作，需以细线的工具性为前提，由于细线的长度恒定不变，伸展(x)或位移(y, y', Fa 和 Fb)无论是在下降的方向，还是在相反的方向，其长度是相等的。换句话说，拉力动作从下到上的依次传递，不仅使弹簧伸长，还产生了一系列从上到下的相等位移。正是基于对这一事实的隐含理解，8 岁的 Cur 能够在空间位移的数值和重量本身的数值之间，建立起自发的函数依存关系。这产生了一种新的函数组合模式，它既是因果组合，也是运算组合。因此，不是一系列并列的数对[如(z, x)，(z,($y + y'$))，(z,F)等]将一组类似的动作进行转换，每个动作都是自己发展的，这个阶段的所有变异都与其他每个变异相关，而且在两个方向上形成了共变，即动作的上升和连续结果的下降，而这一切几乎都是在瞬间发生的。这种数对组合背后的原理，不同于第一阶段的原理，因为在第一阶段中，存在一个优先数对(z, x)，其他数对都是一个一个增加而来的，而在第二阶段，被试马上就能意识到在重物(z)和弹簧(x)之间存在两个方向的媒介：正如 Lov 和 Fal 所说的，“是细线拉着”，这相当于在 z 和 x 之间，按照连续拉力动作(每个元素都拉着下一个)的方向插入数对(z, y)，(y', y)，(y, x)[以及(y', Fb)和(y, Fa)]，以及按照位移的方向插入相同的数对，只是顺序相反，即[(x, y)，(y, y')，(y', z)等]。

§5　第三阶段

最后这个阶段具有三个新的因素：(1)对相互依存作略显明确的表述，(2)宣称弹簧被连着或者被限制，从而对拉力动作的上升和位移的下降这一系统引入上限，(3)在建构具有比例性的共变关系时，取得运算上的进步：

Ham(10 岁 7 个月)　他给出了正确的等式，说“因为如果我们放上重物，这就使它们在那里和那里同时前进”，等等。不过，他明确表示，重物拉着所有东西，“弹

---

① 在§2 中，我们看到第二阶段的被试对此的反应。

簧拉回了细线”。他没有限制自己解释它的下降。

Ger(10 岁 10 个月) 他同样在心理层面尝试了两个方向的路径:“它下降到那里(z),它把它拉上去”和“它拉着弹簧,它下降(y)”。他在箭头的位移和重量单位之间建立了对应关系,同时他谈到,他不知道在这种特殊情况下它们是什么。

Cha(11 岁 2 个月) 他宣称,细线“不会伸展,会下降”,y'和 y 之间存在补偿,保持了“相等的长度”,而弹簧“会伸展,因为它被固定住了”。后来,他开始构建一个与重量成比例的空间位移的刻度。

Mei(12 岁 1 个月) 他明确地指出了动作的两个方向:“如果我放上一个重物,细线被重物拉着,重物的重力把弹簧拉出那么远(距离 Fa),之后,短线(y)下降到那里(y')。”但如果我们拿走重物,“它就会回到以前的位置,因为绳子又被弹簧拉回去了”。后来,他还为相应的重量构建了一个精确的“双倍”或“三倍”比例的刻度。

Sag(13 岁 1 个月) “当细线被拉着的时候,重量会拉长弹簧,这将使这里的短线(y)变小,”并且使 y' 变大。而“当我们增加重量时,我们会看到它下降了多少”,位移总是相等的,“因为如果它下降到这里($-y$ 和 $+y'$),那么弹簧会伸长相等的长度”。因此,对于双倍的重量,我们在 x 和 y'中将有“两倍的这个(单位)长度”,等等。

因此,这个阶段的标志是,被试考虑在 x 和它的连接点之间引入一个新的数对,并且能解释弹簧为什么“会伸展,因为它被固定了”,而细线“不能伸展,但会向下移动”(Cha)。这些现象在第二阶段已经比较明显,但直到现在才变得明确起来,其中的原因是,之前形成的圆形系统已经是闭环:重物对细线(Mei)发力,细线又将其传递到弹簧(Ger,Mei 等),接着,弹簧的伸展造成了细线的逆向位移,细线又拉着重物,还“限制”着弹簧(Ger)和重物的下降(Ger)。相反,如果我们减少重量,所有的东西都会上升(Mei)。这种因果循环表现为重量和位移的比例性,因为每个被试确实都建构出了不同重量和移动距离的正确刻度。

§6. 结 论

这个实验首先展示了一个函数,该函数大体上表达了与动作相符合的连接(客体对客体所执行的动作是特殊情况),构成了运算(例如,相等、守恒和比例关系)和因果关系(例如,在第二阶段变得明确的整体环形系统)的共同来源。实际上,这些函数在本质上表达了一种依存关系,而这些依存关系的组合,要么走向因果的或者解释的方向(作为物质连接系统的系统),要么走向运算或者蕴涵的方向(相等、补偿等的组合,被视为能够通过被试的动作而建构出来或者重构出来的几何实体)。

有些数对只是简单地表达了由初始函数所连接的两个项目之间的依存关系，但它们构成了上述组合的起始点：重物 z 拉着弹簧 x，或者 $x=f(z)$，在其他元素中，例如 $(z, y+y')$ 等，通过相同格式的应用，可以重新发现这个数对 (z, x)。因此，第一种类型的组合就从简单的数对并列，过渡为连续顺序（阶段Ⅰ），还没有将相互依存关系整合到基本的依存关系。那么，被试是如何从这种普遍缺乏协调的状态，前进到具有相互依存关系的组合的呢？

上文中的现象很有趣，因为它们为我们提供了一个渐进组合的例子，在这个例子中，被试同时依据因果性和运算，建构出了相互依存关系。从因果的角度来看，两个基本的发现是：(1)原因和结果之间的媒介；(2)整个动作集合可能发生反演，从运算的角度来看，有两个结构与之相对应；(3)依存关系的传递性；(4)位移和守恒。

(1)因果媒介出现在第二阶段（因为即使第一阶段的被试有时能觉察到它们，他们也没有认真考虑它们）[①]，并在第三阶段变得明确：重物 z 的重力通过细线 $(y+y')$ 作用于弹簧，反过来，被固定在 x' 的弹簧，伸展了 Δx，继而导致了相等的位移 Δy（和 Fa）、$\Delta y'$ 和重物的下降（用 Fb 衡量）。所以，从因果的角度来看，必要的媒介最终用拉力上升方向的数对 (z, y')，(y', y)，(y, x)，(x, x') 和位移下降方向［包括两个方向的 (y, Fa) 和 (z, Fb)］的数对 (x', x)，(x, y)，(y, y')，(y', z)，取代了并列的和简单的连续数对 (z,x)，$(z, (y+y'))$，(z, F) 等。然后，被试才认为这些数对是相互依存的关系，并不仅仅是一系列依存关系。

(2)这种整体结构，使其即使在顺序颠倒的时候，也能保持良好的结构。一方面，从第一阶段开始，被试虽然不是立即（参考 Cec 和 Fre），但还是能够理解某些局部的反演（如 Fre，但只有在观察之后），例如当拿掉重物时，弹簧会收缩。另一方面，在第二阶段，动作顺序的反演（与运算的可逆性不完全相同，但与运算的可逆性相对应，可逆性与反演是有区别的）在两个方向上都变得很普遍，也即，如果我们拿走重物，上升方向的拉力将减少，那么弹簧会收缩，而在向下的方向，y 变得更长，y' 的长度减少，Fb 上升。依存关系的数对保持不变，但差值 Δx，Δy 等走向了相反的方向。

(3)站在逻辑的或者运算的角度来看，这些函数的某种传递组合，对应于因果媒介的必要性，继而对应于物体的相互依存关系，而这样的相互依存关系正是数对的串联之起源。当然，因果关系并不是完全可传递的：如果 a 是 b 的原因，b 是 c 的原因，那么 a 只是 c 的一个条件。用函数依存关系的术语来讲，如果 b 取决于 a，c 取决于 b，则 c 也取决于 a，这就把两个简单函数联合成了一个复合函数。从这样的角度来看，函数数对的协调，可以采用一种运算序列的结构。

(4)最重要的是，物体的可反演性（原因容忍度）将采取运算可逆性的形式，继而采取补偿系统的形式：如果当增加重量时，y 减少，y' 增加，当拿走重物时，y' 减少，y 增加，

---

① 在§2中，我们看到，第一阶段的被试基本上仍未解决这一媒介问题。

这两种共变可以在两个方向上并存，那么被试的结论将是 $\Delta y'=\Delta y$，因为这两个共变的一般相互依存关系，暗含着这个等式。由于这只是一个位移问题，所以这个等式的可能性变得越来越明显，直到被试最终能够理解，在一个短线 y 或 y' 中减少的部分，必然由另一个短线所获得。于是，补偿导致了守恒。

最后，这种渐进组合在两个互补方面（即因果和运算），必然导致一个比例系统，该系统表现出三个阶段。在第一阶段，被试在观察"如果 x 增加，y 会减少或 y' 会增加"之后，已经有了初步的理解。尽管数量尚不清楚，但这已经是一个前比例关系（斯皮尔曼所使用的相关性），因为 x 的初始状态，也是 y 或 y' 的初始状态，而 x 的最终状态，也是 y 或 y' 的最终状态。在第二阶段，在补偿和守恒的影响下，差值相等：$\Delta x=\Delta y=\Delta y'$，等等。但是，由于将相互依存关系纳入基本依存关系，需要在重量和距离之间（更准确地说，是在 Δz 和 Δy，$\Delta y'$ 或 Δx 之间）建立函数关系，这导致了对等式的度量归纳。也即，重量的差值，基于重物（在 x，y，y' 或 F 上）所造成的距离差异。所以，第三阶段，相互依存关系最终将包含所有的依存关系，这早晚会导致比例关系（只要运算工具是现成的）。

第五章 从共性到共变:相等与不相等的估计[①]

我们接下来将要研究的函数,它既介入到运算,也介入到因果情境(正如第四章)。我们假设,在前面的实验中,字符串 Y 和 Y' 的片段刚开始是相等的,每个都是 5 个单位的长度,以致当 Y' 增加一个单位时,Y' 和 Y 之间的差值将是 2(=6−4)。如果重复相同的动作,那差值将为 4(=7−3),等等。在本章中,我们让一组弹珠从滑梯上滚下,从 C 点开始每次滚落 1 颗弹珠。如果在某一时刻,有 5 颗弹珠待在滑梯上,5 颗已经滚落到下层,那么弹珠随后的滚落将会产生 4 和 6、3 和 7 等搭配,分别代表两个集合。把各个元素从第一个集合不停地转移到第二个集合的过程,将会产生 0,2,4,6 等不同的差值。这个现象可能让年幼被试颇为费解,但它正是我们想要研究的问题。令 x 为 n 个元素(n=1,2,3 等)的转移次数,y 为两个集合的差值。那么,差值就由 $y=f(x)$ 决定,在上述这个例子中,$y=2x$。

但是,我们将在运算情境中提出这个问题,亦即,向被试提供客体的集合,使客体从一个集合转移到另一个集合,而由此产生的总和与差值完全源自被试的动作。从这些动作的因果层面(尤其是空间层面)中,我们可以分离出算术连接。这些连接甚至无须任何外部运动就能被建立起来。因此,我们希望从发生的角度发现这种函数的最简形式(但并不意味着最基础),并以此来分析该函数的稳步构成过程。

§1 技术和一般结果

我们根据儿童的年龄在其面前放置 1—4 个代币(所有代币的大小和颜色均相同,包括主试的代币),然后在主试面前也放置相同数量的代币。一旦被试赞同这两个集合是相等的,我们就说:"现在我要跟你玩游戏。我会拿走你的一些代币,和我的代币一起藏在我的手里。但是,由于你仍然希望拥有跟我一样多的代币,所以我会给你这个小盒子(一个敞开的装满代币的盒子),你可以从中拿走任意数量的代币,使你的代币跟我一样多。"开始时,我们先拿走被试的一个代币,当着被试的面把它藏在隔板下面(主试的左手已经遮住了其他元素)。因此,被试看到,我们在

① 由 A. 斯泽明斯卡和 J. 皮亚杰合作完成。

已有的代币上增加了一个(不必重新计算),他必须从代币盒子中取出合适数量的代币,使他和我们的这两堆代币一样多。随后,我们继续从被试那里拿走2个、3个直至5个代币,这要取决于他的水平。

接下来,我们会根据具体情况问被试三个控制问题。第一个问题是在实验过程中向被试提出的:我们不再从两堆4个代币开始,从中拿走1、2或3个代币,而是跳转到两堆10个代币,看被试是否使用不同的方法。从被试的代币堆中拿走1到n个代币之后,向被试提出第二个控制测试:继续或重新开始,但这次把从被试那里拿走的代币放入小盒子中,而不是放入主试的代币堆中。于是,函数$y=f(x)$变成了$y=x$。被试能否适应这种新情况,可以反映他是否理解前一种情况。第三,如果被试连续对主要问题做出正确反应,我们就会停止新的操作,问他以下问题:"如果你从小盒子中拿走n个代币(例如,如果你拿走2个),那我必须从你那里拿走多少,才能使我们俩拥有的代币一样多?"(这里1。)因此,这个问题涉及反函数,以致若从$y=n$开始,我们会发现$x=n/2$。如果主题难以理解这个问题,我们就只问他:"如果我从你那里拿走一个代币,你为什么必须补充两个?"当被试到达他当前能力的极限时,实验也就结束了。

从这个实验的结果中,我们可以区分出四个阶段。令x为从代币堆A(儿童)转移到代币堆B(主试)的元素的数量,y为使两堆代币相等所需要的元素的数量。第一个阶段(3—6岁)由两个子阶段ⅠA和ⅠB组成:在ⅠA子阶段中,除了非常小的代币堆(1或2)之外,我们使$y=x$;在ⅠB子阶段中,我们使$y=nx$,其中n是可变的,这个子阶段既缺乏理解,甚至没有规律。在各种中间反应之后,我们在被试身上观察到第二个阶段,其特点是被试得到了一定的规律,尽管他还不理解这些规律。这三个控制问题的作用,正是揭示5—6岁被试对实验任务无法理解的程度。在第三个阶段,我们看到被试逐步展示出对规律的归纳和发现。在第四个阶段(9—11岁),我们看到被试对规律的理解和明确演绎。

§2 第一阶段

本实验能得以开展的最早水平,自然是儿童能否通过知觉正确地判断两堆代币是否一样多。为了找到这个水平,我们以低至3岁的儿童为被试,元素数量不超过2—3个。下面是第一个水平(ⅠA)的一些例子:

Pie(3岁) 最多可以复制一排4个元素。我们给他2个代币($A=2$),并留下2个($B=2$),然后从他那里拿走1个代币($x=1$)。他从小盒子里拿走1个代币($y=1$),却不懂B为什么变成了3。另一方面,面对$A=B=1$和$x=1$,他拿走了$y=2$,因为他明白,如果他面前没有代币($A=0$),那我们肯定有两个。然而,如果我

们从 $A=B=2$ 开始，他再次只拿走 $y=1$，而这导致 $A=2$ 和 $B=3$。当我们再拿走 1 个代币时，他还是拿走 $y=1$，从而使 $A=2$ 和 $B=4$。“你和我的代币一样多吗？——是的”。我们用 $A=B=1$ 重新开始，他重复了相同的动作。

Arl(3 岁 6 个月)　面对 $A=B=2$ 和 $x=1$，他数次都拿走 $y=1$，使得 $A=2$ 和 $B=4$，然后 $A=2$ 和 $B=6$，并没有意识到 B 在增长。当我们再以 $A=B=1$ 开始时，他只拿走 $y=1$，这与 Pie 的表现相反。

Luc(4 岁)　另一方面，面对 $A=B=1$，他马上就知道应该拿走 $y=2$。但是，面对 $A=B=2$，他拿走 $y=1$，一直增加到 $B=6$。

Dur(4 岁 9 个月)　当以 $A=B=2$ 开始时，他每次都拿走 $y=1$，直到使 $B=5$。但是，当我们敞开代币堆时，他非常惊讶，并给 A 增加 3 个。“现在呢($x=1$，从而 $B=6$ 和 $A=4$)？——那样($y=1$)。一样多了。——(我们再次敞开代币堆。)——不，那样(他增加 1 个)。”我们继续同样的操作，每一次都拿走 $x=1$，直到 $B=12$。他都每次增加 $y=1$，但当他发现看到不相等时，他每次都表现出同样的惊讶。

我们重新以 $A=B=4$ 开始，尽管我们每隔一次都会向他敞开代币堆 B，但他的反应很相似，直到 $B=12$。当我们重新以 $A=B=3$ 开始时，他再次遵循 $y=1$ 方法，但当 $B=7$ 时，他经过几次观察后，对 $x=1$ 连续放两次 $y=2$。“为什么？——当我需要它时，我拿走 2 个。——你什么时候需要呢？——当你这样说的时候(=当你展示结果的时候)。——再看看(我们拿走 $x=1$)。——我把一个代币放在它的位置($y=1$)。——(我们敞开代币堆。)——哦，不对！”但他继续以同样的方式操作，直到 $B=14$。“我有多少个？——我们俩都有 8 个”。

Fra(5 岁 3 个月)　的反应与 Dur 极其相似。当我们敞开代币堆 B 时，他非常惊讶，但不明白其中的原因：“哇哦！——你需要做什么才能跟我拥有一样多的代币？——我不知道”。

当 $A=B=1$ 时，Pie 和 Dur 取得了成功(但这一成功尚未概括化，正如 Arl 的表现所示)。除此之外，我们发现，这些被试并不理解，把元素从 A 转移到 B，将会在减少 A 总数的同时增加集合 B 的数量。亦即，被试被拿走多少代币，他们就总是只从小盒子中拿走相同数量的代币(此处始终 $y=x=1$)，并确信自己维持了 $A=B$ 等式。当要求被试验证这一做法时，他们马上纠正自己，但既不理解这么做的原因，也不保存修正方法。简而言之，此处所涉及的函数只是 A 对 B 和 x 对 y 的双映射之应用，并没有考虑 B 的变化。

子阶段ⅠB 是连接第一阶段和第二阶段之间差距的桥梁，其特征在于，处于该子阶段的被试拥有一些中间的但更加稳定的反应。在子阶段ⅠB，被试有时会感觉代币堆 B 变多了，在这种情况下，他拿走 $y>x$。但是，由于他不理解 x 和 y 之间的关系，这些不相等是偶发的和暂时的：

Tis(4 岁 6 个月) 面对 $A=B=2$ 和 $x=1$,他刚开始拿走 1 个代币:“像这样,一样多吗?——是的,不是(他替换 1 个)。——一样多吗?——是的。——确定吗?——不(他移走 1 个)。——现在一样多吗?——是的,因为我有 2 个代币(A)。——我也是这样吗?——是的……不(他增加 1 个)。——确定吗?——是的。——现在呢(我们移走 $x=1$)?——那样(他拿走 $y=1$),这就和你一样多了。——现在呢(我们拿走 1 个)。——我拿走 2 个。——为什么?——因为你有很多。”我们继续,但他仍然只增加 $y=1$。然后我们敞开代币堆($A=10$ 和 $B=4$):“哇哦!”我们重新以 $A=B=5$ 开始,拿走 $x=1$:“我拿走 1 个。——为什么?——因为你有 5 个(他忘了 x)。——现在($x=1$ 和 $y=1$)我有多少个?——5 个。——那现在(新的 $x=1$)呢?——我放 2 个,因为你有很多。”但是接下来,他继续放 $y=1$,直到有了新的验证:“哦!——看看这里(我们再次以 $A=B=2$ 和 $x=1$ 重新开始)。——我替换 1 个,只替换一个。这样你就和我一样多了。——你怎么知道?——我会数数。”我们以 $A=B=1$ 重新开始,他在自己的代币被拿走之后,替换 $y=1$。他继续数次 $y=1$,然后突然说:“不,再来($y=3$),因为你有那么多。”随后,对 $x=1$,他有时拿走 $y=1$,有时再次突然拿走 $y=4$:“我会数数,我知道你有很多(其实存在区别)。”

Fri(4 岁 11 个月) 面对 $A=B=1$,他刚开始拿走 $y=2$,然后过渡到对 $x=1$,拿走 $y=1$。当我们敞开 B 时,他非常惊讶。在接下来的转移(所有 $x=1$)中,他拿走 $y=2$,随后 $y=3$,准备拿走 $y=4$,但要求看看当他放 $y=3$ 时的结果(此时集合 A 有 10 个元素,B 只有 7 个!)。

Jol(4 岁 1 个月) 他的反应与 Fri 很像,但在拒绝做出任何预测(“我不知道,让我看看”)之后,他增加 $y=2$,然后 2+5,并最终以 $A=10$ 和 $B=5$ 结束!

这些被试刚开始的反应与ⅠA 水平的被试很像,但是新的重要表现是,当我们用隔板遮住代币集合 B 时,被试记住了他们自己的经验,并且提高 y 的数量来增加 A。然而,由于他们还不能理解共变的量化值,他们只能定性增加,承认如果 B 的绝对增量越大,那么 $y=B-A$ 的差值肯定也会越大。

§3 第二阶段

第二阶段标志着,在 x 和 y 之间的共变中,规律开始出现,且被试对简单问题的最初反应是正确的。但是,当我们提出控制问题时,我们所收到的答案不仅表明被试尚未理解函数(第三阶段亦是如此),实际上还使被试感到混乱,将之带回第一阶段的反应水平。在这一点上,我们将区分出几种类型的反应。我们还不能将其分为子阶段,因为它们差不多是同期发生的。被试的第一类反应(ⅡA)是指,当 A 和 B 很小时,对 $x=1$ 接

受 $y=2$，但是当我们使用大集合时，他又恢复到 $y=1$：

Sob（4 岁 10 个月） 对于 $A=B=3$，当我们拿走 $x=1$ 时，他拿走 $y=1$，但马上自发地更正为 $y=2$。他继续正确操作："我每次拿走两个。——为什么？——因为你有 8 个（这是对的，是他通过数他在 A 中的代币数量推演出来的）。"我们尝试第二个控制测试，拿走 1 个代币，并将其放进小盒子中，而不是放进 B：他并没有掉进陷阱①，只拿走 $y=1$，然后当我们从 A 向 B 转移 $x=1$ 时，他再次开始拿走 $y=2$。随后，我们过渡到 $A=B=17$："我拿走 1 个（在 B 中 $x=1$）。——我替换 1 个（$y=1$）。——为什么是 1 个？——因为你从我这里拿走了 1 个。"他继续 $y=1$，直到 $A=17$ 和 $B=23$。然后我们回到小代币堆 $A=B=2$：对于 $x=1$ 他立即拿走 $y=2$，直到 $A=B=6$。但当我们跳到 $A=B=10$ 时，他又开始拿走 $y=1$！

后来，我们试着增加 x。面对小代币堆的测试，他做出了正确反应（$y=2$ 代表 $x=1$）。之后，我们拿走 $x=2$："我放 3 个。——为什么？——因为你有太多代币了。"

从多方面来讲，这些反应都很有趣。当我们从 $x=1$ 到 $x=2$ 时，Sob 错过了比例 $y=4$。这个反应也很正常，不过他确实增加了一个代币（他拿走 3 个，而不是 2 个）。当我们接下来使用大集合（$A=B=17$ 或 10）时，他并没有像ⅠB 水平的被试那样增加 y。ⅠB 水平的被试相信，差值将会随着 A 或 B 绝对数量的增加而增加。而 Sob 却犯了相反的错误，该错误在某种意义上还挺聪明的：他判断，两个大集合 A 和 B 之间的绝对差值，要比两个小集合之间的差值更小（韦伯定律！），所以他减少了差值，对 $x=1$，从 $y=2$ 过渡到 $y=1$。

类型ⅡB 的被试与类型ⅡA 很像，他们刚开始的反应也是正确的。但在回答第二个控制问题时（代币被拿走放回小盒子里），他们像 Sob 一样感到混乱。虽然他们接下来不能重新适应主要问题，但他们成功地完成了任务：

Mor（6 岁 11 个月） 从 $A=B=2$ 到 $A=B=9$，每次 $x=1$，他都拿走 $y=2$。"如果我这样做呢（把一个代币从 A 中拿走并放回小盒子里）？——（他刚开始连续拿走 $y=2$ 两次，然后改变了想法）：我只放一个代币，因为你把它放在那里"。但是，当我们回到从 A 转移到 B 的情境时，他始终拿走 $y=1$。我们以 $A=B=2$ 重新开始，他表现出一系列相同的反应，包括听到控制问题后所表现出来的混乱。最后，当我们把转移数量从 $x=1$ 增加到 $x=2$ 时，Mor 的反应与 Sob 很像，他拿走 $y=3$ 而不是 4。

这些例子表明，即使被试理解了转移数量 x 和小集合的差值 y 之间的函数，他也只能依靠归纳来保存该函数，尚不能理解它的必然性。当我们向被试呈现另一种函数时，他只需从代币盒子中拿回我们刚放进去的代币（在从他手头拿走之后）。在这种函数

---

① 因此他明白，他只需从盒子里取回我们刚刚从他那里拿走的代币，并放在那里。

中,我们引导他回到他之前中断的地方(对于 Mor,9 或 10 个元素),从 A 向 B 转移代币。但是,他不知道该遵循哪条规则,他停在 $y=1$。

第三类反应(ⅡC)更加有趣,因为此时只要求被试做出解释即可(第三个控制问题)。但这一提问常常使被试感到困惑,打断其归纳过程。

Cur(5 岁 4 个月) 从 $A=B=2$ 至 $A=B=11$,对 $x=1$,他每次都拿走 $y=2$。"你拿走多少个?——2 个。——我呢?——1 个。——为什么我拿走 1 个时,你要拿走 2 个?——我不知道。——那我们俩一样多吗?——不是。——谁的更多?——我。——为什么?——因为我拿走了 2 个。——(我们又拿走 $x=1$)现在呢?——我拿 1 个。——我们一样多吗?——不"。我们重新从 $A=B=2$ 开始,他恢复到 $y=1$,当集合变得很大时,他随之变为 $y=2$,但不能解释其中的原因。

Car(5 岁 3 个月) 他的反应完全相同。当我们从 $A=B=6$ 开始时,他停在 $y=1$。当我们回到 $A=B=2$ 时,他理解了,并马上做出正确反应($y=2$)。但是,当我们让他解释他在 $A=B=5$ 中的反应时,他再次困惑,又回到 $y=1$ 系统。

这些例子再次表明,被试一旦超越了小集合,就能够进行归纳,无须理解其中的原因。这个归纳过程的经验特征此时更加明显,因为它足以使我们向被试发问,问他为什么在 $x=1$ 时会选择函数 $y=2$,且在无法解释原因时,拒绝概括化,又回到 $y=1$。

此外,我们还在被试身上区分出第四类反应(ⅡD,介于第二阶段和第三阶段之间)。这些被试虽然不受到控制问题的干扰(他们已经成功回答前两个问题,只是未能给出原因),但当我们鼓励他们对 $x=2,3,\cdots,n$ 做概括时,他们又恢复到当 $x=1$ 时拿走 $y=1$:

Git(6 岁 10 个月) 对 $x=1$ 总能做出正确回答,但还不能说明原因。当我们转移 $x=2$,他再次拿走 $y=2$(多次)。当我们回到 $x=1$ 时,他拿走 $y=1$,尽管他以前从未犯过这个错误。

总之,第二阶段的结果表明,被试可以理解由 1—3 个代币的小集合所构成的函数。随着集合的增大,尽管这一函数变得越来越难以理解,但是被试仍可以通过归纳而将之概括化。因此,运算层面的这种状态,对应于物理客体层面的变化,即被试开始对规律进行归纳,而不是做因果解释。

§4 第三阶段

这个阶段包括规律和归纳概括化,它从 $x=1$ 时 $2y$ 慢慢过渡到 $x=n>1$ 时 $2ny$。不过,由于这一过渡过程是逐渐发生的,我们可以区分出以下几个步骤。在水平ⅢA,被试对 $x=1$ 能做出反应正确,不受控制问题的困扰,但对 $x>1$,他每次都恢复到 $y=x+1$:

Laf(6岁1个月) 对 $A=B=3$ 和 $x=1$，拿走 $y=2$："我猜：我有3个，你拿走1个。"他继续同样的操作，直到 $A=B=7$："你拿走多少个？——2个。——我呢？——1个。——为什么？——为了跟你一样多。——如果我把它放进那里(代币盒子)呢？——你必须替换它(他给 A 拿了1个)。——现在呢($x=1$，从 A 到 B)？——我拿走2个。"等等，一直到 $A=B=13$。"现在再看看($x=2$)。——我拿走3个。——为什么是3个？——因为你拿走了2个。——那这样呢($x=1$，放回代币盒子)？——1个，因为你放了1个进去(代币盒子)，你必须在这里(A)替换它。——现在呢？——2个，因为你放了1个在手下面。——那现在呢($x=3$)？——4个。你拿走3个，所以为了一样多我要拿走4个"。

Sut(6岁8个月)和Lop(6岁11个月) 他们做出相同的反应，能够清晰地区分代币是去了小盒子还是去了 B，而且能对之进行概括：2对1，3对2，4对3，等等，即所有情况下都是 $y=x+1$。

Chu(8岁7个月) 他的反应也很类似，其唯一的解释是："因为你拿了2个，所以我拿走3个；为了跟你一样多。"

看来，对于 $x=1$，被试能够很好地理解规律 $y=2x$ 并将之概括化。但是当 $x>1$ 时，规律就变成了 $y=x+1$，缺乏比例关系。而且，被试不能区分 x 的序数序列和 y 的基本值(或者对它们感到困惑)。

子阶段ⅢB表现出少许的进步。在这个子阶段中，尽管被试是通过试错才完成当 $x=2$ 时 $y=4$，但他将当 $x=3$ 时 $y=5$ 概括为 $y=x+2$：

Gis(6岁8个月) 从 $A=B=4$ 到10，他对 $x=1$ 的反应都是正确的："我总是拿走2个，你总是拿走1个。——为什么？——你的比我多(他的意思是，当 B 增加1个，A 就减少1个)。——那要怎么做呢？——你拿走1个，我就必须替换2个。"如果把代币放进小盒子里："我拿走1个，因为你把它放回盒子里了。"对于 $x=2$，他开始拿走 $y=2$："为什么？——你拿走了2个。哦！(他加了1个，因而 $y=4$)。——(再次 $x=2$。)——这次我要加4个，"等等。但是对于 $x=3$："我要拿走5个，因为你拿了3个。——那你有几个？——14个。——那我呢？——14个。——是吗？——哦！你有17个。"他增加1至3个，使 $y=2x$，但下次测试时，他又恢复到当 $x=3$ 时 $y=5$。

我们看到，被试已经开始理解当 $x=1$ 时的规律，并且偶尔也能够理解 $x=2$ 甚至3时的规律。但是通常情况下，只要 $x>1$，他们就只会采用经验归纳。在ⅢC水平，被试马上就能理解当 $x=2$ 时 $y=2x$，就像 $x=1$ 时他们的反应一样。但从 $x=3$ 开始，被试又恢复到近似归纳法：

Gen(6岁9个月) 从 $A=B=4$ 到14，对 $x=1$，他始终能答出 $y=2x$。我们转移 $x=2$，他立即拿走 $y=4$。他是这样解释的："如果你拿走1个，那个之前是我的，你多了1个(所以 $y=2$)，"但如果 $x=2$："你拿走2个。——所以？——你多了

2个(而我少了2个)。——那假如这样呢($x=3$)?——这很难!这次你还需要1.5个(他犯了方向性错误,他用了除法而不是乘法)。你需要5个,(因而)多2个。——为什么是5个?——你拿走3个,所以我少了3个;为了跟你一样多,我拿回5个。——为什么是5个?——……——那($x=4$)呢?——我拿走6个,你拿走4个,给我的少了,所以我拿回6个。"

Rou(8岁6个月) 同样能够理解当$x=1$时$y=2$的原因:"你拿走1个(在B中),你从我这里拿走1个(在A中),所以为了和你一样多,我要拿回2个。"对于$x=2$,他最初回答$y=3$,但马上说:"不,是4个,你必须把之前的都算进来(即在B中$+2$,在A中-2)。"他坚持这条规则,并且理解它。但对于$x=3$,"我拿走5个,那就多出2个。——如果我拿走4个呢?——那就拿走6个"。然而接下来,他发现当$x=3$时$y=6$:"所以6使它们数量相等($x+x$)。"但在回到$x=1$和$x=2$的任务之后,他又恢复到这样的方案:当$x=3$时$y=4$。

所以,这个水平的特征是,被试从序数方案$y=x+1$过渡到另一种方案。尽管后一个方案还不是比例关系($x=2$除外),但它在某些方面超越了序数关系,即y的增量是x的函数。不过,由于缺乏对A和B的充分的数量估计,y的增量是以加法在增长。

最后,第四个子阶段ⅢD的标志是被试发现了$y=2x$这一规律。只是,被试所采用的又是归纳过程,而不是第四阶段中的演绎建构过程:

Jan(6岁5个月) 开始时对$x=1$拿走$y=1$,经验证之后一直保持在$y=2$。当我们转移$x=2$时,他马上拿走4个:"否则就不一样多了。"我们回到$x=1$,然后$x=3$:"6个。当你拿走3个时,我要拿走6个,那样就一样多了。"我们跳到$A=B=17$,对于$x=3$,他仍然拿走$y=6$。

Jac(6岁6个月) 开始时对于$x=1$,他说:"我知道怎么做。我必须拿走2个,这样才一样多。"对于$x=2$,他开始拿走$y=3$,说"我觉得这不对",然后他拿走4个:"为什么?——为了让它一样多。"对于$x=3$,他马上拿走6个,并且在一排中重复了3次。"那($x=4$)呢?——哇哦!4个,我必须拿走8个。——为什么?——为了使它一样多。——那($x=5$)呢?——我必须拿走10个"。

Lac(7岁10个月) 对于$x=1$和2,他马上就拿走$y=2$和4。对于$x=3$,他试着计算代币堆B中所隐藏的个数,然后拿走$y=6$。对于$x=4$,他马上拿走8个:"你是数出来的吗?——不是,$4+4=8$,我是心算得来的。"

Car(8岁4个月) 开始时对$x=1$,他拿走$y=1$,但发现有问题。当我们敞开代币堆B时,他随即只拿走$y=2$。对于$x=2$,"我要拿走4个,因为你拿走了2个:所以我拿走4个来替换2个"。我们再次以$A=B=6$和$x=1$开始,然后$x=2$。他拿走4个,"因为你拿走2个,我要拿回双倍。——如果我拿走4个呢?——我拿回8个。——为什么?——我拿回双倍。我不能只拿回4个,那样我就不够多。——那($x=3$)呢?——拿回6个"。但是,我们仍不确定他是否真的理解其中

的原因。因为直到实验即将结束,无论我们把拿走的 1 个代币放在 B 堆还是放回代币盒子,他的反应都是拿走 $y=2$。

因此,我们观察到整个过程:对于小集合 A 和 B 以及转移数量 $x=1$ 或 2,被试已经能理解其中的确切关系,这种理解引发了归纳的概括化,随后,概括化又使被试掌握了函数 $y=2x$,此时 x 可以是任意值(也不必夸大:x 值最高可到 4 或 5)。然而,这一归纳仍然缺乏必要性。而且,尽管被试所发现的规律有时会不断出现,但这一规律仍缺乏建构性的演绎。非常明显的例子是,有个被试明确地提到了"双倍",但他仍然不能回答其中一个控制问题。

§5 第四阶段和结论

在最后的阶段,我们观察到"完全归纳法"——这个术语有时被庞加莱用来表示反复推理,即一种建构性的演绎。对必要性的建构性演绎,使被试把对前面的数字的解释,概括到后面的数字上。我们再次区分出两个子阶段:在ⅣA 水平,被试依靠具体的重复;在ⅣB 水平,被试则依赖于形式化的解释。以下是水平ⅣA 的例子:

Fer(8 岁 1 个月) 对于 $A=B=4$ 和 $x=1$,他马上拿走 $y=2$,"因为你从我这里多拿走 1 个(比 A,必须开始),如果我只拿走 1 个,那我就比你少 1 个"。对于 $x=2$,"4 个,因为你拿走了 2 个。否则我就比你少 2 个"。对于 $x=3$,$y=6$;对于 $x=4$,"8 个,否则我就比你少 4 个"。如果拿 4 个放回代币盒子,"我要拿 4:当你放 4 个在你手下时,你多出这些,所以我也要拿回这些"。对 $x=5$,$y=$"10,因为你拿走了 5 个"。

Duv(8 岁 2 个月) 他的反应与 Fer 类似,但他表达的意思更加清晰:"当你拿走 1 个代币时,你的代币堆多了 1 个,而我的少了 1 个。"对于 $x=2$,$y=4$,因为"当你拿走 2 个代币时,你多了 2 个,而我少了 2 个"。等等。

Dev(8 岁 6 个月) "你已经有 1 个(当把它从 A 拿走,变成了 9 个),你拿走 1 个,那么你多了 2 个,所以我拿走 2 个。"对于 $x=2$,$y=4$"因为你拿走 2 个,所以我比你少 4 个"。对于 $x=3$,同样的原因"那么我必须拿走双倍",等等。

下面是水平ⅣB 的一些例子:

Kim(9 岁 3 个月) 对于 $x=1$,他刚开始的反应与 Duv 和 Dev 类似。从 $x=2$ 开始,他进行概括:"为了使我们一样多,我要拿走 4 个,我们总是拿走双倍的数量。"对于 $x=3$ 和 5 等,他做出相同的反应。

Alb(9 岁) "我必须拿走双倍,1 个(一半)与之前(A 中)的数量相等,另 1 个被你拿走(到 B 中)。所以我必须总是拿走双倍。"

Mat(10 岁 9 个月) "我必须拿回你拿走的数量,以及你多出的数量。"如果从

A 中拿出 2 个代币放回小盒子里，他说："我拿回 2 个，因为你的并没有增加。"

Iac(11 岁 7 个月) "每次都要拿双倍：(对于 $x=4$)你多了 4 个，而我少了 4 个。"

所以，到此为止，我们已经到达了这一发展过程的终点。而且，该发展过程的框架似乎很明确。虽然被试刚开始并不怀疑将 n 个代币从一个集合转移到另一个集合会导致它们之间的差值是 $2n$，但他起先也只在某些情况下才能确定这种关系，而不能将之应用于其他的集合。随后，他逐渐开始进行概括，直到他通过反复归纳发现了完全普遍性。至此，他终于找到了原因(ⅣB)。

从函数的角度来看，这引出了两个问题：(1)被试最初缺乏理解的原因是什么(涉及"构成性"函数)；(2)被试如何将函数不断整合进一种运算结构(涉及"构成化"函数)，而该运算结构将会提供原因。

一、初期，被试缺乏足够的理解，并且强烈倾向于相信，把 n 个代币从一个集合转移到另一个集合将会导致两个集合的差值是 n 而不是 $2n$，这引发了共变的一般性问题。非函数关系只是比较所带来的结果，与之不同，函数却总是表达某种依存关系。其实，在这种特殊情况下，我们的被试全都没有怀疑，计算差值 y 要"依赖于"转移数量 x。然而，函数 $y=f(x)$ 中 y 和 x 之间的依存关系，可能表现为两种形式。至于究竟表现为其中哪一种，则取决于动作(函数表达了它的格式)是否倾向于转换它的客体，抑或只是再次发现它、再现它，或者通过等价来替换它。在后一种情况下，函数采用了简单应用的形式，依存关系被表达为某种"共性(coproperty)"。但是在前一种情况下，被试对函数进行转换，依存关系则被表达为某种"共变(covariation)"。因此我们承认，在当前反应的第一阶段，年幼被试由于认定 $y=x$ 而不是 $2x$，忽略了两个集合 Y 和 Y' 之间的共变关系，而将自己引向某种特殊的共性。这是为什么呢？

正如我们倾向于相信的那样，其中的原因并非仅基于这一事实——其中一个集合总是可见的，而另一个集合被周期性地遮蔽起来。事实上，正如我们将在下一章中看到的，即使两个集合都一直是可见的，并且任务是使两个集合的数量不相等，被试们的反应仍是一样的(在那个实验中，当年幼被试转移 n 个代币时，他们预估差值应该是 n。所以当他们总是得到差值 $2n$ 时，他们显得非常惊讶)。而在我们看来，原因来自于以下事实：在两个系统之间的关系中，寻找单向动作比寻找双向运动(包含往返动作)要更容易。它还可以解释这件事：在因果领域，人们接受反应、相互作用、循环因果和反馈等概念，通常比接受线性因果要花更长的时间，尽管线性因果在实际中很少出现。在运算领域，当前的例子是类似的。对于两个由相等代币集合所组成的系统，被试要么专注于那个减少 n 个元素的系统，忽略了另一个系统的增加，并拿回 n 个元素重新建立相等(正如本章所示)；要么专注于那个增加 n 个元素的系统，忘记了前一个系统存在相应的减少(我们将在下一章中看到)。换言之，被试的动作(以及后来的推理)是单向的，他试图在他所失去的东西和他必须恢复的东西之间寻求相等，即主要考虑共性 $y=x$，而不是

马上思考共变或相互依存的格式。

二、被试从关注共性过渡到理解函数 $y=2x$ 并对之作演绎的理性解释，这个过程是非常艰难的，因为被试必须从简单函数过渡到对函数的解释，而只有解释才能赋予函数必要性的地位。首先，这个函数作为事实被观察到和使用(第二阶段，且概括化到第三阶段)，但是除了与被试的动作所带来的结果有关之外，它只被作为一个类似于物理归纳的归纳过程。然后，这一函数被概括化到整个数字集合(水平ⅣA)，但因此只获得“始终为真”的状态，这与内部必要性还不一样。要达到内部必要性，一个人必须既能区分两者，还能使它们协调，正如被试 Mat 所做的，“你从我这里拿走的东西，和你多出来的东西”，即使它们是同一批代币。换句话说，同一个数字 n 涉及两种形式，其一是从系统Ⅰ中减去的 n，其二是在系统Ⅱ中加上的 n'，于是差值 y 即 $n+n'=2n$。甚至，对于任何转移数量 x，我们都有 $n\equiv n'$。① 在这种情况下，函数 $y=2n$ 自身就不再足够，它也不再只是被观察到，即它被整合到一个运算系统中，而且它表达了该系统的共变，正是这个系统赋予它必要性，因为它自身仅仅只是一条规律(在这种特殊情况下，动作协调的规律，但它可以表达其他情况下的物理定律，正如我们在本章引言中所指出的那样)。因此，我们从构成性函数演变为构成化函数，就像从简单函数过渡到运算组合，也正如在其他领域，我们从函数定律过渡到因果关系。

① $n\equiv n'$ 表示两个项目不仅相等，而且完全一样。

第六章 差值的组合:不相等的划分[①]

上一章探讨了一种基础函数,它既具有因果性,也具有运算特征,而且我们还分析了它不断进步的运算方式。我们从中观察到,被试自7岁左右开始,逐渐能够归纳和发现其中的潜在规律。本章的兴趣点在于探讨一种更复杂一些的函数,它包含我们之前研究过的函数。换句话说,我们将研究函数的运算组合。在这方面,下面的任务是有用的:假定一个数值为 x 的集合,它被划分为两个不相等的部分,两个部分的差值为 x',要求被试确定这两个部分的数值 y 和 y'[②]。例如,若将30个代币分给两个男孩,其中一个男孩比另一个多得了6个代币,那么任务目标就是发现一个男孩应该分得了18个,而另一个应该分得了12个。显然,如果两个部分相等(15个和15个),那么一个男孩必须从另一个那里拿走3个代币,以便使差值3+3=6,这就又回到了前一章中所提出的问题。

事实上,探索两个部分的值 y 和 y',存在两种可能的方法,即(如果 x 是它们的总和,x' 是它们的差值,x 和 x' 是给定的变量,y 和 y' 是要计算的变量):

(1) $$y=\frac{x}{2}+\frac{x'}{2}=\frac{x+x'}{2} \quad 和 \quad y'=\frac{x}{2}-\frac{x'}{2}=\frac{x-x'}{2}$$

或者

(2) $$y=\frac{x-x'}{2}+x' \quad 和 \quad y'=\frac{x-x'}{2}$$

我们注意到,在方法(1)中,两个集合之间的差值必须除以2,这与第5章中的任务恰好构成互反。此外,尽管这种组合看起来很复杂,但它其实只包括加法、减法和二等分,而上一章中涉及的问题也只包括加法、减法和加倍。因此,尽管存在一定的滞差,但是这两类任务所涉及的运算是相同的,本章所观察到的各个阶段也与上一章的阶段紧密对应。

---

① 由A.斯泽明斯卡和J.皮亚杰合作完成。

② 划分必须被自然地穷尽。

§1 技术和一般结果

由于我们的目标是揭示这些函数的组合的运算机制 y 或 $y'=f(x, x')$，所以我们通过具体的例子来提出这个问题。不过，在转向对客体做实际操作、并基于经验观察进行归纳之前，我们要求被试先根据口算或者笔算来给出一个演绎性的解决方案。

首先，我们在儿童面前摆放了一组代币（共 30 个），并以故事的形式问他一个问题。故事情节是：一个母亲有两个儿子 A 和 B，她要把这些代币分给他们，但由于某种原因（比如 B 之前分得了更多，等等），她希望 A 比 B 多得 6 个。因此，任务是找出 A 和 B 每人将会分得多少。允许被试随心所欲地查看代币，但不允许他们摆弄代币。要求被试必须给出解决方案，不管是通过口算还是笔算。如果被试无法完成这个任务，我们将呈现一个更加简单的问题，即他必须把 10 个代币分为两部分，使它们的差值为 4，而且同样既可以使用口算，也可以笔算。如果被试已经完全展现出他的演绎能力，但是仍未获得成功，我们会要求他通过摆弄代币的具体方法来解决同样的问题。

如果被试在具体方法上仍有困难，我们将继续提供各种基础的分配任务，这既是为了判断被试的水平，也是为了促进他随后的解决方案：(a)从 1 到 3 个代币，"多出多少个？"(b)"你必须在这边(1)增加几个，才能使它与'那边'(3)一样多？"(c)"如果我们想让两个男孩的代币数量相等，你必须从这边(3)拿走多少放到那边(1)？"很明显，问题(c)与上一章中提出的问题是一样的。

我们可以区分出以下四个阶段，这些阶段与第五章的各个阶段大体上相对应。不过，由于我们预计实验任务的难度更大，所以我们只考察了 7—13 岁的儿童。然而，因为我们在 7 岁被试身上仍然发现了第一阶段，所以这并不是很重要。第一阶段的特点是两类反应，其中第二类反应与第五章第一阶段的反应完全一样。这两类反应是，被试要么把 x（给出的总数）$+x'$（给定的差值）来作为总数，然后将 $x+x'$ 简单地除以 2；要么把 x 二等分，然后将一半加到差值 x' 上。实际上，这与引入两倍差值 $2x'$ 是一样的。在第二阶段，被试从类似的解决方案开始，但被试通过经验性的试错，只取得了部分成功，而且未能将成功经验推广到后续任务中。第三阶段（参见第五章）再次涉及函数的不断进步的归纳性发现。最后在第四个阶段，被试在操作代币之前就已经通过演绎找到了解决方案，其中，演绎以ⅣA 水平的具体运算和ⅣB 水平的纯粹计算为基础。

§2 第一阶段

下面的例子展现了初始的非协调状态：

Rit(7岁1个月) 在30个代币的所有计算任务中都未取得成功。对于x=10个代币，差值x'为4，他先给出2和7，然后给出5和9，此时差值x'为4，但总和为14。然后，我们邀请他操作代币，于是他将10个代币二等分，并给出5+4=9(对A)和5−4=1(对B)。"(A)多出多少个？——(他做计算)8个。——你需要多少个？——4个(他向B返还4个，于是5=5)。——但你要让他多4个。——我给(A)1个，那么(A)有6个，而(B)有4个。——那(A)多出几个？——1个(他从B拿走2个给A，于是A和B分别为8和2)。——(A)多出几个？——4个。——他有多少个代币？——8个。——(B)呢？——2个。——所以呢？——[他向B返还4个，使A和B相等，即5=5，并给(A)4个代币！]"。

另一方面，他能够正确分配3个代币(当x'=1)，即分2个给A，1个给B。对于5个代币和x'=3，他分3个给A，2个给B，但由于差值x'只有1，所以他将2个代币从B转移到A，结果A和B分别为5和0，于是他又从A拿走2个代币到B，再次出现A=3和B=2的结果，等等。他似乎无法完成任务。对于4个代币和差值x'=2，他刚开始分2个给A，2个给B，然后将2个代币从B转移到A，使A=4和B=0，随后他又重新开始，却没有找到更好的解决方案。我们向他演示解决方案，他模仿出3个和1个的结果。接着，我们再次要求他对5个代币做分配(x'=3)，他像之前一样，分3个给A，2个给B，然后转移2个，使得A=5和B=0。最后，他终于发现，从A中拿走1个代币给B，他得出了4和1。然后，我们让他分配7个代币，且要求多分3个给A：他先把3个代币放到一边，将剩下的4个代币中的3个给A，1个给B，然后他给A加上之前的3个代币，使得A=6和B=1；随后，他重新开始，最后分4个给A，3个给B，接着，为了使x'从x'=1变成x'=3，他从B到A转移了2个代币，但这时又变成了6和1。他放弃了。

Cob(7岁6个月) 对30个代币和差值x'=6进行了笔算。他分一半给A，并给A额外加6个，这使得总数x=36而不是30。然后，他摆弄代币，但仍然不能成功地完成任务。对于x=10和x'=4，他的结论是A将有14个代币，而B有10个，随后他将10个代币划分为5和5，并且转移4个，这使得A=9和B=1："那样不行，"他从A拿走5个给B，得出4和6："它多了2个，"所以他将这2个拿走，又得出6和4。于是，我们让他分配x=4和x'=2，他正确地找到了3和1。接着是x=5和x'=3："一个人有4个，另一个人有1个，那他多出3个。"在成功完成这些任务之后，我们让他分配x=8和x'=2。他先把它分成4+4，然后转移2个，得出

6和2,但他就是不能完成该任务。

Zer(8岁2个月) 在任务 $x=3$ 和 $x'=1$ 与 $x=5$ 和 $x'=1$ 中,他都能成功地分配代币。但对于后者,他先将代币分为4和1,然后调整为3和2。对于 $x=4$ 和 $x'=2$,他先后分为2和2,4和0,2和2,4和0,最终放弃。因为他还不明白,当他转移2个代币时,差值是4。我们向他展示3和1,然后让他分配10个代币,差值为4:他先给出6和4,然后转移4个,得出2和8,然后反向转移4个,又回到6和4,等等。他放弃了。

Ler(9岁4个月) 尽管他年龄更大,但他的表现并没有更好。对于 $x=30$ 和 $x'=6$,他算出14和10,忽略了其余的代币。对于 $x=10$ 和 $x'=4$,而且允许操作代币,他刚开始分为5和5,转移4个之后得出了9和1:"哇哦!我没想到会只剩下1个!"他重新以5和5开始,然后又得出9和1。于是,他试着转移1个或2个代币,从而得出4和6,2和8,随后又回到4和6,接着他放弃了。

这些事实再清楚不过了。当被试在心里做计算时,他忘记了整体。比如Cob,明明只有30个代币,但他最后得出36个代币。还有Ler,他只计算了24个代币,忘记了其余的代币。当允许被试摆弄代币时,他们通过转移而有所进步,但是仍然无法理解当转移 n 个代币时,他们必然会得到差值 $x'=2n$ 而不是 n。这与上一章实验中的第一阶段的反应完全等价,但是却重要得多,因为此处并没有用于遮蔽的隔板,两个集合 $A(y)$ 和 $A'(y')$ 都是可见的。被试只有在面对3到5个代币的小集合时,才能给出正确的解决方案。该解决方案依赖于知觉,而不是推理(甚至不是普遍性的:参考Zer在 $x=4$ 和 $x'=2$ 任务中的表现),因此不能被推广到较大的集合8或10中去。

§3 第二阶段

与上一章的第二阶段相对应,此处第二阶段的特点是,被试通过经验发现了某些分配方法,但是却仍不能将这些规律概括化:

Sud(8岁6个月) 未能完成分配30个代币的任务(要求用心算)。对于 $x=10$ 和 $x'=4$,他刚开始分为5和5,然后转移4个,得出9和1,然后是8和2,6和4,并不理解自己在做什么。面对 $x=5$ 和差值 $x'=1$,他成功地进行了分配。对于 $x=6$ 和 $x'=2$,他将其分为3和3,然后转移2个,从而得出5和1。在仔细观看了两个集合之后,他移走1个代币,得出4和2:"2个,没错。"但他无法把这个方法推广到 $x=7$ 和 $x'=5$ 任务中:他尝试了3和4,2和5,7和0,最终放弃了。

Zie(8岁6个月) 也未能完成30个代币的任务。对于 $x=10$ 和 $x'=4$,他刚开始也是分为5和5,然后转移4个,得出9和1,之后是6和4,最后8和2。然后,他数次转移2个代币,得出6和4,8和2等等,最终替换了1个而不是2个代币,

从而得出了 7 和 3:“那边,它多出 4 个。”在后续的测试中($x=11$ 和 $x'=5$;$x=13$ 和 $x'=5$;$x=15$ 和 $x'=7$),他先分为 5 和 6 等等,然后每次都转移 2 个,随后仅在“+”和“−”之间摇摆不定之后,最终得出了只转移 1 个代币的解决方案。

Sen(8 岁 6 个月) 对于 30 个代币和差值 $x'=6$,刚开始提出 9 和 21,然后笔算 30−6=24,于是提出分 24 个代币给 B,24+6 个给 A。对于 $x=10$ 个代币和 $x'=4$,他刚开始分为 6 和 4,然后把它们放回代币堆,再次分为 8 和 2:“这就等于 6。由于必须多 4 个,我要拿走 2 个且增加 4 个,那样(A)就有 10 个,而(B)就为 0 个。”我们转向 $x=5$ 和 $x'=2$,他成功完成了任务,然后我们回到 $x=10$ 和 $x'=4$:他重新以 8 和 2 开始,然后是 6 和 4,数次转移 2 个代币,看起来很惊讶,随后理解:“如果我挪走 2 个,那就会是 4 个(差值)。如果我(从 4 个中)转移 1 个,那它就多出 4 个了(7 和 3)。”他记住了这一经验发现,并将它正确运用到分配任务 $x=13$ 和 $x'=3$ 中(先分为 3 和 10,然后 5 和 8)。但面对 $x=18$ 和 $x'=6$ 的分配任务时,他却没有使用上述经验规律:他先尝试 5 和 8,然后是 7 和 11,等等,但并未找到正确的解决方案。

于是我们看到,即使在那些达到部分理解的被试身上(Sen),通过经验调节所取得的成功仍然未能导致对规律的概括化。不过,还是存在局部的概括化(比如当 Sen 从任务 $x=10$ 转到 $x=13$ 时)。但是,由于这些概括化是逐步出现的,所以我们可以把这个阶段划分为多个子阶段,这与我们在上一章中第二阶段的做法相同。

§4 第三阶段

这个阶段的标志是被试通过归纳发现了规律,即一旦被试在经验层面将某个函数在一两个例子中分离出来,他们就能将该函数推广到所有的例子中去,即便他们还没有演绎出共同的形式:

Opa(7 岁 5 个月) 他未能正确分配 30 个代币。对于 $x=10$ 和 $x'=4$,他刚开始分为 5 和 5,然后通过转移得出 9 和 1,等等。后来,他重新以 5 和 5 开始,从两边各拿走 2 个代币(这构成了差值 4),将这 4 个代币放在一边,并对情况作如下总结:“为了使(A)多 4 个,你必须分 3 个给(A),3 个给另一个人,另外多分 4 个给(A)。”实际上,这正是本章开头所示的函数(2)。对于 $x=11$ 和 $x'=5$,他遵循相同的程序:“他们两人各分得 3 个,其中一人再多分得 5 个。”对于 $x=16$ 和 $x'=5$(这是一个无解的问题,除非 $y=10.5$ 和 $y'=5.5$),Opa 在心里做计算,后来发现“我做不到:5 和 5 不行,4 和 6 也不行,等等”。——“它在代币上行得通吗?——我觉得可以。——数字 16 和 5 有问题吗?或者你的计算有问题?——我的计算有问题。——但你的计算是正确的!”接着,他拿走代币,做各种尝试,然后说:“是数字

的问题，因为它是一个单数。”我们提出问题 $x=11$ 和 $x'=7$；他先拿走 7 个，然后将剩下 4 个除以 2：“每人有 2 个，(A)再多得 7 个。——这行得通吗？——是的，2 和 9。——那为什么 16 和差值 5 不行呢？——因为当我们拿走 5 个，我们还剩下 11 个代币，它们不能被等分。”

Pit(9 岁 2 个月) 未能通过心算来完成 30 个代币的分配任务(先是 15 加 21，后来是 9 和 15，最后是 24 和 6)。当我们允许他摆弄代币时，他刚开始分为 15 和 15，然后转移 6 个，得出 9 和 21。后来他重新开始，“每人分 3 个”，再分 3 次，直到 A 分得 12 个，B 分得 12 个，然后将剩下 6 个都分给 A。对于 $x=10$ 和 $x'=4$，他刚开始分为 5 和 5，随后变成 9 和 1，接着开始以 2 的差值进行分配，马上得出了 7 和 3。对于 $x=11$ 和 $x'=5$，他首先观察到我们不能二等分，接着他使用之前用过的方法，发现：“他们必须每人分得 3 个，然后其中一人再分得 5 个，”于是得出 3 和 8。对于 $x=15$ 和 $x'=7$：“我想多放 7 个(他把它们放在一边)，那么还剩下 8 个。所以我给每人分 4 个，然后再把 7 个分给其中一人。”

Dul(10 岁 1 个月) 也未能完成 30 个代币的分配任务。对于 $x=10$ 和 $x'=4$，他刚开始的解决方案是 9 和 1，等等，最终他发现：“每人分得 3 个，(A)再多得 4 个。”对于 $x=16$ 和 $x'=6$，他分为 8 和 8，然后转移 3 个：“为什么是 3 个？——它是 6 的一半。——为什么是一半？——一边 3 个，另一边也是 3 个。——如果总数 12，(A)多出 4 个，怎么分配呢？——应该是 $6+4=10$。哦，不是！算错了：应该是 $6+2=8$ 和 $6-2=4$。”他在 $x=29$ 个代币和 $x'=7$ 的分配任务中同样获得了成功，但是对于 $x=17$ 和 $x'=6$，他观察之后说“行不通，它们是单数”。

正如我们所看到的，这些反应非常明显，它们在 8－9 岁的被试身上普遍存在(Opa 无疑属于超前发展)。被试往往从试错开始，但在这些尝试过程中，他们马上明白，从一个代币堆向另一个代币堆转移 n 个代币会导致它们的差值 $x'=2n$，这与我们在上一章第三阶段中的发现一样。一旦掌握这一规律，某些被试(如 Dul)一开始就会把总数进行二等分(或 $x/2$)，然后将差值 x' 分成两个相等的部分，留一半给 A，再从 B 中取出另一半分给 A。其他被试(比如 Opa 和 Pit)则跳过了这一阶段，马上计算 $x-x'$ 的一半：于是 y(A)总和为 $(x-x')/2+x'$，而 y'(B)的值为 $(x-x')/2$。后来，这种归纳发现的方法被概括为一种通用方法，但还不是演绎方法。等到被试掌握了演绎方法，他们就能够理解当 $(x-x')$ 为单数时，不可能找到正确的分配方式(Opa 和 Dul)。应当指出的是，Opa 还没有充分相信演绎方法和他的计算过程，反而需要具体的操作才能确信。

§5 第四阶段和结论

最后一个阶段的特点是计算和演绎方法。在ⅣA 水平之前，被试能够进行心理概

括化，但他们仍然需要一定的操作，或者至少需要一些书面的试错和尝试：

Bor(9 岁 5 个月) 通过心算将 30 个代币分为 21 和 9，为了使 $x'=6$。但是，在允许他操作代币之前，他没有找到解决方案。一旦可以摆弄代币，他就从 A 向 B 转移 3 个代币："为什么是 3 个？——为了得到 6。"对于 $x=18$ 和 $x'=4$(没有呈现代币)："9 和 9 是 18。每人分 9 个，9+2 个给(A)。——另一个人呢？——9 减 2 等于 7。"同样的反应出现在 $x=21$ 和 $x'=5$ 的任务中，他(通过笔算)算出 13 和 8，前者是 10.5 与 2.5 之和，等等。

Cha(10 岁 2 个月) 通过心算将 30($x'=6$)分为 15 和 15，然后增加 6，得出 21 和 9："12(差值)太大了：你需要 3 个。一个人有 12 个，另一个人有 18 个。——为什么是 3 个？——因为 6 行不通，你需要二等分。——那 $x=48$ 且差值为 14 呢？——是 24 和额外 7 个：那就得出 17 和 31。——那 $x=29$ 且差值为 7 呢？——(他先分为 14 和 15，然后替换 3 个)是 18 和 11。"

Bat(11 岁 1 个月) 在 $x=30$ 和 $x'=6$ 中的反应与 Cha 类似。对于 $x=48$ 和 $x'=14$："48 的一半是 24，我再加 7 个，因为 14 太大了：那就得出 24 和 7。"

Duc(11 岁 5 个月) 未能通过心算完成 $x=30$ 和 $x'=6$ 的任务。向他提供代币之后，他先把 6 个放在一边，将 24 个分为 12 和 12："是 12 和 18。"对于其他问题，他使用了相同的方法，但通过心算来完成。

在ⅣB 水平，被试通过心算来解决问题，很少进行试错：

Zum(11 岁 4 个月) 面对 30 个代币和 $x'=6$："先给每人分 15 个，再给(A)分 6 个，那就是 21 个。哦不，我算错了。我必须加上 3，拿走 3，这样才能使差值为 6：12 和 18。——那 $x=25$ 且差值为 7 呢？——我分 12 给(A)，分 13 给(B)；再给(A)加 3 个，给(B)减 3 个：9 和 16。——那 $x=29$ 且差值为 11 呢？——我分成二等分，15 和 14，然后我从 14 中拿走 5 个，加到 15 中：那就得出 9 和 20。——想想其他的方法。——我们从 29 中拿走 11 个，把剩下的除以 2，就得出 9 个，然后我们把 11 加到另一堆上。"对于 $x=28$ 和 $x'=7$，他发现了 17.5 和 10.5，并得出结论，这不适用于代币，因为 7 是一个单数。

Dur(11 岁 8 个月) 立即解决了 $x=30$ 和 $x'=6$ 的分配问题："是 18 和 12。——你是怎么做到的？——15 和 15；如果差值是 6，一个人分得 15+3，另一个人分得 15−3。——为什么不是 ±6？——那差值就变成 12 了。——若 $x=33$ 且差值为 9，该怎样分配？你能找到另一种方法吗？——我先拿走 9 个，然后除以 2(从而得到 12)，那就得出 21 和 12。"

Fel(12 岁 2 个月) 对于 $x=44$ 和 $x'=14$："44 除以 2 是 22。我们给一个人 22+7=29 个，给另一个人 22−7=15 个。——若 $x=43$ 且差值为 9 呢？——那就更难了。43÷2=21.5，还有 9 个，不将 4.5 给(A)：那就得出 26 和 17。"对于 $x=47$ 和 $x'=11$，他以同样的方法得出了 29 和 18。"试试其他的方法。——拿走

11个，将剩下的除以2，然后把11加到(A)上”。

于是我们看到，在ⅣA水平(对应于具体运算水平)，被试的推理过程再次表现为一个连续修正的心理实验，它是被试所获结果的函数(参阅Cha："因为6行不通，你需要作二等分")。但是，这并非意味着心理实验既构成又解释了作为里格纳诺思想的推理过程，因为它像物理实验一样，受到运算的指引(而运算并非源自客体)；不过它确实表明，在这个水平，运算由类似于真实物理操作的心理操作所组成。而在ⅣB水平，运算变成了假设演绎，允许被试进行预想和灵活的演绎，我们不禁佩服被试的前进速度，他们(比如Dur和Fel)能根据要求灵活地改变方法，轮流使用本章引言中所提到的解决方案(1)和(2)。

站在函数的角度来看这些阶段的普遍意义，我们发现，被试对这一问题(它是上一章所处理的相等问题的反向形式)的连续反应表现出相同的发生顺序，仅仅只有少许时间上的滞差。鉴于L.若阿诺①所观察到的例子，最重要的是鉴于以下事实——我们的问题不仅是为了发现从集合A到B的必要转移，集合A与B之间的差值，更是为了在给定总数和差值的条件下，去发现集合A和B的数值——我们可以预测滞差本应该更大。被试的解决方法表现出相对早熟的特点(第三阶段和第四阶段，8－9岁和10－11岁)，被试在第四阶段使用了灵活多变的解决方法，这些现象都表明，构成化函数一旦被整合进一个运算系统(其定义正是如此)，它就同时伴随着函数的组合，从而使新的组合成为可能。在这个水平，之前用来表示任意给定变量之间的共变关系的函数，或者用来表示任意给定动作之间的共性关系的函数，现在就只表示运算转换之间的依存关系。

---

① L.若阿诺：《青少年的数学推理》，Delachaux，1947，第23页。其实，这位作者所研究的问题(如果我们有同样多的钱，我给你23法郎，你将比我多出多少法郎?)，青少年要到12－13岁才能解决。但是毫无疑问，它的困难之处在很大程度上源于这一事实，即并未告知初始数值(总和)，这使得被试在转移时经常忘记从A中减去并加到B上。

第七章 一个变异之变异的组合例子①

当一种任务情境被用来作为分析函数组合的例子时，它往往既包含明显物理连接或者因果连接（随着液体的流出，水位由容器的不同形状而决定），还包括序列对应的所谓正确的运算（传递性非对称关系的乘法群集）。这为我们提供了一个机会，让我们在研究函数组合的问题时，同时研究函数的因果性和运算之间的关系。这两个问题自然是不可分割的。

§1 技术和一般结果

实验材料由三个瓶子组成（见图10）。第一个瓶子A是圆柱形的，它被放置在瓶子B或瓶子C上，液体经过A的尾巴流到B和C。在瓶子A上，相等的体积（在玻璃瓶的圆柱形部分）对应于相应的液面高度，我们称之为HA_4，HA_3，…，HA_1。被试在玻璃瓶上的标记之间，可以观察到相等的间隔DHA。瓶子B也是玻璃瓶，它由两个平行的大三角形和两个小侧面连接而成，再加上一个边长为1cm的正方形作为底（这是为了避免使用金字塔容器所引起的三维问题）。我们把连续液面称为HB_1－HB_5，用DHB_{1-4}表示高度间隔，它们被来自瓶子A中的液面HA_4－HA_1所填满。我们把瓶子B中不断增加的水面宽度称为WB_1－WB_5，用DWB_{1-4}表示每一个宽度间隔。第三个瓶子C的形状与B相同，只是上下颠倒过来了。我们用

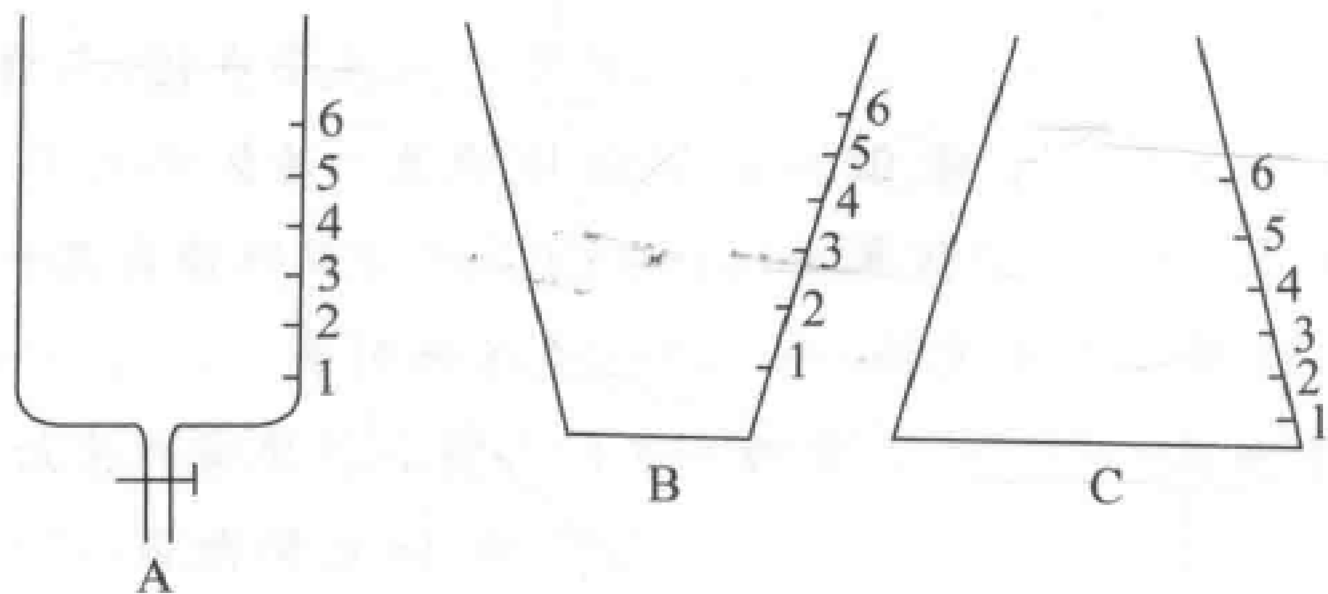


图10

① 与E.施密德-克兹科斯合作完成。

DHC_1-DHC_4表示每一个液面，它们被相等体积的水填满，对应于瓶子 A 中的 DHA_4，…，DHA_1。用 WC_1-WC_5表示不断变小的水面宽度，而 DWC_1-DWC_4则用来表示不断增加的差异。

鉴于上述情况，故采取如下实验程序。我们先展示从瓶子 A 到瓶子 B 的完整排水过程，既不考虑中断排水，也不提及高度间隔 DHB 和宽度 WB_n。然后，我们宣布我们将分阶段进行，并且要求被试预测高度间隔 DHB_1-DHB_4。为此，我们给儿童提供一张长方形的纸片，它可以垂直地靠在瓶子 B 上。儿童只需要用铅笔做标记，就可以画出层层叠叠的不同液面。接着，我们还要求被试预测宽度 WB_1-WB_4。为了帮助他，我们给他一张新的纸片。这张纸片很长，平放在桌子上，便于儿童从同一个起始点开始，通过做简单的标记就可以画出各种连续的宽度。由于宽度差异 DWB 的类包含，这使他能够以图形的方式来判断宽度。接下来，我们要求被试说明——如果他做得到的话——他是如何预测这两件事的，然后我们向他提供多种手段来验证他的预测。我们排出液体时，被试要一直观看，这样他就可以相应地纠正他对高度间隔 DHB_1-DHB_4的预测，但还没有谈及他对宽度 WB 的预测。一旦被试完成上述更正，我们就会要求被试纠正他对宽度的预测，之后才进行新的排水实验。然后，我们再次排水，让被试先通过纸片来预测宽度 WB 和差异 DWB，再亲手控制 WB 和 DWB。最后，我们要求被试解释连续间隔 DHB 与间隔 DHA 之间的函数关系，以及连续宽度 WB 与高度 HB 之间的函数关系。

然后我们换到瓶子 C，实验程序是一样的。但是，一旦新的提问部分结束，我们会要求被试解释 DHC 和 DHB 的间隔差异，以及 DWC 和 DWB 的间隔差异。在实验的结尾部分，我们使用一个带有垂直缝隙的隔板（使被试不能看到宽度），向被试展示了间隔高度的变异，要求被试指出，我们使用的到底是瓶子 B 还是瓶子 C。

在 5—11 岁的被试和某些 13—14 岁的青少年身上所收集的观察结果，使我们可以区分出三个阶段。在第一阶段（持续到 7—8 岁），被试只使用一种函数，它揭示了即时的一一对应关系；而瓶子 A，B 和 C 中的事件（包括它们的方向）被假定是完全同构的。与瓶子 A 类似，瓶子 B 和 C 中的水面之间的间隔被认为是从上到下相互连续的（第一阶段和第二阶段之间的中间情况除外，在中间状态时，B 与 C 的水面间隔彼此相等，也与 DHA 相等；这同样适用于 B 和 C 之间的宽度差异 DWB 和 DWC，被试预测它们相等）。另一方面，一旦被试预测了这些一般等价类，他们在面对观察结果时就会对之进行纠正，尽管观察结果丝毫不会影响随后的预测，因此也不会导致对相关函数的理解。相比之下，在第二阶段（平均为 7—10 岁），被试逐渐开始预测，当水正在流进瓶子 B 和 C 时，B 和 C 的连续液面的方向与正在排水的瓶子 A 中的方向相反。但是，儿童还没有预料到高度间隔或者宽度间隔的变异。与第一阶段不同的是，随后的确认将会使儿童建构出正确的函数，立即开始函数组合，但也存在一些困难。除其他原因之外，这些

困难可能是由于被试使用图形手段来标记宽度而造成的。最后，在第三阶段（11 岁及以上），儿童能正确地预测函数，把函数组合为总态射——它包括实验中的所有共同变异。

§2 第一阶段

在液体体积守恒的实验中（即把液体转移到不同形状的容器，比如把液体从矮胖的瓶子Ⅰ倒入瘦高的瓶子Ⅱ），我们观察到，如果我们把第二个容器藏在隔板后面，年幼被试会期待一种完全的守恒，即他们不仅期待液体体积相同，还预测液面高度也保持不变。然而，这只是一种准守恒，因为它只适用于液面。当我们要求被试在空玻璃瓶Ⅰ和Ⅱ（类似于我们刚才描述的）中倒入"完全"等量的液体时，他们所倒入的液体，通常具有等高的液面，而没有考虑两个玻璃瓶的不同宽度①。事实上，当我们回到最初的实验，拿开挡在瓶子Ⅱ前的隔板，此时液体的倒入倒出变得清晰可见，这些儿童立即得出结论，说液体的数量并不守恒，因为液面发生了变化。相反，当玻璃瓶Ⅱ被遮挡时，某些 5 岁的被试已经预测瓶子Ⅱ中的液面会高于瓶子Ⅰ，因为玻璃瓶Ⅱ更细。然而，这仅是基于先前观测结果的（合理）预测，被试并没有理解补偿。基于对液面高度的差异的预测，这些被试仍然得出结论，说数量并不守恒。

为了理解这个实验的第一阶段以及向第二阶段过渡的过程，也为了说明我们在分析那些在两个预测液面之间建构起来的函数（代表了原始水平的理解）时，需要对观察内容和观察后的最终理解做更细致的区分，我们有必要回顾一下之前的事实。

第一阶段所特有的预期，揭示了最普遍的、无疑也是最原始的函数（正如刚刚谈到的准守恒），即假定存在于玻璃瓶 B 和 C 中的结构，是对在瓶子 A 中所观察到的结构的同化。换句话说，这里我们有一个"结构的传输"②，被试通过简单的应用（其特点是间隔相等、难以逆转等）来行事。这种态度是如此顽强，以至于尽管被试在演示开始时进行了观察，但它还是让被试明确了液面的变化方向，其中 B 或 C（从下到上）逐渐被倒入，而 A 则（从上到下）被倒出。这种态度是如此顽强，即使经过详细的观察，被试往往还是回到 A，B 和 C 中的液面的总同构：

Phi（6 岁） 开始时在玻璃瓶 B 上自上而下地画了一些不相等和不正确的间隔（顶部的间隔最大，底部的间隔最小），这无疑是因为他想起了液体在玻璃瓶 A 中的绝对数量是从高到低逐渐减少的（除非他受到玻璃瓶 B 的影响——瓶子 B 的宽度是从上到下逐渐变小的——尽管接下来的事情表明他完全忽略了这个因素）。

---

① 关于这些单维估计，请参见第 3 章 §2 第 32 页的注释①。

② 皮亚杰曾在《发生认识论研究》第 20 卷第 15—17 页中使用。

当我们问他瓶子B是先从底部还是先从顶部被填满时(在我们能向他询问这些最初的不相等的意义之前),Phi惊呼:"哦!我犯了个错误,因为这里是相等的(他指了指瓶子B的顶部,纠正了最初的标记,开始自下而上地画出相等的间隔)。——你怎么知道你必须画成相等的?——因为这里是相等的(他向我们展示瓶子A的间隔)。——但是那里(瓶子B:我们展示B的底部和顶部),它们都相等吗?——你必须画成相等。——那这里(我们展示瓶子B的顶部)呢,它比这里(B的底部)更大、更小还是相等?——相等。"关于瓶子B的宽度WB,Phi刚开始时很随意地做标记,后来他自发地纠正自己,画出相等的DWB间隔的标记。我们转向验证,Phi观察到减少的DHB间隔是不相等的:"最大的在哪里?——那个。——为什么它变得越来越小?——没有空间了。——为什么?——因为我们在这里弄得太高了(=因为我们一开始把太多水放在底部)。——但是,为什么当糖水上升的时候,我们添加的一点(我们展示了间隔A)仍然这么小呢?——这里(底部)的水太多了。"至于宽度,如果朝着底部的宽度更短,那是"因为没有足够的空间,这就是为什么它变小的原因"。但是,这些观察和解释说明排出的液体并不守恒,它们也没有对被试预测C构成任何影响(除了马上提出建议外)。实际上,Phi再一次给出高度和宽度相等的间隔。在验证时,他认识到DHC不相等,但无法解释这些不相等;另一方面,关于宽度,当要求他比较两个玻璃瓶时,他说"那里(C,顶部)很小,那里(B)很大"。

Pas(5岁6个月) 表现得比上一个被试更好,他预测在液面的连续中存在反演,所以他处于第一阶段和第二阶段之间的中间状态:"这个点(A的第一个间隔)在底部这里(B),"但他画出了相同大小的间隔DHB,并对DWB做了同样的事情。在他验证了高度之后,为他设置液面4,并要求他预测其他液面的高度。当时,Pas的反应与Phi相反,他考虑他刚才所做的观察,画出了朝着顶端而减少的间隔。但是,他还是没有理解,因为他继续预测相等的DWB间隔,而且当我们转向玻璃瓶C,他通过简单地复制他所看到的DHB,来预测高度间隔DHC,没有反演。WC再次相等,但当他观察到WC朝着顶部减少时,他解释说:"这里的玻璃瓶很小(=宽度越来越小)。"

表现出类似反应的例子还有很多,这些反应对于函数的形成而言是有启发性的。起始点是对动作格式的同化,在这种特殊情况下,动作是指液体以相等间隔的连续阶段排出。被试期待在玻璃瓶B和C中重新发现这种结构(A中出现的),而不考虑它们的形状和尺寸。因此,正如前面所说,尽管儿童在最初的倒出动作时观察到了这一点,但他仍然预测存在完全的同构。这种同构甚至包括液面的方向;被试没有关注这个事实:尽管从A倒入B的水首先经过了玻璃瓶B的上半部分,它仍然是从底部填满的。

这种完全等价或对应的初始函数能在三个方向领先,因为动作的同化占据首要地位,它们的结构只是转移到新的客体上。在这三个方向中,其中两个导致新函数的组

合，而第三个则使它们仅仅通过观察来探索，而不产生直接的组合。这三个方向是：第一，寻找他们预先假设的原因，以及真正基于对象的协调；第二，以被试的动作的协调为基础的运算组合；最后，依存关系的抽象，这些依存关系直到后来才被觉察到，在被整合进因果系统或运算系统之前，它们维持着函数定律的地位。

在第一阶段，被试寻求因果解释的努力仍然非常有限，这也是新观察到的函数特别不稳定的原因。然而，这并非没有意义，Pas 的中介状态的例子表明，从提出这些问题开始，被试已经开始进步。他明白(或评论，与 Phi 相反)，水没有停留在玻璃瓶 B 的入口处，必然会流向底部，他明白液面和间隔是从 B 的底部开始的，反转了 HA 和 HB 或 HC 之间的空间对应的方向。

运算组合同样被限制在这个演变水平，尤其是导致了维度 H 和 W 等之间的不协调。因此，被试在验证间隔 H 和宽度 W 时，仍然存在经验观察，这迫使被试发现新的函数：间隔 HB 的减少，是玻璃瓶 B 自下而上的宽度的函数，宽度 WB 的增加，连接着相同的因素，等等。第一阶段让我们确定的一个突出事实是，被试能够观察到这样的函数依存关系，并将之理解为依存关系，但还不能从因果上进行理解，并且由于缺乏这样的理解，继而缺乏组合，所以依存关系仍然很不稳定，它们要么被迅速遗忘，要么被保留下来，用到不适合它们的情境中。这就是为什么尽管 Phi 已经观察到不相等的间隔 DHB，但他没有考虑 DHC，而 Pas 则认为 HC 的间隔相等，只是以自下而上的降序，没有把它们反转成增加的间隔。

不久前，通过观察发现被试未能理解函数，函数也只有有限的连贯性，这无疑是因为缺少因果组合。事实上，虽然这似乎很好理解，从 A 向 B 或 C 倒入同等数量的水，当玻璃瓶朝着顶部张开时，将导致液面高度减少而宽度增加，而当玻璃瓶变窄时，会发生相反的情况，但是，要理解玻璃瓶的形状和玻璃瓶中的水的液面之间的因果关系，必须以一定数量的先决条件为前提，比如液体的不扩张和不压缩，即液体的数量和它所占的体积守恒。在第一阶段，由于缺少运算结构，被试还未获得这些概念，因此他们给出的因果解释也受到了影响。例如，当 Phi 宣称，间隔 DHB 在玻璃瓶 B 的顶部变窄了，是因为“空间不够了”或者我们在底部放了“太多的水”时，其实他知道间隔 DHB 对应于 HA 中的相等数量，尽管这一相同数量在 HB 中可能并不完全相等，因为玻璃瓶是不同的：这就是为什么被试认为他应该设法获得与他所画的相等的 DHB，而当事实并非如此时，被试唯一要做的就是接受他还未理解的事实(就像在守恒实验中发生的那样，被试观察到液面随玻璃瓶的形状而发生变化)。在这里就发现了新的依存关系：高度 HB 随玻璃形状的不同而变化，但是，由于被试还未能从因果和运算上理解这些依存关系，所以这些函数是不可组合的，而且由于尚未组成一个系统，它们仍然是零碎的和不一致的。

§3 第二阶段

在这个水平的被试身上，我们将同时观察他们在摆弄实验装置时对函数的探索，以及函数或多或少出现的相互关联的渐进组合：

Jac(7岁3个月) 在A中观察到，DHA间隔是相等的，"底部的水怎么了？——它上升了。——当我们倒一点进去(一个DHA)，那里(在B中)会怎么样？——它变得更高。——为什么？——因为它更粗(A的直径)，而它更细(B的粗度=1cm)"。因此，我们可以看到，对DHB的估计最初来源于两个维度的协调的函数，尽管Jac刚开始忘记了第三个维度，将DHB间隔画为相等的，但其实它们比DHA更高："因为它全部相同(在高度上)。"但是，由于预测DHB间隔太大，Jac未能把它们都放在她的纸上，当她用更小的DHB重新开始时，她意识到，她忘了一个维度：DHA是相等的，"但不是在这里(DHB)，因为它总是倾斜的(=玻璃瓶B的两侧都有一个角度，不是垂直的)"。然后，她画出DHB间隔(从B的底部开始)，"先是小的，后来是大的。——为什么？——因为它变得越来越大(宽)"。换句话说，在理解了DHB的高度取决于宽度之后，Jac首先假设在DHB间隔的变异与不断增加的宽度之间存在直接的而不是逆向的关系。另一方面，她对后者的预期是正确的，因为这是一个从下到上逐步增加的问题，但她仍未理解DWB。后来，我们转向验证："哦，不是！"Jac对DHB说到，"它们越来越细(越来越低)。——为什么？——因为那里(B的底部)玻璃瓶不那么粗(=不那么宽)"。于是，Jac理解了宽度WB和DHB间隔之间的逆向关系，她通过"看看宽度，就在那里"找到了DHB的位置。在解释DHB的减少是WB的增加的函数时，Jac并没有用补偿来提供一个足够的理由，而是说"因为水越来越少"，这无疑只是Jac给DHC的最佳解释的一个简化版本。

关于DHC间隔，Jac开始预测它们从下到上逐渐减少，就像她对DHB的反应一样。但她对WC的预测是正确的："它越来越高(DHC间隔的高度)，因为玻璃瓶越来越小(=越来越细)……它更小，所以它上升得更多……因为它变得更小了(=更细)，后来糖水变得更高。"因此，她已经用DHC和WC掌握了高度和宽度的补偿，但不是总能理解DWC。

Mar(8岁5个月) 开始时将DHB间隔从上到下进行排序，虽然方向不对，但是当我们问她，与A中的对应液面相比，液面HB_5在哪里时，她立即纠正了自己。不过，她仍然认为DHB彼此相等，也与DHA相等。后来，由于观察到A和B的总高度不一致，她画出与DHA不同的DHB，但两者仍然相等。分隔宽度的间隔也彼此相等，宽度WB立即被视为高度的函数："当我改变高度的时候，我会看到

宽度。”经过验证，Mar 马上理解了这种关系：“当它更宽的时候，糖水就会上升一点。”对于玻璃瓶 C，Mar 立即宣称：“有它，正好相反。在顶部，它更小，在底部，它更宽，所以它上升很少——在底部更少，在顶部更多。”她对 DHC 和 DWC 的预测都是正确的，当宽度被遮挡，只有高度可见时，Mar 能够确定哪一个玻璃瓶：“在顶部，它慢了一点(在 B)，在这里(C)，它上升得更快。”

Ste(9 岁 5 个月) 首先预测 DHB 相等，“原因与它(DHA)相同”，但是在标记他的第一个液面时，他承认“这很难”。DWB 之间也相等。在验证 DHB 的时候，他立即意识到自己的错误：“哦！我明白了，因为这里更细，那里更宽，水更细，那里更宽，水有更多的空间扩散开：这取决于水的量。”随后，他得出结论，DWB 也将“越来越小”。对于 DHC，随着间隔的增加，“它会相反”。但对于 DWC，Ste 预测会减少，对宽度 WC 及其差异 DWC 感到迷惑；通过验证，他惊呼：“哦！那是瓶子的形状，空间更小，因此水必须上升。”

Eda(10 岁 8 个月) 尽管他的年龄，他也预测，DHB 和 DWB 将永远相等，因为在那里(A)它总是一样的。基于验证，他对 DHC 和 DWC 做出了准确的预期，因为“正好相反”。

Mic(11 岁 3 个月) 与 Eda 的反应类似，在对 C 进行验证和准确预测之后，回答了这个问题：“差值什么时候相等？——当(容器)是正方形时。”

对玻璃瓶 B 中高度差值 DHB 和宽度差值 DWB 的预测，第一阶段的被试几乎没有取得任何进步。另一方面，被试在观察、摆弄和验证过程中，对函数的理解表现出明显的进步，其不同之处对函数结构的构思具有指导意义。

在预测水平，被试唯一真正的进步是能够立即理解以下现象：在玻璃瓶 A 中，虽然液面 HA 从上到下相互跟随，但它们在容器 B 和 C 中是从下到上相互连续，因为 B 和 C 是在被倒入。另一方面，对 DHB，DHC，DWB 或 DWC 的预期，总是揭示了严格同构的首要地位，被试认为这些差值在 B 和 C 中相等，跟它们在 A 中一样。然而，在某些例子中也开始出现差分，比如 Jac(7 岁 3 个月)，他提出 B 中的间隔比 A 中的更高，因为虽然 A 是圆柱形的，B 只有 1cm 宽，但这些更大的间隔仍然是相等的。

为了从这些错误的预测过渡到精确的函数，第一个可能的路径就是因果关系，这已经考虑到以下事实：儿童把 B 和 C 的倒入归因于 A 的排出，前者与后者的方向相反。实际上，由于因果关系是一个转换和并存守恒的系统，在这个阶段，它导致了新的建构。这些建构由这两个因素所诱发：关于 DHB 为什么会变化的问题，以及被试在验证过程中的实验观察。让我们回顾一下，在第一阶段，由于缺乏液体数量守恒的概念，这个问题无法得到回答。儿童直到 7—10 岁才获得这个守恒概念，这主要是由于儿童发现在包含两三个维度的液体形状的量化变异之间存在补偿。这就是我们在这里发现的过程，但重点是变异及其原因，换言之，重点是它们所表达的函数和依存关系的原因。事实上，一旦观察完成，这一阶段的被试的主要进步，就是通过立即调用玻璃瓶的形状与

液体数量之间的相互作用，以数量守恒为基础，来寻找所观察到的变异的原因。

这个守恒没有得到外显的确认，首先可能是因为我们没有向被试提出这个问题，还有可能是因为一旦获得守恒，被试就会认为它理所当然，不再需要使用故意的表述。但是，儿童提到它时的反应是：例如 Ste 说，“这取决于水的数量”，从而理解了从间隔 DHA 倒入间隔 DHB 的相同数量可以“散开”，因为它的宽度有“更多空间”。但同样的推理含蓄地发生在所有其他被试中，他们毫无疑问地接受数量守恒，然后为了发现 DHB 和 DHC 变异的原因，诉诸因果依存关系，该依存关系联合了液体的形状和固体容器的形状。正如所有这些被试所说，用他自己的方式来表达，当玻璃瓶变细时，这些间隔的高度就会增加(“糖水变得更高”，Jac)，而当玻璃瓶变宽时，这些间隔的高度就会减少。

当然，这并不意味着因果关系本身就是函数的来源。然而，当被试观察液体的高度和宽度，并理解它们是玻璃瓶形状的函数，在这种情况下，这种函数依存关系似乎在被试眼中具有物理意义。于是，在客体身上发现的这些共变，与数量守恒一起，很容易被整合到因果系统中(一个系统变成因果系统，因为它是一个系统)。因此，已经构成的系统反过来又作用于构成它的函数，并巩固这些函数，最重要的是赋予依存关系。依存关系所表达的含义是“联结(connections)”，而不仅仅是“连接(conjunctions，休谟所用的术语)”，即一种解释性的意义，不再只是一个合法的意义。

但是，这个阶段的被试所构思出来的函数的因果维度绝不是唯一的，有必要更加关注它们的运算维度，这体现在以下几个方面：第一，在空间间隔概念的实际构成过程中，有作为两个端点之间的直线段(在 DH 的情境中，它非常直观，但在 DW 的情境中，则没那么直观)；第二，在增加或减少间隔的序列排序中，还有在直接或逆向的对应序列中；第三，在关系的构成中，这使互惠形式成为可能，其中包括宽度的扩大和高度的缩小之间的补偿。反之亦然。这个最后的运算组合介入到守恒概念的建构过程中，继而介入到转换和整合守恒的系统中，我们将从中考虑因果关系的特征。只要说在第二阶段，函数发展的因果维度和运算维度之间存在相互依存关系就足够了，毫无疑问，因果关系由运算所构成，运算可归结于客体，运算模型以被试的动作为特征。

最后，如果这一阶段的函数是根据两个相关的维度——因果维度和运算维度——而构成的，那么仍有一些函数源自在实验控制时所做的观察，它们既不能从因果上理解，也不是从运算上“建构”。在玻璃瓶 C 的 DWC 宽度的差值中，情况就是如此，宽度本身在不断减少(从下到上)，而它们的差值在不断增加。只要以空间的术语来设想间隔的差异，差异马上变得非常直观，正如在容易排序的 DH 的例子中，没有任何问题。问题其实是随着变异(variation)的抽象概念的出现而出现的，换句话说，它与 DWC 有关，其中的间隔将从原始总宽度中减去，而不是像 DWB 一样增加。在这种情况下，儿童自然被迫接受这一函数，但只能通过事实或合法的观察。在这些方面，我们既不能谈到预测，也不能提及真正的理解。

§4　第三阶段和结论

在第三阶段，被试最终超越了观察后的解释，成功地预测了 DH 和 DW，他们也将其理解为变异之变异，或者函数之函数，而不再仅仅是一种几何直觉。不言而喻，这一进步并不是突然发生的，在第二阶段和第二阶段之间有许多中间状态：

Gil(10 岁)　他是中间状态的示例之一。他立即预测 DHB 间隔从下到上会减少："在底部，有一个更大的(顶部)，因为玻璃瓶的宽度低于顶部。之后，它更小，因为它变得更宽，糖水沿着它散开。"另一方面，他说尺子对于测量玻璃瓶上的 DWB 很有用，并认为"小点(间隔)总是更大，因为这变得更宽"，这是对 DWB 与 WB 的混淆，也是对宽度本身及其差值的混淆。但经过实际观察，他明白了他的错误，"因为这个宽度比那个的一半更大，所以它必须是我们增加的一个更小的点"。至于玻璃瓶 C，他使用他刚才所理解的东西，并预测 DWC 和 DHC 的逐步增长，反演了玻璃瓶 B 的函数。

Lip(10 岁)　相反，完全是第三阶段：他立即预测 DWB 以及 DHB 会减少，并试图用四分之三、一半等来量化这些差值。对于玻璃瓶 C，"它与其他玻璃瓶正好相反"，DWC 像 DHC 一样"越来越大"，因为它变得"每次都更细。——他们不一样吗？——不，更大"。即使遮住宽度，Lip 说，我们可以判断哪一个是玻璃瓶 B 或 C。他用速度来解释："我觉得我们还能看到它，这里(C)它需要更长的时间上升，之后它就会升得更快。那里(B)正好相反，但它们都会同时被装满。"

这些情况，主要发生 11—12 岁(命题运算的水平)的被试身上，其显著特征是他们使用运算演绎，并尝试按照科学度量进行量化。但是，函数的物理或因果方面在起作用，它们并不是全部会消失。Lip 给我们一个很好的例子，当他用速度来表达间隔时，他引入了时间守恒的概念，这在玻璃瓶 A 中是很自然的，因为从 A 中排出的液体是一个整体(而不是连续的间隔)，但是在 B 和 C 中，必须以 B 和 C 的初始速度和最终速度之间的补偿的相互作用为前提。

总的来说，在比较本实验的第一至第三的连续阶段时，我们观察到函数的清晰演变，它从第一阶段所包含的构成性函数开始，变成第三阶段的构成化函数。

构成性函数已经表现出函数的特征，尽管它们其实出现在第一次具体运算(发生在 7—8 岁)之前，因而也出现在运算可逆性和守恒之前。所以，我们可以将它们与简单的关系(relation)进行比较，因为确实存在前运算关系或者前关系(缺乏连贯的组合)，但它们具有本质的区别，因为关系只能通过比较来产生。"*A* 大于 *B*"或"*A* 等于 *B*"是关系，因为只有从被试比较它们的那一刻起，关系才存在，而对它们自身而言，*A* 和 *B* 只能是相等或不相等的，即它们的大小(这毫无疑问是客观存在的)使它们可以作比较，但

是,这与蘑菇可以被吃掉和消化(或者相反,由于其毒性而被拒绝)是一样的道理;不过,问题的症结在于,A 和 B 自身无法相互比较。另一方面,函数表达了某种"依存关系",比如 B 中的水位取决于从 A 中倒入的水量,依存关系是真实而客观的:虽然它源自将 A 倒进 B 的动作,但这个动作,在被试执行的这种情况下,很容易在没有他的时候受到影响,动作发生在自然客体之间,而不是由于人为的干预。因此,构成性函数的来源是动作,毫无疑问从一开始就是被试的动作,而且是一个客体对另一个客体的行动,不管是以物质的形式还是意识的形式。

函数与动作有关联,它们表达了动作的同化格式,函数不仅先于运算,甚至包含运算,因为运算源于被试的动作,或者更准确地说,源于动作的一般协调(最终导致在函数和运算之间存在越来越紧密的联结),同时也因为并不是每一个动作都被转换为运算。这解释了构成性函数的一般特征和基本性质,它表达了动作本身和动作结果之间的依存关系,其形式是可归纳的(在同化格式中),而不仅仅是感性和真实的。

因此,最简单的构成性函数表达了动作本身与动作结果之间的依存关系,这一依存关系以可能的等价为中心。事实上,这就是我们在本实验的第一阶段以及在第二阶段的最初预期中观察到的情况,当时被试预测,排空玻璃瓶 A 的动作的阶段,与填满玻璃瓶 B 和 C 的动作的阶段相同,包括(在第一阶段)连续水位的方向。这是对应的构成性函数的基本特征,但我们也应该注意到,这些对应关系是前运算的,本质上是定性的关系。关于数字集合守恒的早期实验向我们表明,存在着一种视觉上的、但非运算的对应关系,以至于当面对两排代币,其中一排的元素直接紧贴着另一排的元素,这两排代币会被认为相等,但只要我们消除接触点,等价就消失了。因此,这种视觉对应构成了一个函数,但还不构成一个运算结构。这与我们在第一阶段发现的特征相同。预期的对应仍然是定性的,甚至在本质上是形象化的,但一旦观察结果与预期的情况相矛盾,被试就会否认守恒,既不理解补偿,也不理解事实所强加的新的对应。此外,从这些初始定性函数到对第三阶段的完全理解,我们见证了一个渐进的量化过程;首先是在高度和宽度之间通过逻辑演绎得出的简单补偿,然后是在第三阶段自发出现的度量量化的尝试。

从我们的研究结果中吸取的第二个教训是,对实验情境而言足够的函数,其形成过程和组合过程是分不开的,这对于在定量结构中插入了定性元素,当然是很自然的,因为虽然定性特征立即可以感知到,但非度量的量化必须以建构为前提。这些最初的组合,其进步过程在第二阶段是可见的,它们似乎表现出双重性质:一方面,有一种自然强加的因果组合,因为函数表达了动作的格式,而且这些动作在本质上是因果性的;另一方面,有一种运算组合,它使函数 f 及其逆向形式 f^{-1} 协调,从而导致补偿的实现等。只有那些已经被观察到,但尚未被"理解"和同化的函数(随后将被组合,如 DWC),才能摆脱这种因果和运算的双重组合,从而仍然是简单的一般事实或"定律"的集合,而不是被转换为结构化整体。

但是，一旦函数的运算结构已经启动（一方面，是被试的逻辑-数学结构，另一方面是可归结为客体的因果结构和运算），它迟早会导致乘法结构。从逻辑-数学的角度来看，上述结果向我们提供的最明显的例子是，从表达简单共变（宽度和高度）的函数，过渡到涉及变异之变异的衍生函数，在本实验的特定情况下，具体涉及叠加在间隔自身上的间隔之间的差值，在那之前它们是唯一被理解的。在当前的情境中，第一阶段的构成性函数向第二阶段以及第三阶段的构成化函数逐渐转变的过程，正是这种构成的叠加。

那么，我们如何解释函数之函数的发现，如何构思函数的物理方面与运算建构方面之间的关系呢？毫无疑问，变异是客观存在的，共变也揭示了独立于被试的事实所赋予的依存关系。因此，没有理由认为，这不适用于变异之变异，而且这也不是巧合，在微积分开始时，差值和导数被认为是在时间上修正的物理量，或者是这些数量通过时间过程向极限靠近。那么，我们必须承认下列推论：函数与函数之函数是从客体自身中由简单抽象得出来的，数学概念史上的时间消除（关于此可参见格里兹的有趣论文）①被简化为从物理对象过渡到贡塞斯意义上的格式对象。从某种意义上说，这样的过程肯定会介入其中。然而，由于这种现实主义，由于不明白这一事实（无限不是一个物理概念而是一个运算概念），在解释微积分时所遇到的最初的困难，充分地证明了有些东西牵涉其中：即使当被试以空间或函数值域的物理假设开始时，他会逐渐重构它，他的动作和运算的协调充分必要地解释了这些重构和建构。在前面第一至第三阶段的反应中，我们观察到这种构思的开始。在将液面 HB 或宽度 WB 的边界仅视为序数元素（第一阶段）之后，被试建构了间隔 DHB 或 DWB 的概念，作为在两条边界之间包含的元素（第二阶段）；然后，他可以通过或多或少的超序比较，抽象出增加或减少的规律，这些规律引入了间隔之间的差值，而间隔变得可以测量（第三阶段）。因此，通过不再简单的反省抽象，变异之变异将从相同的协调过程中被分离出来。协调使量化排序成为可能，与仅仅知觉到的定性关系相比，量化排序才是正确的建构。（顺序本身必须以函数关系中的动作为前提，但它比后来关于逻辑-数学运算刻度的各种建构都更接近假设，在这些建构过程中，每个被试都把之前建构的结果作为其渐进建构的对象。）

总之，变异之变异的概念实际上与物理学相对应，同时还以代数（迟早还有无限代数）为前提。代数以尚未给出但将要建构出来的结构，超越和丰富了物理学。

① J. B. 格里兹：《时间在经典数学分析中的作用》，Neuchátel，1954，第 106 页。

第二部分　构成化函数的量化[①]

这个部分(第八章至第十三章)所介绍的五个实验并非同时进行,而是在连续的三年时间里实施的,在此期间有赖于研究中心所举办的多次会议和研讨,我们才得以在方法上不断完善对周期函数的研究。尽管如此,此处所展示的五个实验有一个共同的观点,即它们将比例关系的建构置于对函数变化规律的探究背景中。

§1　阐　　述

我们可以通过阐述下列问题来完善我们的实验技术:

1. 在为相关变量建立对应关系的尝试中是否纳入了函数这一概念?如果是,那么儿童在多个功能上相互关联的给定特征之间会如何做出选择?为了分离出变量的规律,这又是否足以简单地建构出大小序列并将相应的状态以一一对应的方式连接起来?

2. 建立大小及其变异之间的关系,在何种程度上有助于我们推断原因与结果之间的因果关系?

3. 实验归纳法得出的函数规律与自然规律是否一致?实验归纳的程序,例如从观察事实到对事实做出一般性的概括,是否与函数中发现的共变连续性保持一致?

4. 对一项函数规律的理解是否暗含了对该函数规律应用的推演,并由此需要对度量单位做出介绍?儿童是如何做到从共变关系过渡到比例关系的?它是儿童在建立比例关系的尝试中通过对共变规律的演绎达到的吗?

§2　实验假设

在介绍下面的实验前[②],鉴于各实验有其特定的问题、方法与结果,我们想简单地

---

① 由万·邦完成。

② 我们非常感谢 N. 阿布拉莫维奇,C. 卡斯特罗,U. 斯蒂伯,V. 扎斯拉夫斯基,R. 布雷谢,A. 克尔菲,I. 莫尼格季,以及 S. 于藏在研究中的协助。

介绍下这些实验之间是如何联系起来的。

实验Ⅰ(第八章)里，函数被包含在对两个同类型的大小(两条线段，长方形的高度和宽度)间补偿关系的建立中。建立这两种因素之间的关系可能会因为补偿关系的相互作用而变得困难，例如相反的变化，变到极致而导致其中一条线段的消失。

实验Ⅱ(第九章)里，对知觉进行干预以便我们可以研究其在发现系列规律(serial regularities)中所起的作用，并确定实验所提供的知觉在何种程度上有助或无助于实验采用的两种排序法之间关系的建立。

实验Ⅲ(第十章)里，通过让一个圆圈(汽车车轮)旋转来介绍因果关系。车轮旋转所覆盖的距离是车轮大小的函数。问题在于我们需要发现儿童是如何从关联特征：半径、直径和表面面积之中确定车轮大小的。

实验Ⅳ(第十一章)中儿童被要求协调三个变量：车轮的大小、行驶距离和转速。我们向儿童推荐了函数组合。行驶距离是车轮大小与转速的函数。

实验Ⅴ(第十二章)中我们本想研究一个滑轮系统中不同的函数组合。该装置的简化让我们建议儿童通过对距离的逆向补偿来寻求不同重量间的平衡。对数值上等于重量 W 乘以距离 L(杠杆臂的长度)的常数 K 的发现是否预示我们发现了一项联结两个性质非常不同的量的函数规律？(也就是说，重量不但能通过增多重量的方式来获得有效的增加，还能通过改变杠杆的长度来获得增加。)

第八章　周长恒定的矩形的长宽之增减的函数关系
——正方形周长的变化

§1　描　　述①

如果我们把函数仅仅看作两个事物之间的关系(其中一个事物的大小变化将引发另一个事物以相同的比例发生变化),那么对周长恒定的正方形变换成矩形时所涉及的双重补偿的表征进行研究,将会提供一种探索问题的方法。矩形底边长度的加长是其高度减少所带来的结果。我们能否说当儿童掌握这一涵义时也就理解了一个函数规律呢?或者更确切地说,我们是否需要对度量采取干预措施,量化两个大小间的共变关系,而从量化的那一刻起儿童也就获得了函数的概念呢?这就意味着对大小变化的探索遵循着一个预定的发展规律,因为它关乎其他大小的共变。

实验设备与技术

(A) 设备—— 一条绿色棉线,长 40cm,将棉线围着 4 颗大头针绕成一个边长 10cm 的正方形。通过移动 4 颗大头针,我们可以将正方形变成一个长方形。高度的逐渐减少带来了宽度的逐渐增加。最终,我们得到了一个由 2 个大头针支撑起的双线。

(B) 技术——将棉线制成的正方形 *ABCD* 置于一张固定在小钉板上的白纸之上。

---

① 本研究所采用的实验方法其实是我们对"空间守恒"所作研究的直接结果。从这些研究结果中,我们发现某些对于新的研究方向而言有趣的数据,并在对函数的理解研究中采用了这些数据。向儿童呈现一个固定长度的 L 型绳子(用一枚大头针 *O* 分出两个垂直段 *AO* 和 *BO*),然后提一些涉及理解长度互补关系的问题,即 *AO* 的缩短与 *BO* 的增长之间的关系,或反之亦然,7 岁的儿童能够解决诸如此类的问题。同一个儿童,当被问及一个正方形(以恒定的周长)转换为一个矩形时,却不再能够通过长度上的增加来弥补高度上的减少。变换的顺序是通过一系列嵌套的矩形来展示的,其结果就是矩形两边边长的同时缩短。解决水平上的滞差是否因两线段的位移表象与两序列大小的协调之间的差异所导致?我们有可能首先构造一个有序的高度序列,然后根据一个相应的宽度来协调每一个高度。儿童在 11—12 岁之前都达不到正确解决此类问题的水平。万·邦与伦塞,艾瑞克,《空间守恒》,发生认识论研究,Vol. XXI,法兰西大学出版社,1965。

棉线以先前绘制的正方形轮廓为参照标准。AC 边和 CD 边与两条 35cm 长的代表 X 和 Y 坐标轴的线段保持一致(图 11)。

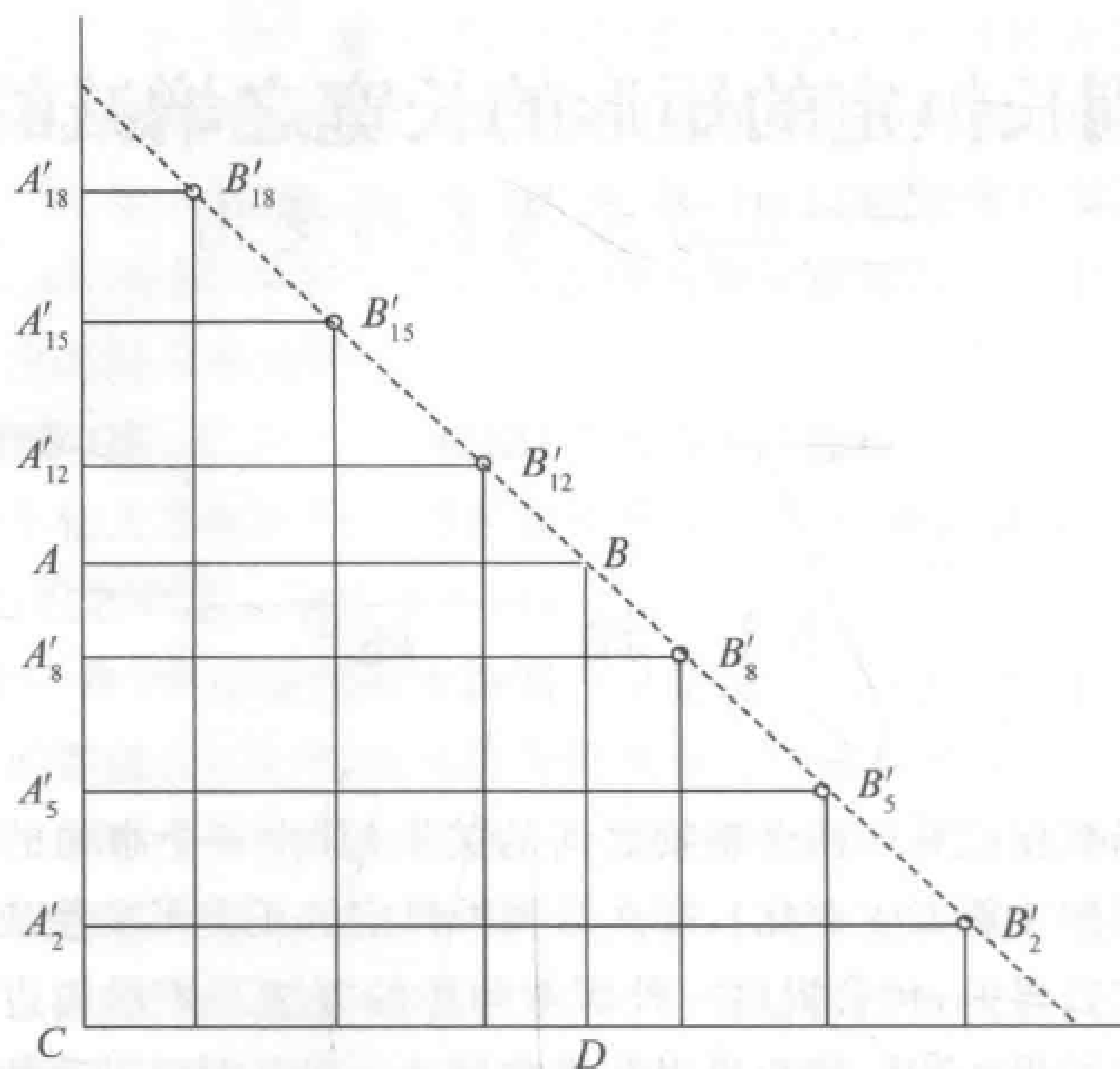


图 11

被试首先被要求做出预测,然后被问到刚刚实施的转换。接着让儿童比较他的预测(先前用大头针在小钉板上标记出 A, B, C, D 四个不同颜色的点)与实际结果,并解释为何其预测应该与正确结果保持一致。问题包括三个部分:

1. 实验第一阶段涉及高度的降低。实验者先后移动 A 至 A'(以让纵坐标从 10cm 移至 8cm,至 5cm,至 2cm,直至 0cm,A 与 A'重叠之处)。儿童可以自由预测 B'和 D'的位置。儿童在其预测中采取的移动顺序,即首先放置 B'然后推断 D'的位置或反之亦然,可以为我们提供有关函数规律的演绎步骤的信息。

2. 当 B 依次占据的位置得以标记和校正后,我们将红色的大头针 B'_8,B'_5,B'_2,B'_0固定在这些位置作为参照点。我们要求儿童预测由宽度减少所带来的变化。D 点将依次通过 D'(8,5,2cm 处直至 D'最终被带回到 C 点)。转换也由此具有了对称性,手头的问题也就是探明儿童是否能够从实验本身和对实验结果的观察中获得些什么。

3. 在第三部分我们要求儿童对 B 位置做出解释。为什么它们的位置会形成一个 45°夹角? 在四边形转换过程中 B 点(如果大头针刺穿了绳子,即绳子仍然被固定住的情况下周长被划分为两个相等的部分)是否能够总在周长上保持同一个位置? 换言之,探明儿童的推理是基于整个周长还是基于一半周长,这将会十分有趣。这相当于对一个将一条线段分作两个部分的点进行位移操作。

注——为了清晰地表达,我们把构成正方形四角的大头针称为 A、B、C、D,C 同时还是坐标轴(x,y)的原点 O。A 的位移点指定为 A'_8、A'_5、A'_2、A'_0以及 A'_{18}、A'_{15}、A'_{12}和

A'_{10}。A'和B'的下标表示的是以厘米为单位的纵坐标值。D'的下标对应的则是沿横坐标测量得到的数值。

§2 结 果

我们对41名年龄位于7—13岁的儿童进行了研究。区分行为类型的标准被界定为儿童领会以下逻辑蕴涵关系的能力：一个大小（高度）的变化意味着其他部分大小（宽度）的变化。为了有助于理解宽度的增加是高度（将被确定为协变量）减小所带来的结果，至少需要有两个连续转换的状态被联系起来。共变关系之所以存在就是因为我们保证了矩形周长的恒定。

基于上述标准，我们描述了我们所观察到的不同处理方法。尽管我们还没能建立起一个随着儿童年龄发展而变化的行为层次结构（这样的顺序假定了充分的深度分析），不过我们将以一个进化顺序的方式介绍它们。

行为类型

(a) 未能将两个转换状态联系起来。——这种无联结在实验的两个阶段都出现了：对转换的预测与观察起了作用。在第一个阶段，儿童不能设想高度的减少将会导致宽度的增加。例如，当我们将A点移动到A'_8点时，儿童以同样的水平（目测）下移了B点，但B'_8点仍在正方形的一侧。换言之，图形的宽度并未发生变化。乍看之下，似乎是儿童没能理解任务。但是，经仔细检查后，我们发现这种在转换过程中拒绝越过模型图界限的行为多次发生。事实上，当我们进行第一次转换时，即使儿童已经观察到B'_8的位置越过了他的预测点，他也不会在下一次转换中将此考虑在内。对应于A'_2，儿童以相同的水平移动B'_2，但总是在正方形的BD一侧移动。缩短一边并不一定带来另一边的补偿性延长。这一点在当正方形被转换成宽度越来越小的长方形时尤为明显。儿童对每次转换都坚持图形的高度不变，即与前面的转换图形保持相等。更令人吃惊的是，儿童在最后一次转换中仍然沿用了此前的矩形高度。例如，当我们将D'_5移回D'_0时，儿童立即将大头针放到A'_{15}所在的位置上。我们将这一行为描述为一种非连续的而不是非补偿性的，因为一个事件的变化并没有以任何一种形式影响另一事件。补偿观念的前提是一种共变，即使最初这种共变是矛盾的，比如高度的降低带来宽度的减小。

(b) 方向一致的补偿。——从严格的成功与失败标准来看，这一类行为似乎比前面描述的行为更为简单。在我们试图找出儿童是否具有或不具有相关变量之间补偿关系的概念过程中，我们发现在这种方向一致的行为中似乎存在着一个合乎逻辑的推理，尽管这一推理是错误的。面对行为(a)，我们自问在本研究中图形的边界达到何种程度

会导致对共变概念的理解。

然而在这一类行为中，儿童已经能够协调连续变换的状态：一边的减少带来另一边的减少。如果儿童仍未受到随后的纠正的影响——在做出每一个预测后我们都对实际结果进行了验证——那它就是由首要的推理规则"更小意味着更小"所导致的。这就是转换的函数结果。如此一来，高度或宽度的减少带来了另一维度的减少。我们同时还注意到儿童对维持大小顺序的关注。

(c) 从一个到另一个的转换中发生大小的补偿。——这种补偿一般都与两个连续的转换状态有关。第一个条件是必须考虑维持周长，"因为这是同一根线"而且"因为周长一直不变，只有宽度和长度变化"(Phy，12 岁)。基于上述考虑，儿童在长方形的两边之间建立了一个连接。一侧边长失去的数量被另一边长所获得。当 Edw(10 岁)在内涵(intensive)补偿的基础上提出："因为宽度变小了，所以变长了，"或者当 Nor(8 岁 10 个月)说："我测量了正方形(初始)边与指定点之间的距离差，它们之间的差值被加到了正方形的长度上"时，我们能否称其为函数关系呢？我们认为，函数关系必须包含连续变化的观念，正如我们的实验所示，这些连续变化即使没有表现为度量序列，也非常具体地表现为外延序列。但在我们所引用的第一个例子中，补偿是一步接着一步完成的，并且到最后一次转换时高度的减少不再能通过矩形宽度的增加获得完全的补偿，儿童对此也一点都不惊讶。在第二个例子中，所有的转换都基于最初的正方形。一旦我们要求被试以最初的正方形而不是任何正确转换过的长方形为起点时，儿童就开始犹豫不决，也不运用其补偿方案。

这就是为什么我们将这一类补偿行为描述成是一步接着一步进行的。儿童尚未发现一个用以调节任何转换的系统。

(d) 逐项探求两列变量间补偿的对应关系。——这类行为出现在我们要求儿童找到一个对补偿有调节作用的系统时。首先，我们注意到儿童不再满足于"差不多"。换言之，对于每一个 A'，都有一个唯一对应的 B'，所以需要进行测量："我们必须测量以找到准确的位置。"儿童还得确定哪些大小需要测量。在一个给定的情况下，儿童仍然会继续花相当长的一段时间去探寻这种"准确的"补偿，从而为下一次转换找到解决方案，而不是去建立一个适用于所有情况的建构规律。如此一来，儿童开始寻找一种解决程序。例如，因为它是对的，所以与长度相比较，我们必须移动大头针两个宽度(AA' 距离的两倍)(Cla，11 岁 3 个月)。之所以是两倍(或更多)是因为到最后一次转换时，CD 边的长度正好是最初的正方形边长的两倍。移动部分超过上述长度会导致荒谬的结果。因此，儿童在试图增加宽度时关注的不是移动的距离而是剩余的高度($AA'-AC$)。

在从第一部分到第二部分的过渡中，我们提出了同样的问题(对称的状态)，帮助儿童领会增长或缩减的规律的同时发现双重序列化(double seriation)。

(e) 发现共变规律的同时顾及转换中的限制。——我们在本实验中使用"纵向弯曲正方形"的提法，是希望帮助儿童在由正方形转换为长方形的过程中通过操纵和观察

去发现建构的规律。更具体地，红色参照点（连续转换后 B'的所在位置）的队列成 45°斜角暗示了正如我们所希望的研究发现，数对 A'与 D'正是 B'在 y 轴和 x 轴上的投射。

总之，我们可以指出有两类行为带来了对建构规律的发现。某些被试在“阶梯式补偿”中发现规律性。他们通过将高度和宽度按顺序排列，然后简单地让补偿等量化来获得这一发现。“因为它们是逐步进行的”并且“在上面（高度）所减去的部分正是在下面（宽度）所增加的部分”（Phi，13 岁）。另一些被试则从补偿的观点出发找到这一规律性。例如：“去找到准确的点（B'），测量原正方形的边长然后将我们从高度上减少的部分增加到长度上就足够了”（Dan，12 岁 6 个月）。继续保留下来的线段就是那些存在于在 x 轴和 y 轴上的线段。斜线也由此而来，“因为周长是恒定的”。

第九章　序列规律性与比例

§1　描　　述

实验Ⅰ中所使用的研究设备，不会产生具体的大小序列。函数关系是两个相同属性的大小之间的相互补偿关系，即一条线段的长度。但是，如果这些大小之间区别极大，并且它们的增长是以同样的方向进行的（例如，更大意味着更远），这是否能够帮助儿童发现函数关系呢？此外，当这些大小序列是以一种有规律的方式呈现的，知觉是否能够有助于得到正确的结果呢？如果真是这样的话，那么两个序列间的协调是否足以分离出一个比例关系呢？为了研究这一系列问题，我们向儿童呈现了一系列放置于一连串木棍上的圆形。我们预先定义了圆形大小的作用：把圆形放在木棍上，这看起来像是同一个圆形在不断变大。由此给定圆形的位置就是其大小的函数。我们将让儿童自由选择大小的标准：表面积、直径或半径。

设备与技术

设备——我们有一系列直径规律地从 1cm 增加到 10cm 的十个圆形（从 C_1 到 C_{10}）和一系列的棍子 S，它们分别有 100，75，50，25 和 10cm 长（S_{100} 代表棍子长度是 100cm）。每个圆形的中心都有一个孔。我们可以通过使用大头针穿过圆形中心的办法将圆形与棍子连接起来或是在保持大头针钉在棍子上的同时移除圆形（图 12）。

技术——我们向儿童展示这一系列圆形并说明其有规律的增长。

1. 我们将 C_1 放置在最左边的 S_{100} 处，并用一个动作示意如果这个圆形有规律地增大成 C_{10}，那么它将会处于另一端。然后，我们要求儿童将 C_7 放到棍子 S_{100} 的正确位置，并说明他是如何前进的。然后，我们要求儿童按照 50，75，25 和 10 的顺序用其他棍子逐个地重做一遍同样的操作。

2. 使用相同的棍子，我们要求儿童找到 C_3 所属的位置。

3. 一旦确定了 C_3 和 C_7 的位置，我们要求儿童将所有棍子按顺序放到桌子上，以向儿童说明这是另一种准确找到圆形所属位置的方法。

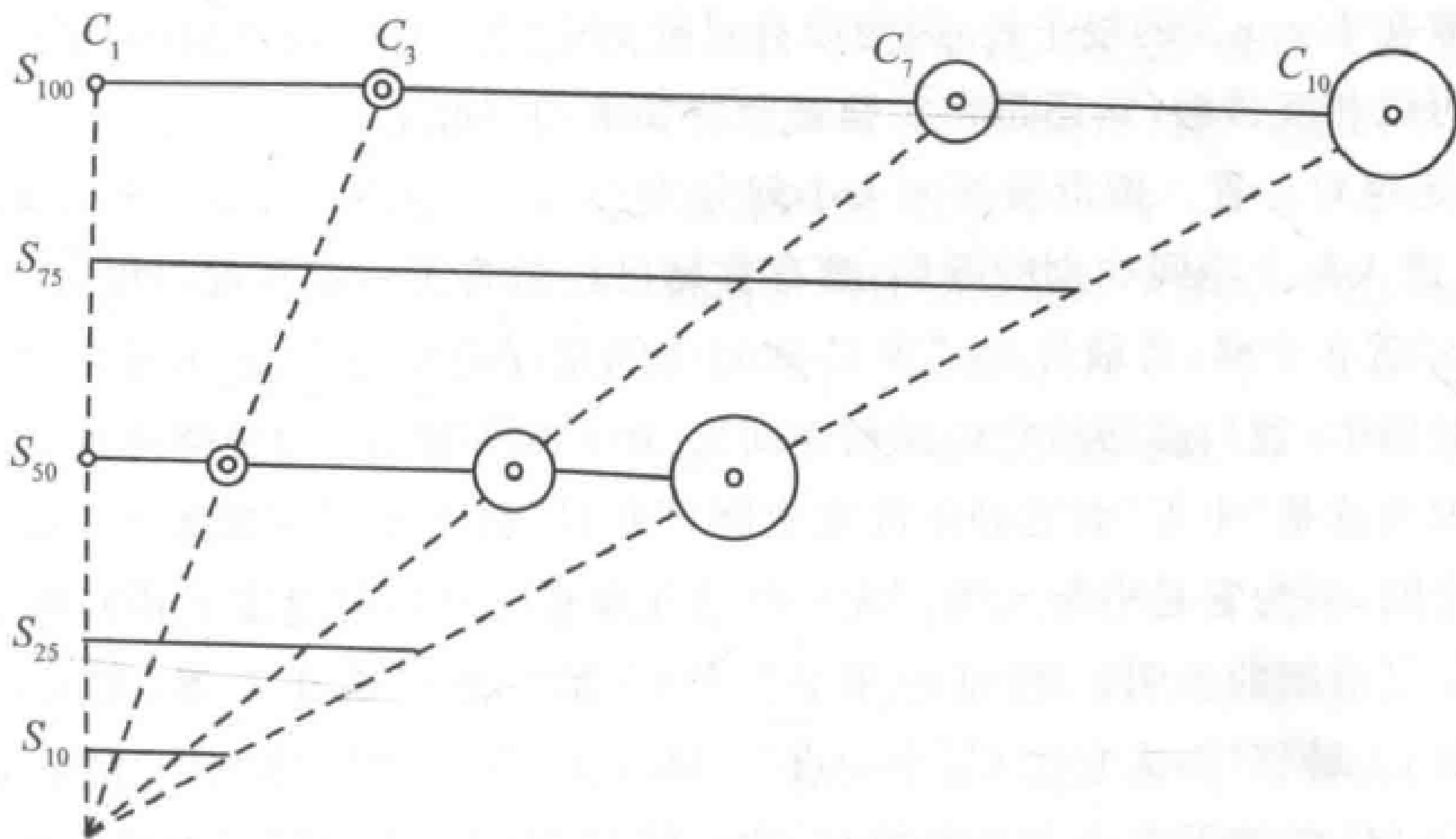


图 12

4. 一旦建立顺序后，儿童会被邀请来改正所犯的错误并说明他的推理。无论结果如何，我们都会向儿童指出正确解决 C_7 与 C_3 分别在 S_{100} 与 S_{25} 上的位置的方法，并要求儿童改正 C_7 和 C_3 在其他棍子上的位置。

5. 从对改正的说明中我们进入到对程序的概括阶段，从而建立起关于圆形大小与棍子长度之间的比例关系。然后我们会介绍另一套长度分别为 140，120，80 和 60cm 的"棍子"(纸条)，以便我们可以发现儿童是否能将这一比例关系运用于这些长度中。

§2 结　果

我们接下来将要描述的行为是从 57 名 7—13 岁儿童的反应中得到的。其中最具特色的行为可以为我们提供关于下述函数的信息：(1)圆形 C 的大小与它在给定棍子上的位置之间建立起来的关系；(2)在序列化过程中，建立棍子的大小与间隔之间的关系是为了确定圆形之间的相对位置；(3)最终发现圆形大小与棍子长度之间的比例关系。

行为类型

(a) 用以下行为来说明儿童是如何在一根给定长度的棍子 S 上找到圆形所处的位置：

① 未能建立起关系。7 岁的儿童(有时甚至是 8 岁儿童)倾向于多多少少随机地放置圆形。当儿童将一个较小的圆形放置在一个较大的圆形之前时就获得了顺序关系。但这是仅适用于一系列圆形的函数，而不是作为一系列棍子长度的函数。因此，儿童拒

绝将圆形放在 10cm 长的棍子处，因为没有足够的空间。对他而言圆形是不能重叠的，它们最多可以相互接触（这还是在实验者坚持要求的情况下）。

② 指定绝对位置。圆形被按照大小划分为三类——大的、中等的和小的——在某些情况下，进入某个中间类别的圆形，其存在就已经包含了一定程度的增大。Rob（8 岁 6 个月）说："就在中间，我敢肯定，"将 C_7 放到中间是因为对他而言"还有一些大的圆形和一些小的圆形，我们必须给它们预留空间"。Jos（8 岁 11 个月）也同样地为 C_7 预留了中间点："因为这是'中等'而它必须放在中间，"并且，对于在另一根棍子上的同一个圆形："放在中间，因为它是中等大的。"大一些的儿童在一开始都给出了相同的论点，但随后还提供了更精细的说明。Edw（10 岁 9 个月）开始时将 C_7 放在了 S_{100} 的中间位置，随后将它朝着 C_{10} 转移"因为它比 C_{10} 小一点"。Dan（13 岁 2 个月）则做了完全不同的事。他首先指出："C_7 的圆形大小介于大的 C_{10} 和小的 C_1 之间，"不过同时他又用比例关系的方法解决了所有其他的问题。

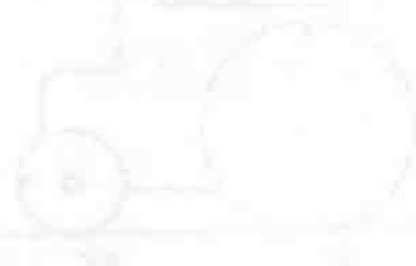
③ 寻求一个简单的关系。对于 9—10 岁的儿童，我们发现他们要么寻找性质上的补偿，正如 Mir（10 岁 8 个月）的"大小最接近的两个圆形"（C_7 对 C_{10}），Cha（11 岁 10 个月）的"比起最小的（C_1）来它更接近大的那个（C_{10}）"和 Jos（11 岁）的"我把它放在了离大圆稍近一些的位置"；要么在两个大小——圆形和长度——的自发协调缺乏的情况下寻找某种序列化。Mir（12 岁 10 个月）请求将圆形按顺序排列，并在已经放置好它们之后对它们进行调整："所有的圆形都必须放在正确的位置上，否则就会太小或太大（这一条适用于距离）。"

④ 发现比例关系。从 12 岁开始，儿童首先对棍子的大小感兴趣，然后考虑每一个圆形在每一根棍子上的相对位置。Jac（13 岁）宣称，"圆形（C_7）必须放在沿着每一根棍子差不多 3/4 的位置处"，并立刻猜出了圆形的大小。Phi（13 岁）指明了 C_7 最接近的位置："我把它放在这里，是因为圆形变得越来越大"；但他马上想到需要测量："我们应该测量一下，然后区别开来看看圆形间我们能放进多少（间距）"；随后他通过分数而不是比例的方法解决了这一问题。圆形的大小通常是由它在序列中的排名来决定的。"我根据圆形在序列所占的位置和它的大小等级来放置它"，Car（13 岁 5 个月）说。有些儿童考虑到了圆形的规律性序列化，正如 Char（12 岁 7 个月）所说"圆形必须排成一条线"（但当他示范这一点时，他做出了两条与所有圆形相切的线）。极少的儿童能够像 Geo（13 岁）在解释其原则时所做的那样建立起比例关系："棍子的各部分之间的关系保持不变，因为它取决于圆的直径"，并且直径之间的差值是恒定的。

(b) 本实验中的序列化行为还对分离出函数关系的能力有益。——效果上，棍子间保持的间距取决于棍子之间的长度差值。相等的差值意味着有规律的间距。以 S_{10} 的间距作为对照。10 岁之前，棍子的序列化没有以任何方式帮助儿童解决放置圆形的任务。除两个 8 岁的儿童以外，没有一个儿童看出棍子的序列化与给定圆形的相对位置之间存在的任何关系。从 10 岁开始，棍子 S_{100}，S_{75}，S_{50} 和 S_{25} 按照正确的顺序被放

置，但儿童并没有改变 S_{25} 和 S_{10} 之间的间距。尽管如此，他还是发现了放置 C_3 的正确方法。只有从 12 岁开始，S_{10} 和 S_{25} 之间的间距与 S_{25} 和 S_{50} 之间的间距的差异才被儿童注意到。“对这一个（S_{10}）的差异并不总是相同的，它更小一些”，Chris（13 岁 5 个月）提出；“对它来讲稍稍近一点”，Pir（13 岁）说道。同样也是从这个年龄开始，儿童得出了相同大小的圆形通常在一系列的棍子上保持“相同的（相对）位置”这一个结论，正如我们所看到的，要么是因为有着相同的 3/10 或 7/10 棍子长度的分数，要么是因为距离与相关圆形的直径成比例。

（c）建立比例关系。——我们注意到，由于棍子的序列化，从 10 岁开始，一半的孩子找到了圆形在每根棍子上的正确位置。令人惊讶的是，同样的儿童却不能够将这一过程归纳到稍后介绍的其他长度的任何一根棍子上。这对那些 140，120，80 和 60cm 长的棍子就是如此。这一事实与前文指出的序列化行为是一致的。为了发现间距的大小是棍子长度的函数，儿童已经运用了比例关系。只有从 12 岁开始，儿童才能够成功地将这一概括推广到任何长度的棍子上，以发现给定圆形应该放置的准确位置。但这无疑是因为儿童没有将这种比例关系如我们所希望的那样外显化。儿童通过分数，通过圆形在序列中的排名以及只在极少情况下通过对两种大小共变关系的关联来解决问题。



第十章 车轮大小与行驶距离之间的函数关系

§1 描 述

任务的目标是发现车轮行驶距离(即车轮的圆周)是车轮大小的函数。两种大小的变化方向相同,即车轮越大,其行驶距离就越长,反之亦然。举一个距离的例子,我们滚动一个轮子,其行驶距离就是旋转的结果。在儿童能够有效地观察到“距离”维度时,他是如何做到将另一个维度——可通过表面积、半径或直径计算得出的车轮大小——与变化的系统协调起来的呢?最后,如果变量间的关系是恒定的,儿童是如何从简单的对应关系转变为比例关系的?

设备与技术

我们向儿童呈现了一辆有 4 个车轮或圆盘的汽车。黄色的前轮测量直径为 3.8cm,周长为 12cm,正好是蓝色后轮大小的一半。右前轮和左后轮的表面有一个印章,它会在每一次完整的旋转后留下压痕标记。这辆车是在一条宽 10cm、长 2m 的纸上滚动。我们安排蓝色和黄色的标记在一开始是并列排放的。因此,每个转动周期的最后,黄色标记和蓝色标记的位置将会重合(图 13)。

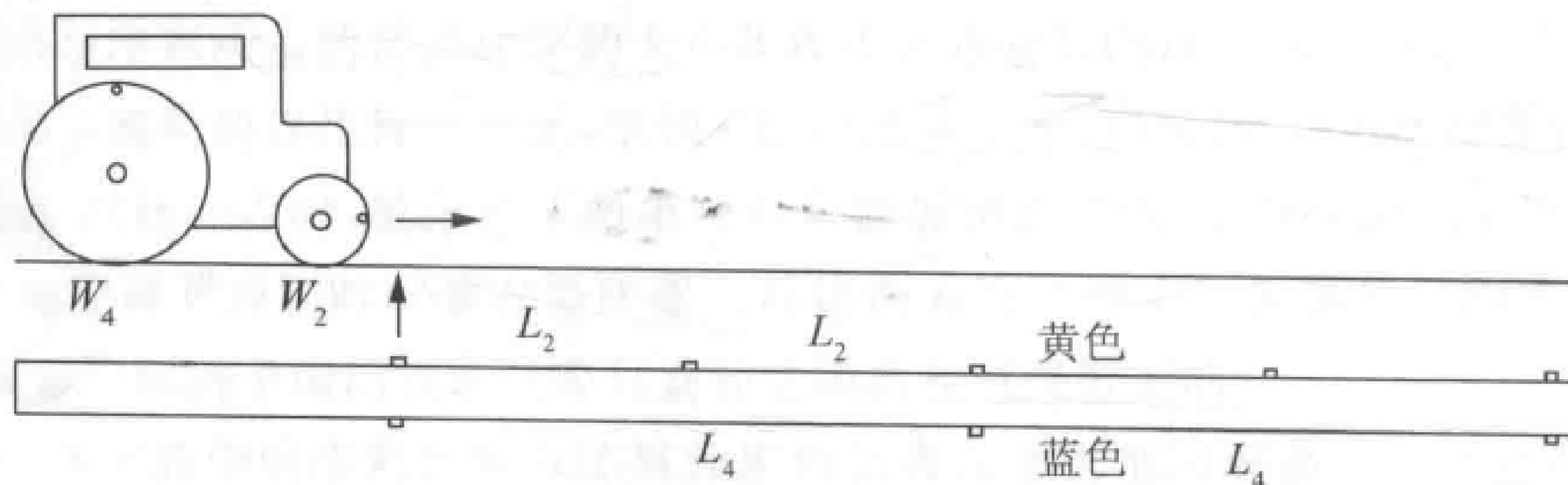


图 13

实验由 4 个阶段组成:

第一阶段:预测等距序列——在被试观察到纸条左边留下的痕迹后,汽车被拿回到

它的起点位置。要求儿童标出下一个标记的位置(用符号标记),就像这辆汽车还在继续沿着之前的路线行进,直到道路尽头。所要处理的问题就是为距离、给定车轮以及相同颜色的标记之间的距离常量(与行进速度无关)建立起对应关系。

第二阶段:在车轮、行驶距离和车轮大小的量化之间建立起关系——在本阶段,我们有一系列不同颜色的车轮以及长度与车轮周长相等的彩色纸条。一套完全相同的圆盘和纸条是用白色硬板纸制成的。我们为我们的任务进行了命名:W_2(直径=1.9cm)与 L_1(周长=6cm);W_2(3.8cm)与 L_2(12cm),黄色车轮;W_3(5.7cm)与 L_3(18cm);W_4(7.6cm)与 L_4(24cm),蓝色车轮;W_5(9.5cm)与 L_5(30cm);W_6(11.4cm)与 L_6(36cm);W_7(13.3cm)与 L_7(42cm),最后是 W_8(15.2cm)与 L_8(48cm),车轮的一侧画出了半径。

我们把黄色车轮(W_2)、蓝色车轮(W_4)与小的黄色纸条(L_2)和蓝色纸条(L_4)放在桌子上。我们向儿童提出"蓝色车轮比黄色车轮大多少"的问题,以发现儿童是否通过比较 L_2 与 L_4 来推论车轮大小间的关系或者是否通过重叠 W_2 与 W_4 以比较二者的表面积。问题聚焦于建立行驶距离与车轮之间的关系。

第三阶段:(a)从一个给定距离入手预测车轮的大小——我们使用一根小的彩色纸条和几个白色的车轮。根据 W_2-L_2,W_4-L_4 以及给定的长度 L 来做出预测。要求被试作解释的目的在于,探索从外在行驶(多远)到测量(当一个轮子的大小不是另一个轮子的整数倍时)或到比例关系的过程中,儿童内在演绎的分化(一个比 W_2 或 W_4 更小或更大的车轮)。

(b)根据一个给定车轮预测行驶距离——我们使用彩色的圆盘和小条的白色硬纸板。给定 W_2-L_2,W_4-L_4 的情况下,我们提出一个 W,儿童则必须由此推导出相应的行驶距离 L。我们要求儿童根据一条内在的标准,通过外在的比较或考虑关系或比例的大小来解释他所做出的选择以及做决定的方法。

第四阶段:函数规律与比例规则——这最后一部分聚焦于渐进律的概括化。为方便两个序列的大小的比例建构,我们向几位被试展示的是有半径标示的车轮,我们假设他们会因此更容易分离出相关的尺寸,将半径从圆形的其他特征、直径或表面积中分离出来。

§2 结　　果

我们询问了116位6—13岁的儿童。鉴于本研究的样本量相当大,我们不止可以分析典型的行为,还可以描述各发展阶段的特征。实验包括四个阶段。因此,如果儿童在第一个阶段试着在车轮大小与行驶距离之间建立联系,那么提问将会集中于探寻第二和第三阶段之间的比例关系并成为证明函数规律的实例。

1. 行为类型

(a) 相等距离守恒——没有这种守恒，随后的任何比较都将是错觉。考虑到66%的回答都是正确的，我们认为这一概念儿童从8岁起就已经获得，尽管儿童并不是一直设法使用某个恰当的测量工具(棍子、绳子等)。与之相比，几乎所有的6岁儿童(88%)都预见到了无规律的距离，一般就是彼此之间越来越近。虽然我们成功地(例如通过重复实验)帮助大多数被试发现了这种距离的相等性，但仍然有40%的6岁被试和大概20%的7－8岁被试继续出现了下述阻碍他们掌握余下实验的解决方法的行为。第一个行为中，黄色车轮(W_2)和蓝色车轮(W_4)的行驶距离是相等的。行驶距离可以是任意的大小，但只对应车轮的一次回转，不管车轮的大小如何。在第二个行为中，被试以对两个给定行驶距离之间差异的预测取代了对其中某一个行驶距离的预测，行驶距离实际上就是车轮转动一周所产生的位移。最后一个行为中包含了车轮的转动速度，如果行驶距离是转动速度的一个函数，即当汽车跑得越快其距离越小。我们会把这个问题放到实验Ⅳ。在此期间，我们告诉儿童汽车是匀速前进的，而且我们让它保持一个恒定的速度，以便少引入一个变量！

从8岁开始，儿童理解了不管汽车怎样运动，对每一种大小的车轮而言都有一个与之相对应的给定的保持恒定的行驶距离。

(b) 车轮的大小与行驶距离的长度之间的比较：关系建立过程中的不同行为——当W_2与L_2之间的对应关系建立起来后，一方面，意味着W_4与L_4的关系，另一方面关于对W_2与W_4以及L_2与L_4之间关系的理解的提问启动了儿童在建立关系过程中的不同行为，这些行为是可以进行层级分类的。

第一类，内在的量化——此处的比较是基于一种不依靠任何测量的知觉估计做出的。因为W_4大于W_2，所以有50%的6岁儿童和66%的7岁儿童判断认为行驶距离L_4大于L_2。然而，函数关系仍然是内在的，它可以被表达为“更大意味着更远”，并且儿童并不想建立关系来发现一个尺寸比另一个大了多少。

第二类，寻找量化——6－7岁儿童建立的第一个关系涉及行驶距离。L_4被立即判断为是L_2的两倍长。车轮的大小是通过知觉估计得到的，而没有考虑到车轮与行驶距离间的任何关系。W_4 3倍、4倍或5倍地大于W_2或者说W_2小于W_4 3倍、4倍等其他倍数。

从8岁开始(96%)，儿童试着为车轮的大小定量，我们见证了其间产生的困惑并将它们分成了如下三类：①比较表面积时的困惑：儿童将W_2放到W_4上面或是将W_2放到W_4的中间，然后得出W_2比W_4小3倍、4倍、5倍或6倍(这些关系的倒数并非总是得到遵守：W_2比W_4小3倍但是W_4可以比W_2大4倍)；②对部分与整体的困惑：这一困惑很常见，甚至在10－11岁的儿童身上依然存在，儿童因为他能通过叠放的方式将W_2再次

放进 W_4 里(如同将 L_2 放在 L_4 上)就认为 W_2 比 W_4 小 1 倍;③对车轮-行驶距离关系的可逆性的困惑:W_2 被判断为比 W_4 小 1/2,而 L_2 却被估计为比 L_4 短一半,或者 W_4 比 W_2 大 1 倍(叠放),而 L_4 却被认为比 L_2 长 2 倍(没有叠放)。

第三类,探索逻辑推理——从长度的比较开始,儿童试图"证明"W_4 比 W_2 大 2 倍。这就是为什么从 9—10 岁开始,车轮-行驶距离关系被还原为相同性质的两种大小:直径或半径的长度与距离的长度。

正是由于这个原因,我们在车轮上画出了半径,并展示给那些没有发现半径或直径决定着圆形大小的儿童。

我们重点描述了这些行为,因为它们确定了儿童在后续步骤中是探寻比例关系还是探寻大小的加法组合。

(c) 通过建立一个函数关系,基于对其他项的大小的知识去预测一个项的大小。

第一,从一个给定的 L 入手预测 W 的大小—— 我们发现了以下典型行为:

(α) 简单的对应,没能建立起给定项之间的关系。函数概念的先决条件是一个变量的改变必然导致其他变量的改变。在一个简单的对应关系中,儿童提出滚动车轮(更精确地说是随机的连续尝试车轮)以看看哪个车轮与给定的距离相对应。更简单地讲,他提议用硬纸条做一个车轮然后查看同样大小的车轮。这种回答在 7 岁儿童身上最常见(40%的被试)。

(β) 在有序数列间建立关系。根据较短的行驶距离意味着较小的车轮这一唯一的标准做出判断,75%的 8 岁儿童已经能给出一个"定性的"正确解决方案。当我们将一条长度为 L 的纸条放到另外两张纸条(一条较长另一条较短)的中间时,儿童选择了一个中等大小的车轮 W。另一方面,如果我们给出两个中间项,则一直到 10 岁的儿童身上我们才得到了正确的回答(50%)。

(γ) 构建比例关系。这一水平在不依靠测量的情况下是无法达到的。让我们先区分一下两种表现测量应用的行为。第一种,儿童尝试增加行驶距离的差值,以使行驶距离对应于车轮差值的相同增加。L_1 与 L_2 之间的差值等于 L_2 与 L_3 的差值,同时儿童还研究了 W_1 与 W_2,以及 W_2 与 W_3 之间的差值。如果我们给出 W_1 与 W_2 的值,要求根据 L_1、L_2 和 L_4 确定 W_4 的大小,儿童就恢复成"大一倍"的推理类型,给出 W_3 来取代 W_4。12%的 8 岁儿童和 40%的 9 岁儿童均表现出了这一类初看之下似乎是寻找比例关系的行为。而真正开始寻求成比例关系的大小的行为,却是在接近 13 岁的儿童身上(50%)才发现。在 12 岁时,我们发现 20%的儿童表现出这一行为。儿童试图比较的不是绝对差值而是相对差值,即使他们可能会说:"在这里是一样的,那里也是。"意思就是行驶距离 L 间的差值与车轮大小 W 之间的差值是相同的。

第二,根据 W 预测 L—— §1 第三阶段问题(a)和(b)的顺序是我们有意安排的。比较车轮的大小比推断行驶距离的长度更难。在 7 岁儿童和 9 岁儿童之间,有一个明显的滞差。换言之,同一个儿童在这两个时期的行为会在本实验两个阶段的行为之间

出现倒退，除了那些恰好 12—13 岁大的儿童能够分离出比例规则外，这个倒退跨越了所有发展水平，而无关任何类型的行为。

尽管引入画了半径的车轮有助于问题的解决，但它也增加了一个元素，简化了对两个系列长度的简单协调关系的构建。

2. 行为的演变

分析本实验中表现出的所有行为，我们可以划分出以下的发展水平。

水平Ⅰ(6—8 岁)：

该水平的行为特点是对大小进行知觉评估，不能在车轮与其行驶距离以及这两个系列的变量之间建立对应关系。

Phi(6 岁 11 个月) 他预见了行驶距离并做了不均匀的标记，同时申明它们是相等的，而且在我们要求他做出调整时也没有纠正错误。为了证明其对车轮的选择，儿童回答道："我猜的。"

Pat(6 岁 6 个月) 开始时绘出了不均匀的行驶距离，然后在我们的要求和帮助下对它们做了修正。从 L_1 开始对 W 做出的预测是："这个车轮比黄色车轮(W_2)小一半。——你是怎么知道的？——通过看它们的轮子啊。——看车轮还是车轮距离？——我看到，小一半。"在为 L_2 预测 W 大小时，他认为直径等于行驶距离(W_6)。

Fab(8 岁 7 个月) "我们要怎样才知道 W_3 比那个车轮(W_1)大 3 倍？——(他 8 次将 W_1 放到 W_3 上)：它大了 8 倍。——所以那是正确的(right)车轮？——是的。"

这名儿童常常惊讶于两个相关联的大小之间没有共同的度量方式，但他确实同意"更小意味着更短"这一对关系。

Mart(7 岁 9 个月) "黄色这个(W_2)比(W_4)小了三分之二①。——你怎么知道的？——因为这一个(W_4)比起(W_2)更大。——那行驶距离呢？——黄色的距离小了四分之三。——为什么是四分之三？——因为黄色的车轮更小。——它有没有可能也是小了三分之二？——是的，三分之二。——那车轮呢？——四分之三。"

尽管表面看来是一个正确的使用渐进律进行的逻辑推理，但实际上是缺乏精确量

① 此段中的分数，在英文原文中都是倍数。比如"小了三分之二"对应的英文原文是"two times smaller"，"小了四分之三"对应的英文原文是"3 times smaller"，但中文并无"小(减少)几倍"这样的表述，所以译者不得已将它们译成了分数。必须指出，倍数和分数的认知难度是不同的。读者在此处应该注意这名儿童使用的是倍数，而不是分数。本实验中的第三个水平的被试 Mic，才自发地使用了真正意义上的分数。——译者注

化的。“如果距离是一半，那么车轮也是如此”(Chr，7 岁 11 个月)。但 Ann(7 岁 10 个月)却认为：“蓝色车轮(W_4)大 4 倍(比 W_2)，那么蓝色的距离也比黄色的大 4 倍。”

水平Ⅱ(8—11 岁)：

在这一水平明显的发展包括在大小的有序系列之间建立起关系。对大小关系的解释被还原到经验验证而非逻辑推理的水平。测量的引入首先有利于证明序列渐进。

Trik(9 岁 8 个月) 从 W_8 预测 L：“比距离 D 大两倍半。”为了证明自己，他测量了 W_4 和 W_8 的直径，“7.5cm 和 15cm。那必定是差不多两倍半”。

Jos(9 岁 10 个月) 从 L_1 预测 W：“这个车轮是黄色车轮(W_2)的一半。”她两次将距离 L_1 移到 L_2 上然后选择了 W_1。其理由是：“你必须转动车轮。——你怎么知道所选择的车轮是黄色车轮的一半？——(她不知道)。”

Ber(10 岁 11 个月) 为 L_1 选了 W_1。——“为什么选这个？——它是最小的。——还有别的方法验证它是正确的车轮吗？——通过转动车轮。”为了从 W_8 预测 L，他测量了 W_8 和 W_4 的直径：“7.5 和 15，那就是比 L_4 大 3 倍。——你确定？——是的。”他选择了一个过长的距离。他的理由是：“你必须转动车轮。——如果不转动它呢？试着将它在你选择的路程上搬回去 L_4 的 3 倍那么远。——不，这是行不通的。”他再也找不到行驶距离 L_8 了。

我们不想对这些例子做延伸，在这些例子中，儿童寻找对应的大小，但尚未在数值序列之间建立起比例关系。W_1 和 L_1 之间的关系对于每一对数值而言是不变的：正如 W_2 之于 L_2 和 W_3 之于 L_3，等等。

水平Ⅲ(11 岁以上)：

我们观察到儿童使用关系(协调关系 rapport)一词的年龄介于 11—12 岁之间。

Mic(13 岁 6 个月) “与蓝色车轮相比，它是四分之三。——你怎么知道的？——我把它与其他的距离做了比较。”解决 W 问题是通过行驶距离间关系的确定推断而来的。对于 W_8 而言：“新的行驶距离(L_8)是蓝色行驶距离(L_4)的 2 倍长。”他测量了车轮 W_8 和 W_4 的直径来证明：“这一个(W_4)是另一个(W_8)的一半。”他选择了行驶距离 L_8。

被试从由一一对应的变量序列中建构起来的关系中，推演出他们需要的大小。

Mar(13 岁 3 个月) 自发地选择了 L_8：“它比 L_4 大了 2 倍，比 L_2 大了 4 倍，比 L_1 大了 8 倍，我必须找到一个直径是 W_4 的 2 倍的车轮。”

至此，儿童理解了函数，并运用函数来作为度量在比例关系中的应用。

第十一章 多个变量间函数关系的建立：行驶距离、车轮大小、转动频率

§1 描 述

我们的目标一直是了解儿童如何建构几个变量之间的函数关系。在实验Ⅲ中我们处理了两个序列的变量的协调：车轮大小和行驶距离。在本实验中我们将增加第三个变量：转动频率。我们使用频率这一术语是因为任务的目的是了解在同一时期两个车轮的相对速度而非绝对速度之间的组合。用 W 代表车轮的大小，D 代表行驶距离，F 代表转动频率，由此我们就有了三个相关的变量，即黄色汽车 A 是比绿色汽车 B 跑得更快还是更远就是一个有关 W，D 和 F 的函数。我们将试着发现儿童是如何建立以下关系的：(1)其中一个变量恒定时定性关系的组合，例如 $D_1>D_2$ 且 $W_1=W_2\Rightarrow F_1>F_2$ (D_1 是第一辆车 A 的行驶距离，D_2 是 B 车的行驶距离)；(2)相互补偿关系，例如当 $D_1>D_2$ 且 $W_1>W_2$ 时，要求被试找到转动频率 1 和转动频率 2 之间的关系；(3)以上关系的量化。

设备与技术

设备——在一块 2m 长、10cm 宽的木板上凿出两个平行的凹槽(轨道 1 和 2)。一辆黄色汽车(A)和一辆绿色汽车(B)在凹槽中滑动。木板的一端有一个组装轴，使之形成一对滑轮状的轮子，直径分别是 5，7.5，10，12.5 和 15cm。当转动滑轮时它们就会卷起绳子由此将汽车拉向滑轮。黄色和绿色标记是用来区分轨道 1 和轨道 2 的，而彩色纸条则用来标记每个车轮的行驶距离(图 14)。

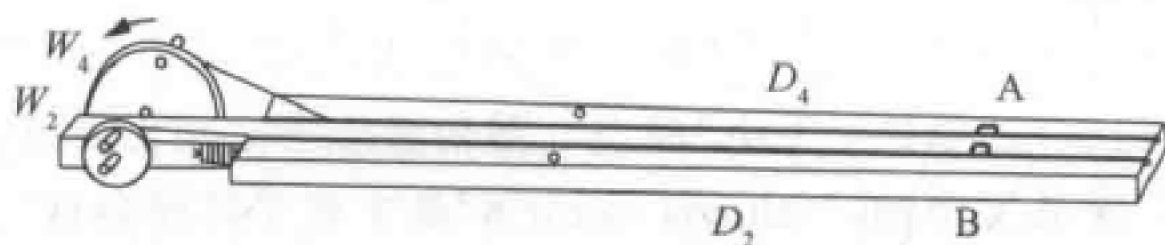


图 14

技术——提问都是临场发问并遵循以下顺序：

你必须做什么

1. 从而使汽车同时在一起平行(并排)前进?这个问题的目的在于找出是否儿童从一开始就试图将变量组合起来,或者儿童是否一直将变量分离开。

2. 从而使 A 比 B 更快?

3. (a) 从而让 A 的行驶距离是 B 的两倍?我们使用标记,而不是口头陈述长度的关系,来提出这个问题。

(b) 与(3a)的问题一样,但此处的问题旨在发现转动频率之间的关系。快几倍?

(c) 以使 A 和 B 保持相同的转动频率?这个问题必然需要发现车轮大小与行驶距离之间的关系。

4. 以发现各种车轮大小之间的关系?

5. 以使 A 的行驶距离为 D,而 B 的行驶距离是 $D/2$(不标出比率)?

6. 从而在 W_1(2 倍地)大于 W_2 的情况下,两车能够同时开始同时到达(仍然是并排的)?

7. (a) 在 $W_1>W_2$(比率是 1/2)的情况下,让 W_1 的行驶距离是 W_2 的 2 倍?

(b) 与(7a)相同,但行驶距离反过来,变成 $D_2=2D_1$。

在某些情况下,我们会给 W 一些其他的尺寸,或是改变 D 之间的比率。

§2 结 果

研究结果来自于 74 名 6－14 岁的被试。我们的目的在于区分出儿童在建立上述变量之间关系时的不同发展阶段。儿童是如何协调相关关系的,尤其是他如何从掌握两个变量之间的关系发展到控制实验中三个变量之间的关系。

行为类型

(a) 不能协调两个变量——我们应该注意到在所有问题中,开始和结束时响起的铃声有助于儿童更好地理解同时性,以及 A 和 B 位移中完全相等的持续时间。

当所有的 6 岁儿童对第一个提问的回答是只要车轮大小相等就可以让 A 和 B 并排行驶时,只有 9 岁的儿童发现了第二个条件,即转速必须保持相同。另一方面,年龄低于 12－13 岁的儿童中,没有人提出任何其他的解决方案,例如改变车轮大小和转速。

但是从第二个提问开始,我们注意到与被另一辆车超车问题有关的有趣行为。6 岁大的儿童坚持我们必须让 W_1 转得更长一些,而不顾铃声已经响起。"我将黄色车轮一直转到终点,但是另一个车轮呢,我在之前就停止转动它了"(Jac 6 岁)。当一辆车超过另一辆时,儿童不能控制它们同时停止。当大车轮的 A 比小车轮的 B 行驶得更快

时,我们在 6 岁儿童身上系统地发现了这种无力协调相关变量的行为。Did(6 岁 1 个月)让两辆车的车轮以相同的速度转动,却指出:"我让黄色的转得更快而让另一个转得更慢,"因为他觉察到 A 超过了 B。这同样适用于当 $W_1>W_2$ 且 $D_1>D_2$ 时儿童解决问题的尝试。"我们必须",Ber(5 岁 10 个月)说,"将黄色那个转快点",因为 $D_1>D_2$。更精确地,Paule(6 岁 1 个月)说道:"我快速转动大的那一个,慢慢地转动另一个,"因为大的那一个行驶的距离更大,但是大的那个仍然超过了小的那个。正如我们所看到的超车是最重要的,而且儿童还不能分离开两个因素:车轮大小和转速。

至于行驶距离和车轮的大小,比较内容仅局限于"大于"和"小于"关系。被试甚至不能理解像两倍距离这样的概念。所有关于量化和互反解决方案(reciprocal solutions)的问题,由于未能协调相关变量所以仍未得以解决。

(b) 开始协调——大概 8 岁开始探索协调关系,尽管对变量的协调不是自发出现的。这需要我们提议要么改变车轮大小,要么改变转动频率。

如果儿童能够在相关因素之间建立关系,那是因为各因素所产生的影响已经被儿童所掌握。因此,儿童必须区分出大车轮拉动汽车更快的行驶,以及车轮的每一次转动都让它比车轮小的汽车行驶得更远。对这些原因进行分解后,儿童就能够通过定性补偿的方式逐步协调相关的变量。当 Mar(7 岁 9 个月)说"小的那个(车轮)必须转得更多一些以便赶上大的那个",此时她还不知道快多少倍。在儿童试着进行协调时我们观察到了错误的补偿。当 Did(8 岁 11 个月)发现他必须"让大车轮转快一倍",他混合了两个条件,而此处只要满足其中之一就足够了。为了覆盖同样的距离,让同一个车轮以两倍速度转动,或是让大车轮以等速转动即可。Isa(8 岁 6 个月)持有相同的观点,她对距离间关系的补偿做出判断时说道:"我让大的那个转 4 圈而小的那个转 8 圈(以让 $D_1=2D_2$),"如果我们想 $D_1=D_2$ 的话这会是正确的回答。她做了一个直接的补偿,而不是一个反向的补偿。这一点同样适用于 Dom(8 岁),他发现"我们必须让黄色那个转 2 圈而绿色那个转半圈"。满足一个条件就足够了,两个条件都满足则是错误的:要么我们需要让 A 的转动频率是 $2F$,B 的转动频率是 $1F$;要么我们需要让 A 的转动频率是 $1F$,B 的转动频率是 $1/2\ F$。

(c) 在第三个变量恒定的情况下对两个变量做出正确的补偿——从 9 岁开始,儿童对问题给出了包含简单补偿的正确解决方案。也是从现在开始,1∶2 和 1∶1/2 这两个比例得到了量化。我们还注意到儿童自发要求对因素作调整,例如改变车轮以让它们转得更快或更慢。正是由于对量化的探索,令简单关系的建立成为可能;例如在 7—8 岁,我们观察到了定性补偿的实例:即一个较高的转动频率来推动更快的速度。这不同于以下的例子:"为了得到相同的距离,小的那个转两圈时大的那个只转一圈"(Cat 9 岁 6 个月)或者在 $W_1=W_2$ 且 $D_1=2D_2$ 时答道:"我们必须让轮子与黄色那个相对应地转快两倍"(Fra 9 岁 10 个月)。

(d) 同时协调多个关系——在 10—12 岁之间,儿童试着协调所有的变量。连续的

回答中包含的矛盾越来越少。例如：

Gii(10 岁 2 个月) “如果我转快两个轮子，但让它们走的圈数相同？——那也一样，它们会行驶相同的距离。——涉及超车的问题。——我让黄色那个转得更快。”他给出了精确的距离预测，A 是 $1F$ 而 B 是 $2F$。对于 $D_1=2D_2$ 且 $W_1=W_2$ 情况的回答：“黄色的是双倍；我快一倍的移动黄色汽车，因为它的行驶距离是绿色汽车的两倍。”对于 $D_1=2D_2$ 且 $W_1=2W_2$ 的情况：“一起，以相同的速度。——W_1 大几倍？——2 倍。”对于相反的问题 $D_1=1/2\ D_2$ 且 $W_1=2W_2$：“以相同的速度……”这名儿童开始意识到他犯了一个推理错误。——“哦！我必须让大车轮比小的那个转快两倍。”但是他再次意识到自己的错误时说：“大的车轮转半圈而小的那个转两圈，”这是正确的。但是 Dan(10 岁)却没有犯这样的错误：“我明白了，我们需要让大的那个转一圈而小的那个转四圈。”

最后这个问题是最难解决的，因为大车轮必须行驶一个小的距离。这里有一个双重逆向补偿，只有 12 岁的儿童能解决。儿童协调了三个关系，知道汽车的前进是同一时间内 W、D 和 F 的一个函数。这里有一些正确解决方案的例子。

Cris(12 岁) “哦！我把大轮子放到黄色汽车上。——小的那个比另一个快两倍，因为大的那个大了两倍(为了让距离相等)。要让 $D_2=2D_1$ 呢？——那就让小的那个跑快 4 倍。”

Dani(12 岁) “我们需要让小的那个多转 2 倍。——要让 $D_2=2D_1$ 呢？——我们需要让小的那个转 4 圈而大的那个只转一圈。”

Jac(13 岁 4 个月) “哦！我明白了，我们需要让它转半圈。中等那个轮子转一圈而小的那个转一圈半。”最后这个例子说明一旦变量之间的关系建立后，即使在车轮被改变时，儿童还是对关系做了重建。

第十二章 在天平的平衡状态中重量 W 和距离 D（杠杆臂）之间的反比关系[①]

§1 描 述

在前面的实验（Ⅱ，Ⅲ和Ⅳ）中，函数关系是直接的比例关系。本实验除了实验Ⅰ中的大小互补关系外，还包括了反比例关系的建立。我们的目的不是让问题更难以解决，而是要通过实验的诱导，了解儿童是如何做到建立起一个函数规律的。给定一个平衡臂，在距离 D 处放砝码 W，我们可以通过调整 W 或 D 来维持天平的平衡。实验的问题在于找到一个挂在距离 D 处的砝码 W，距离 $D/2, D/3, D/4, \cdots, D/n$ 对应于 $2W, 3W, 4W, \cdots, nW$，反之亦然。尽管 $1W$，$2W$ 等都是间断的大小，但有可能产生连续变量的想法，也可能出现因为距离减少为零而达到 nW 的极限的想法。最后，从因果关系的立场出发，我们的目的在于发现儿童是如何知道，在平衡态中的重量——不对固有重量做任何调整——是杠杆臂长度的一个函数。该函数关系更多是自然形成的，但是对物理因果关系的理解却成为建构函数的一个前提条件。

设备与技术

(A) 设备——天平由一根中心有孔的长 48cm 的矩形黄铜杆（4mm×20mm）组成，另一根有底座的杆子通过一个支点穿过前面那根杆子的中心孔以支撑起秤杆（图 15）。

砝码是一些 4mm 粗，4.5cm 长，可以首尾相连的黄铜条。如此一来重量也就转换成了长度单位。一组钩子用来将砝码悬挂在秤杆上。

(B) 技术：

1. 展示——秤盘 A 和 B 挂在秤杆的相等距离处且秤杆处于平衡状态。当我们向秤盘 A 中倒入一定量的谷物，儿童注意到天平的横杆倾斜向了一边。几乎所有受测儿

---

① 英海尔德和皮亚杰已经从比例角度对这个问题进行了研究（《从儿童到青少年逻辑思维的发展》，第Ⅺ章）。另一方面，我们已经用略微不同的技术，将重量转变为长度单位来解决这一问题。

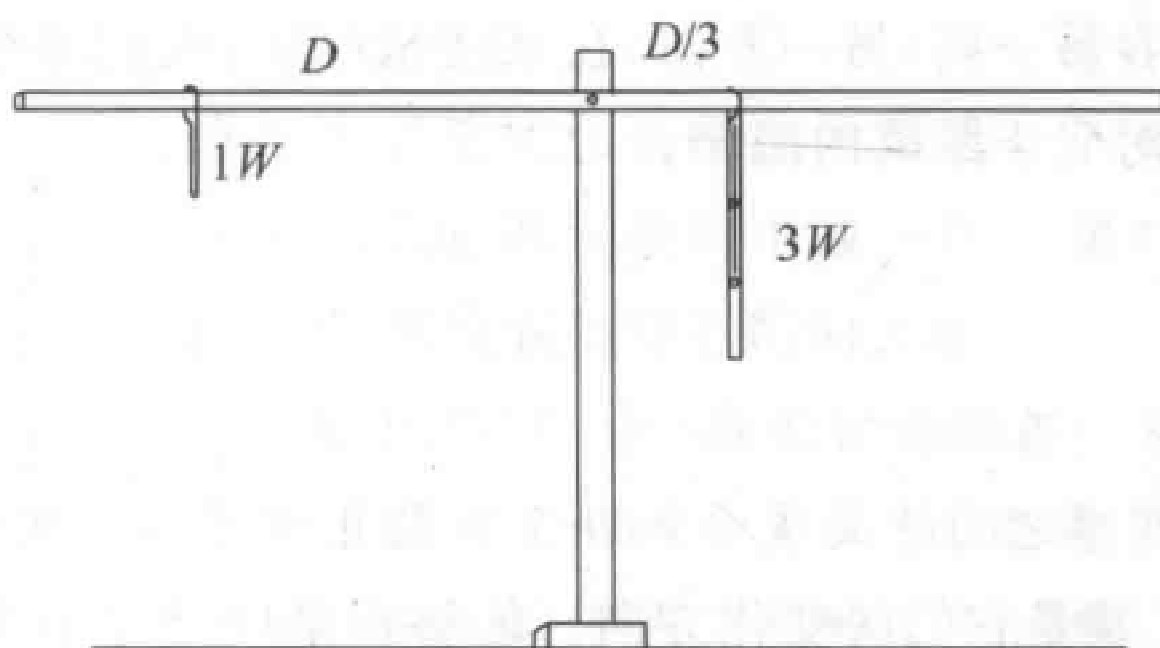


图 15

童都向秤盘 B 中倒入了等量的谷物以恢复平衡状态。我们向 A 盘中增加谷物并要求儿童在不向 B 盘中增加谷物的情况下找到另一种方式来恢复平衡。因为儿童没有找到解决方法，我们建议他移动 A 盘的位置。他通过试误的方式保持天平的平衡状态。通过多次向 A 盘中增加一定量的谷物，我们让他发现将 A 盘逐渐靠近轴心就足以恢复平衡。

有时候，为了更好地呈现这一现象，我们要求儿童在天平一侧水平地手持一把码尺。然后我们将一本书横跨过这把尺子，让他观察到随着我们将书朝着远离支点和他的手的方向滑动时，挂钩也变得越来越沉。

2. 问题——两个相等的砝码 1A 和 1B 被挂在距离轴心约 20cm 处，儿童在秤杆上对它们的位置做好标记。1B 将在实验期间保持固定。我们为 1A 增加一个砝码（=2A），儿童必须预测 2A 的平衡位置，并验证它，给出恰当的解释。

一旦 2A 的位置得到了验证，并在秤盘上做好标记（1A 和 2A 上的标记保持可见），我们针对 3A 做了类似的提问，然后是 4A，5A 等。

我们进入概括阶段，从另一个位置 1B（例如 16cm）重新开始实验，邀请儿童在不通过试误的情况下发现精确地放置 2A，3A 等的程序。作为对照，我们还让他以相反的顺序，例如从 2A 到 1A 的顺序完成相同的实验任务。

随后会问到涉及极限的问题。

注——使用平行技术，提供由纸板条所表示的杠杆臂，儿童可以每次裁剪出对应于距离 D，D/2 等的长度。他可以直接比较两个长度：距离 D 和砝码的“长度”。

§2 结　果

总体结果（来自于 65 名 6－14 岁的儿童）是通过使用稍微不同的提问技巧获得的。砝码要么按照 1，2，3，4 等的顺序增加，要么以递进的 1，2，4，8 等增加。距离则要么是在秤杆上直接做标记，要么通过儿童剪下的与距离 D 一致的纸条进行标记。一方面，我们想知道在建构长度的序数序列和后来的度量序列时，儿童的推理是在绝对距离上

还是在相对距离上更容易一些；另一方面，在某些情况下，我们希望避免经验格式的使用，例如：重量的加倍对应于距离的减半。

行为类型

(a) 未能建立起变量之间的关系——6－7 岁的儿童还不能理解实验涉及的大小之间的相互依存关系，尤其是它们的变化方向。能够在某些给定情形下通过试误的方法依次平衡天平是一回事，分离出这些实证所得的结果间所存在的关系又是另一回事。儿童没有因此而发现变化的方向，即当增加砝码时，朝向秤杆中心的逐步位移导致了距离的缩小。预测中的犹豫、在对砝码位置的向前或向后定位中不考虑已做出的标记的试误，都表明儿童在这个年龄段还不能维持顺序关系，尤其是连通性关系，即儿童承认 $D/3$ 和 $D/4$ 比 $D/2$ 小，但不承认 $D/4$ 比 $D/3$ 小。

(b) 发现因果关系和定性补偿——除了维持减少的方向之外，儿童对定性补偿的表述都是错误的。我们增加的重量越多，"这些（距离）甚至变得越小"。在 Chan(6 岁 9 个月)、Bal(7 岁 1 个月)与 Lor(7 岁 5 个月)一样的论点中："不（拒绝相等），因为这($D/5$)肯定比 4 短。"应当指出的是，重量的增加必然意味着距离的减少。随着每一次儿童将砝码放置于离轴心更近的位置，他很快就到达了极点。"我们不能再增加砝码了（在 6 或 8 之后），因为这样做我们将会越到（轴心）另一边"，Mar(7 岁 1 个月)、Syl(7 岁 2 个月)等说道。其他儿童的说法则完全不同。"我们无法到达那里（轴心）"，说出这句话的 Fra(9 岁 2 个月)和 Pie(9 岁 7 个月)想要为最大重量维持某个距离。这些行为支持了一个事实，即初始距离 D 不被认为是一个基准长度或是从一系列距离大小中抽出的一个单元（因为其他的所有距离都会根据后一个距离而发生变化），这一系列的距离构成了砝码重量的函数。这就是为什么 50％的 7－10 岁儿童持有补偿和距离序列化的想法却没有得到一个正确的解决方法，因为他们无法表征限制边界和构建大小序列。儿童似乎已经掌握了因果关系：更多的重量意味着一个更短的距离。但是，在发现适用于这一杠杆原理的渐进律之前还存在着几个阶段。

(c) 探索渐进律——"这个距离较小，我看到了，但是小多少，那就是另一回事了……"Cla(11 岁 1 个月)发表的意见说明了 10－12 岁儿童所表现出的真正问题。下面的实例被选来说明构建渐进律的几个阶段。

① 儿童首先试图在 $1W$ 和 $2W$ 之间的相等间距位置放置 $3W$，因此将它放在秤杆的轴心处。当儿童注意到自己的错误时，他又试图使用 $1W-2W$ 的一半距离。应当指出的是，增加另一部分距离的想法与将砝码移近轴心的行为是相背离的。

Fra(9 岁 2 个月) "对于 3W？——放到（轴心）终点，因为此处的（重量）越多，就越要让它靠近轴心。"解释："因为当我有 2 个砝码时，我会移到中间位置，而现在我会移到终点。——确定？——是的，确定。"被试觉察到他的错误。——

"噢！原来是那个(1W－2W)的一半。"

② 儿童从1W－2W的距离而不是从总长度出发寻找一个直接的关系。"它总是从之前一半的距离"，即在2W－轴心的剩余距离中取一段。面对连续的失败，儿童重新想起定性补偿，知道距离变小了，却没有确定它们的大小。

> Edw(10岁8个月) "对于3W？——我们需要将其放置在中间(轴心)，因为它是重的。——为什么？——因为它必须分为3个(混淆了极点与间距)。"注意到他失败后："然后还是在2个砝码的中间。"新的失败："噢，不！我们必须把它放在(左侧)一半的中间。"另一个失败后："那个(2W－轴心的间距)的2/3，不！那不对。呃？我们必须把它放到中间(2W)，然后增加这个长度(余下的1/3)。"目前机会在他这一边，因为一半加上余下一半的1/3正好等于2/3。但当他将实验任务进行到4W时，加上余下部分的1/4却不再有效果。对于5W，儿童又恢复为给出近似值。——"那总是变小，差不多是那个(3W－4W的间隔的一半)的一半。"

③ 如果儿童考虑了总长度，他就能够借助实证性试误来发现精确的关系。

> Tos(10岁)(年龄最小的找到正确解决方法的个案) "对于3W：7cm处，因为有它是3倍重，所以我们必须比其他的多移动3倍距离(注意是3倍以上)。"她测到的总长度等于24cm但仍然继续混合这两个过程。"所以它是8cm——不，2W时我们到了一半的距离，3W时我们就不能只是前进一点点了，我们要一路走到最后(轴心)。"观察到失败后说："哦！这正是我之前被告知的"并退回到2/3处。"对于5W而言，5cm，不4.5cm。那样就让24被分作了5等份。——6W呢？——那就是4cm。"

④ 儿童能够发现一系列砝码与一系列距离之间的对应关系，但后面不能够运用它来推断任何可能分配给1W的长度。

> 当1W到轴心的长度变为6cm时，Geo(11岁)能够像Tos那样在没能做出转换的情况下找到正确的解决方法。"对于2W？——我们画在接近2cm(相当于1/3)处，因为这里少几厘米。(从1W的位置开始出发，而不再是从总长度出发。)——它不再是一半？——是的……3cm。——那么对于3W呢？——2.5cm(取代2cm)。——为什么？——它的一半啊(而不再是三分之一)。"

⑤ 儿童发现了两种排序方式之间的对应关系，而没有意识到它们所涉及的距离之间成反向关系。儿童说2W的位置是一半的地方，3W则是1/3处(倒数关系)，但事实上，他选择的却是一半、二分之三、三分之四等处(直接关系)。他从1W处而不是轴心处出发，并用动词表达位移方向是向前而不是向后退的。Geo(12岁10个月)"认为对于2W而言位置是一半之处，对3W而言则是三分之一……这就像是算术"。但他也像Bern(13岁4个月)一样用1/2，2/3和3/4处来解决W的位置问题，而且通过与1W相比较的砝码重量来解释它。

(d) 发现渐进律的应用——当砝码的数列是1，2，4和8等时，11－12岁以上的儿

童会说："它永远是一半的一半。"他采用对余下距离做除法而非乘法的方式进行运算。用二分之一除以二并不等同于二分之一乘以二分之一。儿童用一个直接关系来转换一个反向关系。Rog(12 岁 3 个月)为该定律提供了一个例子："对于 8W 呢？——噢！在(正确的)第七个标记处(长度被分为 8 份，原点 O 在 1W 处)——那对于 25W 呢？——很简单，我们除以 25 然后将它们放在第 24 点处。——对于极限呢？——哦！不……总有一部分被留下来……总是变得更小……"

因此，当 $W \times D = K$ 时，儿童从补足 D 的倒数中建构出这一恒定关系(constant relationship)。

第十三章　第八至十二章的结论:行为的一般发展

在对353名6—14岁儿童所做的五个实验的结果进行总结时,我们将描述行为的一般发展,并在我们所呈现的研究中对此加以证明:实验Ⅰ(矩形研究),实验Ⅱ(圆形实验),实验Ⅲ(车轮实验),实验Ⅳ(汽车实验),实验Ⅴ(天平实验)。

§1　函数观念建构中的发展阶段

阶段Ⅰ(直到7—8岁)——本阶段的特点是在所涉及的变量间建立关系时体验到困难。如果大小可以连续地被赋予一个规定的明确数列值,那么我们就将其称为变量。当操纵实验装置的变换导致这些大小发生变化时,儿童就更加难以理解它们了。因此对本阶段的儿童而言,实验Ⅱ中为圆形选定一个绝对位置,比起基于高度去预测矩形的长度(实验Ⅰ)要更容易。儿童开始为一类圆形而不是一个圆形选定一个位置,大圆、小圆和中等的圆。在元素的序列化背景下,"大于"和"小于"关系被儿童所理解。但在这个排序过程中,儿童并没有设法确定间距的大小,因为那预示着两个变量之间关系的确立。在实验变换的干扰下,儿童在建立关系上的失败就很明显了。高度的减少并不一定意味着宽度增加来作为内在的代偿(实验Ⅰ)。我们在一个被试身上观察到了这种行为,他会随着任何的实验转换,按照一个给定的数字将矩形缩小,即,当矩形的高度减少时,他们会让整个矩形变小。我们还可以在儿童不想超过图形的边界,以及让一车超过另一车时发现这种行为。超车(实验Ⅳ)首先被归因于持续的时间,而车轮转动频率和车轮大小则不会被认为是相关的。

同样地,车轮在行驶路径上标记的距离是相等的(实验Ⅲ),比如这可能是因为车轮完整转动一圈所得出的距离总是相等的,被试对这个相等距离的不守恒揭示出大小的并列关系并不是一种函数关系。因此儿童不能把握变化的方向(实验Ⅳ),因为(我们)所研究的变化的前提条件就是维持系统化的顺序并理解相关因素与所产生的效果之间的因果关系。

阶段Ⅱ(8—11岁)——在第二个阶段期间,儿童趋向于探寻相关大小之间关系的建立。从内在补偿的简单关系入手,儿童试着协调实证得来的变化结果。因此,他开始通过建立连续关系来发现该系列的渐进律。后者意味着不只是对大小的量化,还意味

着对变化时刻之间的间距的量化。我们可以进一步区分为两个子阶段。

阶段Ⅱa（8—9 岁）——要理解大小这一变量的第一个要求就是守恒。凭借这种简单的对应，我们通过返回相同的状态发现了相同的数值[例如：一个高度总是对应于一个宽度（实验Ⅰ），一个给定的车轮对应于一个恒定的行驶距离（实验Ⅲ），一个处于平衡状态的砝码总是对应于秤杆上的一个给定的力臂距离（实验Ⅱ）]，这种简单的对应，在我们看来，正是构建任何函数变化的出发点。这就是为什么我们一直强调这个初始参照点。问题就是要找出这个时期的儿童是如何建立其他参照点的。因此我们观察了对大小的定性代偿的不同方面。8—9 岁的儿童充分证明了当一个维度加倍而另一个维度变为零时，没有预期参照终点的情况下逐步补偿矩形的两个维度是可行的（实验Ⅰ）。（参照点的问题与我们将在阶段Ⅲ中讨论的边界问题是相同的。）在这种情况下的相互补偿似乎是最容易办到的。量化并不意味着会带来一个难题。它应该归于我们在别的实验情境中所观察到的失败的本质，让我们能够更好地理解补偿的内在难题，一方面它涉及对绝对或相对差异的比较，另一方面则涉及正向或反向的量化补偿。

这个量化不是度量，而是如同发生于两个系列元素间的协调中那样，在系列内的元素之间建立起一种大小关系。儿童从 8 岁开始建构内在的序列化，但在系列内的元素之间建立关系却直至 10—11 岁还存在着困难。这似乎显示了行为的退化，但其实这显示了儿童从比较和绝对补偿到探寻相对关系的转变。当儿童在一个系列任务中，他首先面对的是两个呈 1 比 2 的比率的项，他需要将 1 加上 1，同时 2 减去 1 从而将比率颠倒。有些被试却说，（应该）将大一倍的项扩大两倍，或是将小一半的项再缩小一半。儿童将一个轮子重叠到另一个轮子上以比较它们经过的距离，或是将一个长度覆盖到另一个长度上，以观察它们之间的比率或差异（实验Ⅲ）。这表明，他已经掌握了直接的关系。为什么相反的关系没有被同时掌握呢？当我们引入中间值时同样适用，即正确的解决方法只会在接近 10—11 岁时才出现（实验Ⅲ和实验Ⅳ）。

阶段Ⅱb（10—11 岁）——在这一水平，儿童前进到寻找大小之间相对的而非绝对的差异。正是这种在大小之间建立关系的可能性让儿童随后能够将比例关系分离出来。下面的结果让我们将阶段Ⅱ区分为两个水平成为可能。当 9—10 岁的儿童认为他应该让圆形 C_7“靠近”C_{10}时，他也就是在估计表面积的关系，正如他对距离关系所做的运算那样，尽管它仍然是一个近似的关系（实验Ⅱ）。在相同的实验里，棍子长度的序列化过程中，10cm 的棍子给 10 岁开始的儿童带来了一个问题，因为棍子之间的间距被认为与它们的长度有关。在实验任务中，在只有四个相连接的项目的情况下，只有 10—11 岁的儿童解决了反向关系问题，这四个项目分别是：一个短距离对应于一个大车轮和一个长距离对应于一个小车轮。

最后在实验Ⅳ中，从 10—11 岁开始，距离不能被以这种方式进行比较，而只是作为一个给定的相对距离的函数。

阶段Ⅲ（11—12 岁）——对数值或变量的渐进性“规律”的探寻，标志着从阶段Ⅱb

到阶段Ⅲ的过渡。要确定前进就有两个元素必须被确定下来：变化的范围和系列中相邻的大小之间的关系。只要函数规律得到了定性的表述，就足以连接起相关变量以便分离出函数来，即当宽度增加的时候高度减少，车轮越大则行驶距离越长，砝码越重则挂它的位置（离中心）越远，等等。这种关系被 8－9 岁的儿童所掌握。如果是用渐进律来表达函数关系，也只是从 11－12 岁开始的，我们看到这一年龄段的儿童建构了数值的级数。基于这些研究，我们将聚焦于两个方面：有待确定的边界和有待界定的间隔。

正方形的限定就是初始的正方形本身（或是正方形的初始边）和两条对角线。直到 12 岁，儿童才说所有他需要的调整和转换都是从这个初始正方形开始的，并且通过对等的、相互的补偿掌握了渐进律。在实验Ⅱ中，每一根棍子都依次充当了长度的单位，我们必须根据它们来建构间隔区间以放置圆形。给定的长度成为一个基本单位，这就是为什么儿童需要这么长的时间才能概括出在一个虚拟的长度上的圆形的相对位置。边界的大小被用作是天平的一个基本单位。距离（1D）可能会发生变化，但它必然是基数，其他的距离都是基于此建构出来的。

至于间隔，我们注意到，儿童可能会将某个序数位置当作基本位置。在实验Ⅱ中，儿童根据圆形在系列中的排序而将其放置在相应小棍上。建立关系的尝试是通过将一个单元划分为多个片段来实现的，例如，第三个圆形是在 3/10 处，这等同于将长度除以 10 然后选择相应的那个片段。

每个圆形的相对位置就是这样被确定的，首先根据它的排名（根据定性的序列化）和相应小棍子上的片段。C_7 被放置在小棍子长度的 7/10 处。接下来的另一个条件被认为是圆形直径之间的绝对差值。关系的建立是由接下来的这个公式表示的：（圆形）直径之间的差与间距之间的差相同。最后，儿童建构出正确的比例关系：圆形间的比率等于它们的相对距离间的比率。在棍子的序列化中也发现了同样的反应。处于阶段Ⅱb的儿童承认 10cm 长的棍子必须放在靠近 S_{25} 的位置，因为 S_{10} 与 S_{25} 之间的长度不同于 S_{25} 和 S_{50} 之间的长度。直到阶段Ⅲ时儿童才能通过一个比例关系确定这个间隔（实验Ⅳ）。

当儿童被要求从车轮大小间的关系入手确定距离时，我们观察到与从阶段Ⅱb 到阶段Ⅲ相同的发展路径（实验Ⅲ）。这也是用于关系的增加，凭借于此，车轮的大小必须由转动频率来补偿，以解决行驶距离问题（实验Ⅳ）。正确的解决方法要求在所涉及的变量之间建立起比例关系。

儿童很晚才发现反向关系。我们甚至发现 12－13 岁的儿童还在探究直接的比例关系（实验Ⅴ）。儿童从除法入手，例如，将距离 D_1 除以要悬挂的砝码的数量（重量单位）。这与我们在实验Ⅱ中发现的相同行为之间只有一个差别：儿童用长度除以要悬挂的砝码数量，而不是除以系列中的圆形数量。我们说过，儿童不是采用距离的反比，而是采用补足倒数的方式建构了 $W \times D = K$ 这个固定关系。重量 W 与 $D-(D/n)$ 成正比（n＝砝码的数量）。

§2 结 论

尽管两个给定大小之间的对应关系的建构已经包含了函数的思想，无论它们是被随意地还是有原因地连接起来的，但事实上函数观念的建构要困难得多。首先，要理解一个变化就必须建立起一个顺序关系以便确定变化的方向。接下来，由这个变化引起的另一个变化，其方向也必须确定下来。如果该关系涉及因果推论，那它就能帮助我们发现内在的共变关系。换言之，一个函数关系如果其特征是定性的，那它可能更易于理解。但是从这一刻起，为了建构出变化的规律就必须建立起这种现象的恒常性。当系列中的给定物都出现的情况下，就已经足以在这些项目之间建立起一种对应关系。儿童不需要重复实验来观察变化的恒常性。要想定义恒常性，函数规律就应该意味着去探寻一个渐进规律，从而对该变化进行量化。在此之后，因果关系不再为发现内在的变异提供任何实证支持。具体给定物之间的直接比较可以在一定程度上促进系列元素间关系的建立，以便确定系列的发展。在任何情况下，量化意味着不只是绝对性的比较，例如绝对差的比较，它需要建立大小的比率。我们认为正是通过从这些比率入手，儿童才能理解变化的连续性，渐进律的演绎从而成为可能。我们已经看到一个系列的绝对大小和另一个变量的相对大小之间从协调性到比例关系的转变。直到双重关系或两个渐进律之间关系的建立过程出现了协调，比例性才能被充分理解。此后，对一个函数规律的理解意味着对其应用的推演。而只有当共变被定义为两个具有函数关联的变量所对应的两个渐进律的协调时，这个应用才是正确的。

第三部分 理论问题

第十四章 关于函数观念发生论研究的助益分析[①]

§1 描 述

想到的第一个问题与本研究单独处理函数观念的合理性有关。事实上，目前的标准方法将函数视作某一类有序数对，因此简单地认为它是一组关系的一个子集。这就是为什么，一方面，比起发展出函数的理论，逻辑学家们一直以来更关心的是发展出类和关系的理论，而且，在另一方面，这也是为什么在日内瓦所做的工作都集中于类和关系的发生问题。然而，必须要指出的是，这种态度实质上是还原论的，从认识论的角度来看它并不尽如人意。当然，每次当我们在这些问题上使用常识和日常语言时都必须小心，必须要对这两个术语用法上的某些微妙的差异做出区分。因此，我们既不能说函数"小于"(什么)(因为类似问题中相对于正确的回答而言并没有明确的含义)，我们也不能说丈夫是妻子的函数，即使在法律文书中也不能这样表述。

事实上，很容易发现更精确的差别，甚至区分出两类差别。第一类是在数学应用水平上发现的。并集、交集和互补都是基本的关系运算，它们似乎是函数的某种二级运算。反过来，在没有声明两个关系的组合是一种罕见的运算的情况下，我们仍然可以观察到它对于函数是相当重要的。此外，任何关系的研究，无论有多初级，都不能否认传递性、对称性或自反性等诸如此类的属性在函数理论中所起的作用是相当微弱的。当

① 由让-布莱兹·格里兹所著。

然它也可以是非常有用的，例如，知道一个给定的函数是对称的，那么它所代表的物理现象随后就可能显示出令人感兴趣的属性来，但这一点仍然是与概念本身无关的。

第二类差别则更重要。它们源自于两个概念的逻辑态（logical status），并通过抽象过程显现出来。$A(x, y)$ 是一个很好地表达谓词演算（predicate calculus）的方式。由此我们可以用抽象的方法对这类满足 A 的有序数对下定义，即下面所列关系：

$$r = \mathrm{d}f\{(x, y) \mid A(x, y)\}$$

其中，$\{(x, y) \mid \cdots\}$ 表示一个集合算子（set operator）。现在让我们假设这个演算中不仅包含了变量，还包含了常数和 $B(x)$ 所指定的一个项。由此，当用一个常数取代 $B(x)$ 中的 x 时，所获得的结果也是不变的。然后我们就能将该函数抽象（function abstraction）定义为：

$$f = \mathrm{d}f\,\eta_x B(x)$$

其中，$\eta_x \cdots$ 代表函数运算器（functional operator）。

事实是我们在一种情况下同时使用 x 和 y 两个变量与在另一种情况下只使用一个变量 x，其实是完全不重要的。重要的是，我们不得不使用的表达式 A 和表达式 B 其实是完全不同的逻辑类型。如果 x_1 和 y_1 被指定为常数，那么 rx_1y_1 就是一个命题，而 fx_1 则是一个项（term）。

这表明关系和函数中所包含的心理运算也可能是不同的。事实上，我们注意到即使两个具体事物间彼此关联（例如，如果一个在另一个的左侧或者如果一个在另一个之前生产出来），我们也不能认为其中一个是另一个事物的函数。函数只存在于一个事物的特性与另一个事物的特性之间的关联程度。这可能会导致人们认为，为建立一个关系所进行的运算也许在某种程度上比那些为建立函数关系所做的运算更为简单。然而问题并不是真的那么简单，因为我们也可能认为，相反地，至少存在这样一些关系，它们是建立一个函数关系的唯一结果。因此，有可能是，推论更多地依赖于函数，而观察则更多地依赖于关系。

到目前为止我们只关注了一种基于先验（priori）的想法，这种想法必须得到经验的验证。但是因为要想获得关于这些仍然笼统模糊的区别的纯粹经验是有困难的，而一个简单的历史性回顾却可能（让我们）提出一些更明确的定义元素。此外，让我们顺便提一下，该概念适合这一点，因为虽然不可能刺探到类别、关系甚至是自然数这几个观念的历史性发生，函数这一技术性概念出现的时刻却是相当明确的。根据康托尔①（Cantor）的观点，函数（funtio）这一术语第一次出现于一篇日期为 1694 年的关于莱布尼茨哲学的文稿中。虽然我们可以以此事实为依据，假设 17 世纪时人们已经对这个概念已有了足够的兴趣，并给了它一个名称，我们也由于同样的原因受到它的限制，因为很显然地，即使是在数学的框架内，在被命名之前这个概念还是被用得不错的。然而这

① 康托尔（1901），Ⅲ，215。

并不妨碍我们从历史中学习，同时还让我们注意到某些数学家，尤其是那些受到门格尔①影响的人，都试图在不遗漏任何现代见解的情况下详细阐述函数这一概念，这将重新整合某些历史上被忽略的元素。

现在我们将继续简述这个概念的发展，为了方便起见，将整个发展过程分为四个时期。

1. 古代和中世纪时期

巴比伦人确实研究了我们所说的函数，自远古时代起(人们)就使用了无数的数字列表，虽然我们还弄不清楚这些数字列表的确切目的，但其函数特征却是显而易见的。它们实际上表现为有序数对(x, y)的集合，而且，在大多数情形下对于一个给定的x，只有唯一的y与之对应。历史学家所面临的问题就是去理解——更多的是猜测——历史上的记录者是如何由x序列转换为y序列的。仅仅探寻那些独自产生各个序列的规律是不够的。x与y之间简单的逐项对应不足以解决这个问题，因为它恰好是必须重建的体系的关系结果。这让我们可以提出一个假设观点，即比例就是最早的函数依存关系。

让我们在这里回顾一下，在亚里士多德看来所有的递增函数都是正比例②，为了解释亚里士多德关于运动变化的思想，布拉德沃丁写了《比例论》(*Tractatus de proportionibus*)，以及更进一步的，奥雷姆名为《比例的比例》(*De proportionibus proportionum*)的著作。③

鉴于我们的实验中有儿童，我们需要强调三个要点：

(a) 首先是我们的前人在比较两个不同性质的大小时曾遭遇到的困难，因为这个困难直到14世纪才被认为终于从必然性中完全解放出来，只需将相同类型的数量置于比例之中。④

(b) 其次，虽然这是相当明显的，而且经常清楚地知觉到两个大小可以以不成比例的方式同时增加或减少，我们需要一个相当复杂的测量系统去表达这种情况。事实上我们必须能够用一种语言或其他语言表达由正进行的研究中推导出来的函数。

(c) 最后，比例性似乎也最终倾向于某种自身强制性(impose itself)，正如某种不顾事实的简约化。大家或许还记得在这方面中世纪时人们对于一个移动物体逐渐减速的解释，如果s是速度，f是物体的“力”，而r是外界的阻力，我们发现它们之间的关系

---

① 例见，门格尔(1959)关于其他作者对本主题的论著的参考文献。

② 米尧(1906)，第112—117页。

③ 格兰特(1960)。

④ 克龙比(1961)。

直至 14 世纪都被表示为 $s=f/r$ 。假设这个时期的智者既不受观察的影响也不能摆脱哲学家的思辨,那么,前人所做的那些事情都是相当有争议的,而且,总的来说什么都没解释。在比较不同性质的大小和比例的自发性(前提是我们可以用经验去证实的话)方面,看起来(我们)至少需要构成一个更好的工作假设。

实际上,“结果与原因成比例”的说法往往是哲学家们的老生常谈,甚至 H. 庞加莱也让自己基于这个观点来描述偶然性。后者不同于因果律,他明确地提出“原因上的细小差异足以导致结果上重大差异”①。无论这个解释力如何,(我们)必须指出的是,一个在指定区间内导数不为零的连续函数仍然是有效的,并且属性稳定,只要 h 足够小。

$$f(x+h)-f(x)=h\cdot f'(x)$$

这也再次证实因为一个原因上的细小变化,将会在结果上产生一个相应的细小变化,即 x 和 $f(x)$ 是成比例的,至少在一个小的区间内是这样。

2. 古典时期

函数的经典概念的形成是大量工作的结果,大致范围从牛顿到柯西和维尔斯特拉斯。虽然这将有益于对该过程的深入研究,我们可以将它的演化概括为是一个思考焦点从物理观念逐渐转移到更为恰当的逻辑-数学观念的过程。我们将停留在我们认为非常重要的唯一一点上:在其历史上的一个特定时刻,函数已经得到了那些将注意力平分给物理学和数学的学者们的详细阐述。因此,带来了一个考虑事情的全新方式,一个完全由变量(variables)的观点所主导的方式。

虽然今天我们知道一个变量可以被视作是一组类属元素(generic element),但在 18 世纪初时却不是这样的,当时它反而被视作是一个会适时改变的准物理量(quasi-physical magnitude)。“我会假设”,牛顿写到,“其中一个的数量……必须均匀地增加,直到我可以将这个变量与其他的变量联系起来,就像这个变量也是适时改变的”②。在《牛顿的哲学》(*La philosophie de Newton*)一书中,L. 布洛克对此做了评论,表示一个函数是“由一个特定时间内的一个特定运动所产生一系列连续的量”。③ 我们可以进一步补充说,即使是笛卡尔这样一个大大低估了时间重要性的人,在将曲线划分为几何曲线和机械曲线时也不能忽略变化的观点。④

我们必须处理的关系也不再只出现在抽象逻辑的水平上。更确切地说,它们深深地植根于具体的现象,而那些变化的、变异的,或者更好的现象都是共变的。这就带来

---

① 庞加莱(1920),第 79 页。

② 牛顿(1740),LIX。

③ 布洛克(1908),第 79 页。

④ 《几何学》,第二册。

了一个新问题，正如 E. 梅耶森所说的，伴随变化和分析的诞生而来的非理性几乎令数学大厦崩溃。似乎通向解决方法的道路将不得不经过因果关系。

让我们回顾一下伽利略有多么不信任人们对原因的探索，因为在当时，因果性的原理似乎更多的是哲学的，而不是科学的。不过很明显地，只要在假设的大小之间存在着一个比率，那么因果性也可以发挥一定的作用。起源于元语言水平，其重要性直到因果性在客体语言(object-language)中浮现出来后才被重新发现——虽然其外在表现被如此地改变以致它可能不再被识别为因果性。

这是通过建构性(constructivity)间接地发生的。当我们清楚地看到简单的、柏拉图式的断言，即变量 y 事实上取决于变量 x，这个问题就得到了解决，尽管这种依存关系是一种良好的约束，却是不充分的，但它在算术运算的项中提供了细节，这时这种依存是必然的。这就是为什么建构被添加到变化观念中去是多么迫切的需要。让·伯努利在他 1718 年的《科学院通报》(*Comptes rendus de l'Academie des Sciences*)中写道，函数是“由大小变量[x]和常数以任何方式组成的量”①，还有欧拉在他的《无限小分析引论》(*Introductio in analysin infinitorrm*)(1748)中用各种“组合方式”制定了一个函数的一般类别。

这些简短的思考令我们想知道有没有必要假设一个函数的双重成因，如此一来它就能同时通过对物理起源的简单抽象和对数学概念的反省抽象而推导出来。这将同样归功于(至少在其发展的一个特定点上)它的一个有点类似于几何对象的状态。这并不奇怪，因为众所周知解析几何学在函数的历史上发挥了很大的作用，例如克莱罗就曾说，写“曲线”的地方我们也会写作“函数”。

3. 应用的概念

传统意义上的函数仍然深深植根于物理的角度，而将它们引入纯粹的逻辑-数学的水平则需要牺牲变化的思想，需要放弃时间(time)以及由此而来的因果关系。

值得注意的是欧拉自己并没有意识到这一点，在上面所引用的《引论》中，他设想了一个现代意义上的变量，认为变量就是一个简单的类属元素：“变量的数值是不确定的，但是它的范围是确定的”②。

然而今天我们知道，为了富有成效地发展应用这一概念，我们首先必须详细地阐述一个满意的集合论。从心理学角度来看，在类和关系的成因方面有足够的可用信息让我们至少无须直接地追溯过去。然而历史总是暗示着一个间接的回归。

---

① 引用自康托尔(1901)，Ⅲ，第 457 页。

② “可变量是一个未确定或通用的数量，其本身完全涵盖了所有的确定值”，Euler(1913)，Ⅰ，2。

它实际上是一个标准的做法，区分出两个步骤以确定一个集合。第一个步骤涉及所列出的元素，这些元素完全是外延性的，并且只适用于有限集合。第二个步骤始于一个特定的属性，涉及通过抽象的方法组建集合。还有第三个步骤，其重要性已经被逻辑学家们指出来了，而且可以发现它对前两个的折中。它涉及集合的递归生成（recursive generation），而这导致了递归函数理论的产生。我们相信其中有一个点是至关重要的。首先它对于认识论很重要，因为递归性表达了上面所介绍的建构性元素。其次，当然是因为它可以让逻辑从一个形式系统中区分出来，虽然循环性（recursivity）不能服务于逻辑学的所有应用目的。最后，对于心理学而言，当它被置于真正的运算中时，即可组合的和可逆的动作仍然有效（effected）时，它就位于心理学解释的核心处。在第三种方法中，因为自身的主动性，主体仍然在一定程度上呈现出来了，主体通过内涵所给予的或是他自己获得的来构成他所需要的外延。

这样看来，应用的观点不仅包含一类简单的有序数对，甚至超出了单一向右的对应关系。我们可以发现在这个思想中所包含的所有运算，无论是数学的还是其他的，都产生了对应。应用作为一个关系的概念当然是正确的，但还不完备，因为像这样的概念仅仅考虑了一个结果，而撇开了产生它的机制。

4. 态射

到现在为止，我们已经谈到了函数和在复数中的应用，借此表明我们把它们视作是独立的个体，这当然是合理的。“平方”函数和“正弦”函数有着非常不同的属性，就像数字 6，它是一个偶数而且可以被 3 整除，这与数字 7 这样一个奇数和质数是根本不同的。一项对具体或抽象对象的原子研究就可以提供大量的信息，而且这类研究在各类科学的早期阶段比比皆是。不过，虽然数字的例子充分论证了这一点，但对所研究的全部类别的存在进行自问仍然是更富有成果的，通常将它们联合到族群中而非分离为个体去考量。

这个观点早在 1926 年就得到了勃兰特的认同，①同时也是门格尔对函数进行不同研究时所采取的观点。② 因此，在术语的技术意义上，对态射范畴的研究与我们此处所关注的概念的历史新时期是相符合的。

这个当代观点为我们提供了三个心理分析的领域。

(a) 让我们能在获得关于函数组合的经验过程中专注于任何可能产生的兴趣，就像我们专注于详细阐述一个特定函数那样。让我们不要忘记数字的类比很可能是有点误导性的。幼儿很早就知道如何背诵 1，2，3，4。这很容易给他提供实质的情景来正确

① 布莱迪（1927）。

② 门格尔（1959）。

说明加法运算,而这些数字也最终由产生它们的运算来加以排序。这一切对函数而言都不是真的。儿童并没有学习一系列初等函数;要"给出"两个函数以及它们的组合是相当困难的;最后,将一个函数排在另一个的前面也是非常不符合自然规律的。然而,在发生认识论的领域内它正好试图根据思维的自发发展去探究什么是一个重要的数学事实,这个任务仍然在效度方面存在困难。

(b) 它强调将单态射(monomorphisms)从满态射(epimorphisms)中区分出来的重要性。如果我们只用基本的物理装置来研究函数的话,这种区分无疑将显得是次要的。事实上,弹簧的振动绳的拉伸规律以及很多其他例子常被作为一一对应的例证。人们可能因此反对这是一个只针对数学家的高度复杂的用法差异问题。

然而,在没有低估具体化的实践困难的情况下,我们并不认为这些反对意见会限制我们。在最后的分析中,单-满(mono-epi)的区分借助于一个简单的运算规则。① 当向儿童呈现被放入盒子中的物体时差异就被具体化了:他随后必须做到区分以下两种情况:

① 每个盒子中的物体不超过一个(对应于一个单一特征的内射 injection)。

② 每个盒子中至少有一个物体(对应于外延特征的满射 surjection)。

(c) 最后,它会导致一个更加基本的问题,即优先归因于类的本源。鉴于类的程度,它从未被儿童认为是一个类,除非儿童已经以某种方式建构了它,我们可能会认为他将进行的运算在某种程度上是先验性的。事实上,使用这样的逻辑区分只是为了方便起见,我们必须认识到类与运算之间维持着一种内在的辩证性关系。但正是在这种情况下态射的语言才是一个强大的工具。

因此,在没有具体对象的情况下只用态射来阐述范畴论,至少在理论上应该是有可能的。但我们知道,在对象是集合的情况下内射与态射相对应,而满射则与满射相对应。而且,由于所有的应用都是在源集合(source-set)上定义一个商数集合(quotient-set),在目标集合(target-set)上定义一个子集(subset),我们看到逻辑的三个基本概念,即类的概念、层级包含的概念以及商数集合或等价类的概念都与态射有关。

回到我们原来的问题,即在函数概念的起源问题上,似乎我们可以做出三个总体上的先验(priori)假设:

① 函数的概念可能起源于某些或多或少独立于函数的其他概念的协调。所以我们可以期望在其中发现关系的概念,很有可能是两个关系的产物,与数字的一样。我们还希望看到因果关系以及因果关系的影响在其中起到一定的作用。

② 相反地,我们可以假设一个自发的成因,而且这将最终从工具性行为中得到——如果因果关系确实在其中起作用的话——通过群集从而变得差异化。因此,群集将是自然数及其结构、命题逻辑及其布尔代数的结构和函数代数的常见来源,即勃兰

① 例子参考米尧(1961—1962)。

特的广群(groupoid)和门格尔的超群(hypergroup)。

然而必须指出的是，鉴于儿童行为的形式化现状，我们并没有太多的可能在最小的儿童身上发现足以精细区分这两个假设的模型。此外，一个行为继另一个行为之后的出现将为一个假设提供论据却不为另一个假设提供论据，这似乎也是不太可能的。事实上，在协调已阐述过的概念上的困难所导致的延迟，堪比建构一个具体概念所造成的延迟。

③ 最后一个假设严格地说并不是一个中间假设，尽管它确实从每个假设上都借用了某些特征。它是由皮亚杰和布列森提出来的，本质上它是基于两种函数：结构性函数(structuring functions)和结构化函数(structured functions)的区别而提出来的。

结构性函数，可以在起源之初发现这类函数：至少在它们产生于动作这个意义上，这类函数将具有哪些非常类似于运算的属性，也很有可能满足假设②。结构化函数，可以说产生于目标。由于它们实际是由不同的元素组成的，并通过运算本身得以建构，所以它们会满足假设①的部分条件。

假设③没有舍弃任何对前两个假设必不可少的内容。它甚至还允许了更广泛的经验输入，而且可以显示出结构性函数的"逻辑"只不过是结构化函数的"逻辑"的一部分(参见皮亚杰在第十五章的结论)。

§2 结构性函数与分类

如果确实存在某些心理现实能够证实结构性函数的假设，那么我们相信这些心理现实必定是在最简单的分类活动中寻找。事实上，源于行为的相似性与差异性所做的分类，其基本程序已经相当成熟了。在任何情况下，对所涉及的程序的觉察必定出现得相当晚。我们可以回想起，直到波菲利(Porphyry，234－306)将经典逻辑的五个谓项(quinque voces)分离出来后，它才得以完全成为一个群集结构。我们有两个支持本论点的论据，证明这种分类是高度演化的结果。

第一个论据来自于实验心理学，但我们在此不会深入介绍，因为它已经是众所周知的了。皮亚杰和英海尔德已经清楚地表示[①]在"类"(classes)之前出现的是简单具象的和非具象的"合集"(collections)，合集内的客体被联合起来不是因为它们具有任何共同属性，而是因为在一起它们就能满足这个或那个条件，例如，它们可能代表了一个熟悉的物体(房子，火车等)，或适应儿童想象出来的情境(牧羊人和羊在树荫下休息等)。

第二个论据源于一个先验的逻辑分析。从一个给定的集合 E 中分出的任何一部分——这恰好是儿童所面临的问题——都会建构出等价类。因此必须理解为什么客体

① 英海尔德，皮亚杰(1964)。

本身所具有的差异常常和相似之处一样多，最终却还“被放在一起”。答案似乎很简单——“因为它们分享了这样那样的属性”。我们必须明白，为什么那些让它们属于一个类别的属性最终取代了那些倾向于区分它们的属性。显而易见的是，在实验室外，这就是一种潜在地优先选择一个属性而不是另一个属性的蓄意行为。既然客体被当作钉子、锤子、斧头、钳子或者甚至石头时意义似乎都一样。我们也就可以假设这是投射行为，本身就可以增加某些属性的价值而不利于其他属性的价值，并且可能分离出一定数量的初始运算器(preliminary operators)。

我们必须自然地注明它们的性质。组合逻辑的语言在这方面似乎很适合。路易斯·弗雷已经在几项研究中使用了它们①，阿波斯特尔也一直声称他是唯一能充分报道儿童行为的人。② 下面的图例应该有助于充分改进我们在这个问题上的想法。

给定三个客体 a，b 和 c，问题是要去影响分割出来的部分($ab.c$)。我们引入了一个分类运算 γ，它可以视情况而定地对应于数个简单的具体行为。接下来我们引入一个合并运算 ρ，它将合并由 γ“分类”的客体。如此一来，正式的问题就是找到一个运算 X 以让我们得到下面这个改写规则：

$$X\rho\gamma abc \rightarrow \rho(\gamma ab)(\gamma c)$$

由于这是一个假想的例子，X 的具体形式在这里无关紧要。我们知道我们一定能找到它，并且尤其是它还包含了运算 I，W，C 和 B 就足够了。正如我们记得 I 是一个标识符(identifier)，而 W 是一个中继器(repeater)。这似乎确实是任何分类程序都必须通过“标识”与之相关的客体来得以存在，且它的发展离不开对某些子程序的“重复”。至于运算符 C，它可以由下面的规则来定义：

$$C\Phi\alpha\beta \rightarrow \Phi\beta\alpha$$

根据阿波斯特尔的看法，这将代表序列化，但连同皮亚杰，我们宁愿把它看作是无排除的倒摄作用，因为一项技术的优化，运算 C_m 的引入就有了不同的幂。最后，还是根据阿波斯特尔的观点，将会有下式：

$$B\Phi\alpha\beta \rightarrow \Phi(\alpha\beta)$$

它代表了实际的分类原理。

我们当然可以自问，这里所使用的运算，被逻辑学家们出于种种原因当作基本的运算，从心理学的角度来看也是最基本的。这无疑是一个重要的问题，我们可能想象了一系列特意构思来回答这个问题的实验。但无论如何它可能都没有看上去那么基础。很显然该组合语言首先是一个可能最有用的分析工具，即使它的组成部分并不是逐项地对应于那些儿童能识别的运算。

无论如何，它仍然可以为两种等价提供方法论上的可能性，即使一个等价被认为不

① 弗雷(1967)。

② 阿波斯特尔(1966)。

过是对另一个等价的人为改进，或正好反过来，其中最不完善的那个等价的出现本身就只是为了适应观察的需要。第一个应该包含直接的等价，即在客体（比如颜色）的共有属性（coproperties）之间的关系基础上建立起来的等价，进一步通过儿童的语言实践来加强它们。这种关系的自反性、对称性和传递性就不需要专门阐述，而只需要观察就好了。

相比之下，第二个则应该由间接等价构成，即借助于基本的结构性函数建构起来的等价。极限运算和局部运算 α，β 等将为给定集合 E 中某些成群的元素提供“放在一起”的理由。上文提到的逻辑运算和广义运算将会引起这些局部运算的整合，结果 X 不过是一个结构化函数。将给定集合的应用构想为被建构的“盒子”，这样的函数会导致集合 E 的划分，即 X 引起的等价关系所导致的商集（quotient-set）。

虽然过程会显得复杂，它仍然具有一些明显的优势。即使不考虑它已经证明自己在代数领域的极大用途这一事实，它也让我们对非常重要的行为产生了直接的实验性关注。此外，它还会让自己进行经常性的观察活动，即所有“实用的”分类——与科学系统的分类形成对照——不会直接从意识的、外显的等价关系中产生。最后，就关系而言，它可以解释函数的一种形式化类型，即单一向右。它不过是运算的表现方式和分类的建构形式罢了。

根据皮亚杰及其合作者所做的工作，我们可以设想一个双重分类水平。一方面，我们可以找到一个基于连续分层包含的分类。最基本的关系将是包含，而基本运算将是并集及其逆向形式。我们知道这些程序通往布尔格（Boolean lattices）的逻辑结构。另一方面，我们会发现一个通过局部建构进行的分类。此处的基本关系将是重组（对应于重写规则）那些将各组元素区分开来的运算。

最后值得注意的是，虽然给定集合的一个单一划分（single partition）不具备预定的结构，所有可能的有限集 E 的划分组成的集合仍然是一个格（lattice）。子集的集合与划分的集合都具有格的结构这一事实是令人鼓舞的，但与此同时，它也提出了一个有关它们之间协调的问题。我们试图在此做出任何假设的举动无疑是不成熟的，但是，一旦我们掌握了足够数量的关于结构性函数的经验事实，应该是有可能研究这个问题的。

§3　结构化函数与比例

从逻辑上定义有序数对的方式主要有两种。第一种方式使用了命题的形式并将有序数对定义如下：

$$(a,b)=\mathrm{d}f\{xy \mid x\in\{a\}\wedge y\in\{b\}\}$$

或等价于：

$$(a,b)=\mathrm{d}f\{xy \mid x=a\wedge y=b\} \tag{1}$$

此处的"="代表逻辑的同一性。

第二种方式则更直接，对有序数对的定义如下：

(2) $$(a,b)=\mathrm{d}f\{\{a\},\{a,b\}\}$$

鉴于两种定义都引向相同的形式规则，两次都将被定义的项写作(a,b)并没有什么不好。虽然如此我们仍然认为，这两个定义潜在的幼稚想法是不同的，而我们将从这个角度开始接下来的讨论。

定义(1)中最重要的就是一个恒等关系式的存在，多亏这一点才让我们在有序数对之间有可能建立一个等式：

(3) $$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c\wedge b=d$$

另一方面，恒等式是一个抽象的概念，它仅仅是两个客体间所有可能的相似性的极限。它遵循的是，在所有的应用中，我们真正处理的只是那些部分的属性，即隐含在应用下面的等价关系以及这样的属性。

将Φ看作一个等价关系，则定义(1)本质上可以被概括化为：

(4) $$[a,b]_\Phi=\mathrm{d}f\{xy\mid x\Phi a\wedge y\Phi b\}$$

由于Φ具有自反性、对称性和传递性，我们将会有下式：

(5) $$[a,b]_\Phi\approx[c,d]_\Phi\Leftrightarrow a\Phi c\wedge b\Phi d$$

它们有助于我们了解这些形式化方程的意义。让我们假设有一个集合E，它所包含的元素是小写的拉丁字母。正如我们在前段看到的那样，向E中引入一个等价关系会等同于建构E的一个划分。关系式(5)只是表达了一个事实，即在给定属性下等价的两个元素是可以互相替代的。

现在让我们转向定义(2)，它将一个有序数对的概念还原为两个观点：存在两个元素（从逻辑上讲就是类$\{a\}$和类$\{a,b\}$），另外，有序数对存在一个在前面的元素，随后是第二个元素。这些正是皮亚杰所指出的观点，它们构成了数的概念，即基数和序数，而且它们是自然合成的有限数字。

我们不会将注意力集中于此，但是，相反地我们认为其余的规则不过是已经被抽象了的一个早前结构。换言之，将定义(2)改写为下式似乎有助于对(2)的概括化表达：

(6) $$(a,b)=\mathrm{d}f\{\{a\},\{a,\tau(a)\}\}\text{同时 }\tau(a)=\mathrm{d}fb$$

τ是一个给定的转换运算器(transformation operator)。

同时考虑归纳式(4)和(6)产生了我们称之为前比例(preproportionality)的概念。例如，让不同颜色的对象组成一个集合E。如前文所述，我们有理由假设一个完全是基本运算或结构性函数的集合，这将让集合E的划分成为几个相对于关系Φ的等价类（在本例中即具有相同的数字）。如果$a,b\in E$，则a和b将属于两个等价类C_a，C_b。让我们假设它们是不同的。于是有了定义(4)：

(7) $$[a,b]_\Phi=\mathrm{d}fC_a\times C_b$$

其中"×"表示笛卡尔乘积(the Cartesian product)。至于关系(5)，我们可以更具描述

性地写成下式：

$$(8)\qquad \frac{a}{b}\approx\frac{c}{d}\Leftrightarrow(a,b),(c,d)\in C_a\times C_b$$

随后我们有了：

$$(9)\qquad \frac{a}{b}\approx\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{d}\approx\frac{c}{b}①$$

尽管这种类型的前比例仍然是相当初级的，它仍然代表了简单划分的第一次聚敛，在这个意义上，它表达了允许类别 C_a 到类别 C_b 的转移的不变量。正如皮亚杰所做的那些研究②，将转换式 τ 引入真逻辑比例中只会增加它的重要性。我们注意到：

$$\frac{a}{b}\doteq\frac{c}{d}$$

它们的基本属性之一就是它们会产生下式所表达的关系：

$$(10)\qquad \frac{a}{b}\doteq\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}\doteq\frac{b}{d}$$

我们可能会关注，为什么到目前为止还没有在对前比例的水平形成这样的蕴涵。答案很简单，并且显然有赖于 τ 作为 Φ 的反面存在。我们不能将一个非恒等的变换引入无矛盾的等价类中，即我们不能同时声称两个元素，比如 a 和 c，因为它们都属于类 C_a 所以无法区分开来，但是因为其中一个元素是通过变换式 τ 由另一个元素变换而来，所以二者是有差别的。

相反地，我们可以自问，在一对用“$\approx$”连接的对偶之间引入一个中介是否并不合适，同样，诸如“巴黎之于法国相当于罗马之于意大利”这类表达是用“$\doteq$”连接的类比，在这些类比之间引入中介也是不合适的。我们将不得不从两个不同的集合 E（首都）和 F（国家）入手。但问题是复杂的。一方面，显而易见的是，我们不能只考虑 $E\times F$ 的乘积——“巴黎之于意大利相当于罗马之于法国”这对关系没有任何意义；另一方面，我们不能刻意地只应用关系式(10)而将其他的都排除出去。由此看来，应该在一一对应关系建立起的子集 $E\times F$ 以及对应的（双射，bijection）“首都→国家”集合中找到解决方法。就这样，我们再次回到了结构性函数上。

最后，让我们检测下真正的比例关系的意义优于前比例关系这一点。它足以让我们去回顾皮亚杰所给出的定义：

$$(11)\qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\mathrm{d}f\begin{cases}a\cup d=b\cup c\\ a\cap d=b\cap c\end{cases}$$

我们立即看到，“$\cup$”和“$\cap$”这两个运算的存在已经丰富了纯粹的关系观点。这就带来了两个问题。

---

① 疑似英文原文存在错误。

② 皮亚杰(1952)；英海尔德，皮亚杰(1958)。

首先，我们在什么条件下可以用它们自己的元素分别构成“分子”和“分母”？显然只有用摒弃它们之间的任何种类区别的方法来解决这个问题，换言之，使用集合 E 中最少的良好极限划分(limit-partition)，在这种划分中元素通过那些简单的事实得以联合起来且这些划分是属于集合 E 的。接下来正如我们所预见的那样，该逻辑比例现在只考虑单独的变换不等式 τ。它们因而抽取出了某些细微差别，但它们仍然充实了问题情境。这将我们引向了第二个问题：是什么类型的新结构对集合 E 进行了“$\cup$”和“$\cap$”运算？

由于实验数据的缺乏，我们无法提供一个有充分根据的答案，所以我们只做以下三个评论。

(1) 皮亚杰在布尔代数的框架所派生出的所有含义中发展出了逻辑比例理论。但是，如果我们能找到的话，它也许至少对某些重要的属性，尤其是用关系式(10)来表达的那些重要属性有利，无论这些属性是否已经被包含在弱结构(weaker structures)里。我们看到，例如，上文所呈现的格(图 16)维持了双重等式(11)。这是一个正如我们通过计算 $a\cap(c\cup d)$ 和 $(a\cap c)\cup(a\cap d)$ 所能看到的非分配的格，但它仍不失为一个模态，并且吻合了量子物理学的某种不确定性要求。① 此外，正如我们所希望展示的那样，它解决了自发思维必须面对的一些基本的情况，比如涉及几种类型的对立时。让 a：漂亮，b：不丑，c：不漂亮，d：丑。那么 $a\cap d=\wedge=b\cap c$ 并且 $a\cup d=\wedge=b\cup c$。

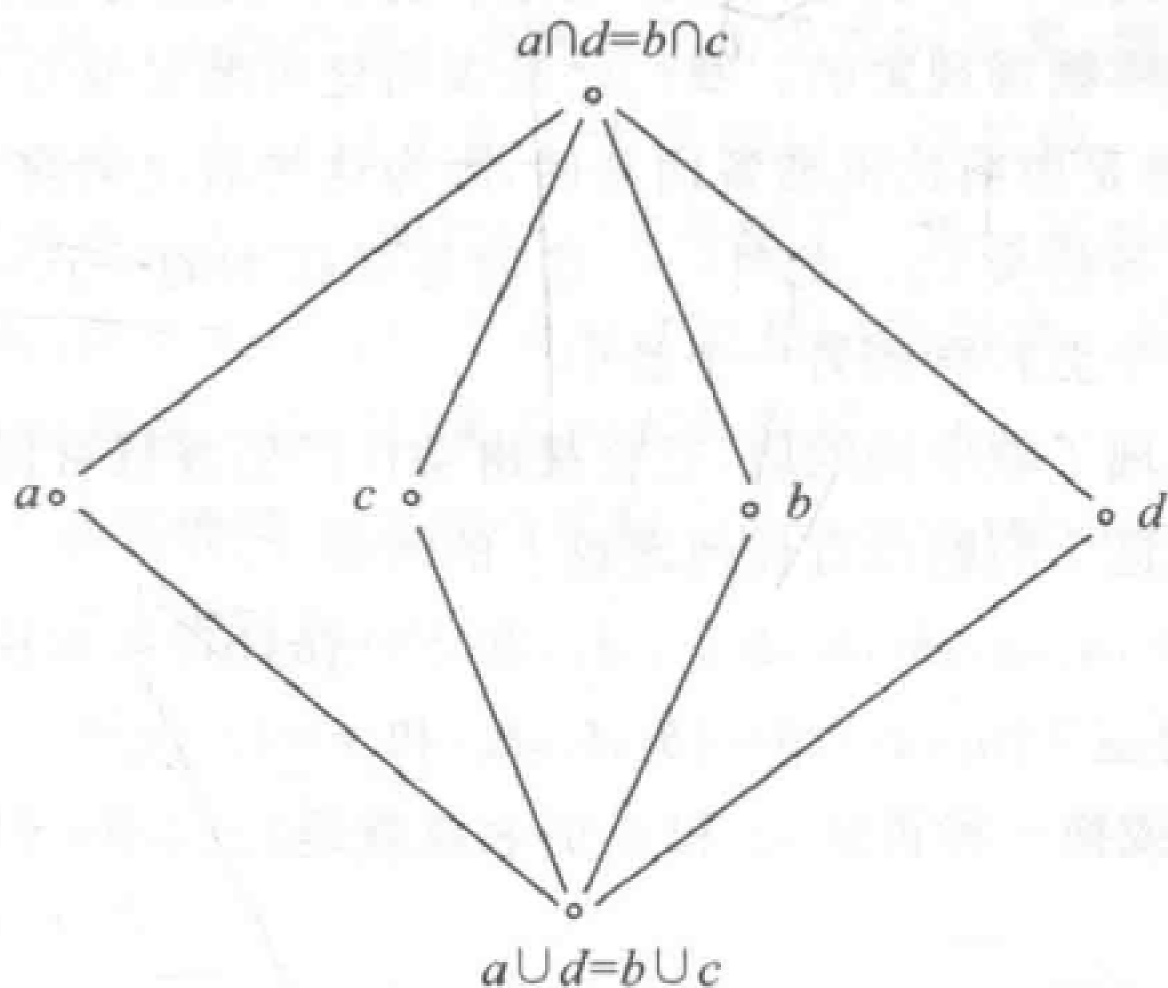


图 16

(2) 比例的问题也极有可能与通常出现于前比例水平的否定式的问题紧密相连。看来我们可以很自然地假设最基本的划分将是二分的，尤其因为迄今为止只有数对而不是 n 元组(n-tuples)被包含了。在这些条件下，很自然地，C_a 的补集变得与 C_b 区分不明，而 C_b 的补集也变得与 C_a 模糊不清。此外，如果前文中的格的两极分别是 $\wedge$(上极)

① 米特尔施泰特(1963)。

和 $\vee$（下极），那么格就是正交补（ortho-complemented）。这意味着，例如，不只 d 是 a 的一个补，b 和 c 同样也是互补关系。因此我们有充分的理由认为布尔代数体系中补的唯一性，再次地，表现的是一种极限情况。最后，如果我们假设 $a=c$ 且 $b=d$，我们就会得到一个布尔格：

$$\frac{a}{b} \doteq \frac{\bar{b}}{\bar{a}}$$

皮亚杰在参考文献中呈现了这个比例对认识论的影响。

(3) 最后，一旦我们有了一个格结构，在没有其他条件的情况下，我们就得到了：

$$\frac{a}{a \cap b} = \frac{a \cup b}{b}$$

因此，特别地：

$$a \cup b = (a \cap b) \cup (a \cup b)$$

它可能有益于观察在这个最后的表达式与布尔代数中所有概率函数的基本条件之间的形式类比：

$$pr(a) + pr(b) = pr(a \cap b) + pr(a \cup b)$$

当然，这句话没有任何意义，直到值被替换后。然而，鉴于最近的研究，这可能是有用的，我们可以密切关注它。

前面所述的内容全都只涉及比例关系的逻辑方面，仍然存在需要我们去了解这些考虑是如何关注到具体物理现象的。我们已经表明这可能是通过大小概念的中介作用发生的，大小概念实际是由前比例准备而来的，因为这些前比例假定将一个给定的集合 E 分割为一定数量的等价类 C_i。此外——这也是最根本的一点——它们允许元素通过一个常量变换由一个类转移到另一个类中。

这里我们再次发现了顺序的问题，它直接由动作产生并且可以说是不可逆的，而且它引向层级包含。但这个问题没有任何理论上的困难。

例如，令集合 $E=\{a_1,a_2,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2\}$ 和 $F=\{a,b,c\}$，并让 $f:E\to F$，这会让集合 E 被分解为三个类：$\alpha=\{a_1,a_2\}$，$\beta=\{b_1,b_2,b_3\}$ 和 $\gamma=\{c_1,c_2\}$。

(1) α 对应于 a，或换一种说法，a_1 和 a_2 的表象就是 $\{a\}\subseteq F$。同样的 γ 引出了 $\{b\}\subseteq F$ 和 $\{c\}\subseteq F$。

(2) α，β 和 γ 是不相交的（结合 E 的分解）。其结果是不可兼并的“+”运算可以应用于它们。由此，我们可以得到：

$\alpha+\beta$ 引起了 $\{a,b\}\subseteq F$，以致 $\{a\}\subseteq\{a,b\}$ 及 $\{b\}\subseteq\{a,b\}$

$\beta+\gamma$ 引起了 $\{a,c\}\subseteq F$，以致 $\{a\}\subseteq\{a,c\}$ 及 $\{c\}\subseteq\{a,c\}$

等等。

总之，对等价类的“+”运算带来了所有可能的表象-类别（F 子集的格）的层级包含的形成。

(3)（可逆性）$\{a\}$ 与类 α 相关联，$\{b\}$ 与类 β 相关联，等等，而 $\{a,b\}$，举例来说是与类

$\alpha+\beta$ 或 $\{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3\}$ 相关联的。因为 $\{a\}\subseteq\{a,b\}$，即因为 F 是层级包含，E 也是层级包含。现在：$\{a_1, a_2\}\subseteq\{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3\}$。此外，该过程还是二分的，因为：

$$(\alpha+\beta)-\alpha=\beta=\{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3\}-\{a_1, a_2\}$$

因此我们看到前比例让我们知道，对每个对象 $x\in E$ 都有一个类 C_x（E 的标准应用于其商集上得到 x 的表象），并且这些类在内部一起排序。大小和测量的概念存在于其中，虽然还没有用数值表示。

现在让我们假设，在英海尔德和皮亚杰所研究的情景下，①被试的第一个任务是发现，然后是说明或陈述某些物理定律。在最简单的情景中，问题包括发现两个等价性质 φ 和 ψ，它们会带来两个典型的应用 F 和 G。换言之，儿童必须根据两个大小对客体进行排序。从被试的角度来看，当集合 E 的元素是以同一客体的连续状态在空间上同时出现时，这个问题可能并不完全一样。然而对于我们分析的目的而言，这个差异却是一个小小的入口，让我们得以看到基本的事实，即问题的解决方法只有当两个划分重合时才有可能被发现。这意味着为了让定律被分离出来，那些在物理上以某种方式彼此相关的属性必须首先被发现。这就是为什么，如果我们有一定数量的不同长度和颜色的钟摆，并且如果我们按颜色对它们进行分类，那么得出等时（同步）定律的可能性是非常小的。这不是一个伪观察，而是因果关系的支柱。钟摆的任何长度变化都对摆动周期有影响，与此同时钟摆颜色上的变化却没有任何影响。从这个角度看，我们因此看到尽管因果关系很可能已经与函数的形成之间有了历史性的渊源，当我们试图将某些逻辑-数学的结构应用于物理世界时它才真正体现出自己的价值。如果再加上布日的工作②，我们承认因果关系首先是一种判定就不奇怪了。凭借所有的可能性，在形式化水平上的建构是合适的，两个大小可以先验地产生相同的划分。然而在现实中它们也只能如此，如果它们之间存在一条因果关系的实体联系的话。

令"→"一方面表示等价类 F_i 之间的序列关系（order relation），另一方面表示 G_i 间的序列关系。于是有了三种可能：

(D) $F_i\rightarrow F_j\Rightarrow G_i\rightarrow G_j$

(I) $F_i\rightarrow F_j\Rightarrow G_j\rightarrow G_i$

(C) $F_i\rightarrow F_j\Rightarrow G_i\leftrightarrow G_i$

我们将这三种关系称为函数定律（functional laws）：分别是顺函数、反函数和常量函数（direct, inverse and constant）。它们表示我们研究的大小之间某些类型的依存关系，蕴涵地包含了我们在历史回顾中见过的变量、变化和共变的思想。此外，正如皮亚杰所指出的，所有的不对称关系，比如关系"→"，表示的是有序的差异。如果我们还记得，逻辑比例同样也享有自己的特性。

---

① 英海尔德，皮亚杰（1958）。

② 布日（1959）。

$$\frac{a}{b} \doteq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \doteq \frac{c-a}{d-b}$$

其中 $x-y=\mathrm{d}fx \cap \overline{y}$，我们可以看到(D)和(I)可以由下式来表示：

$$\frac{F_j-F_i}{G_j-G_i} \doteq \frac{F_h-F_i}{G_h-G_i} \quad 和 \quad \frac{F_i-F_j}{G_j-G_i} \doteq \frac{F_i-F_h}{G_h-G_i}$$

注意，虽然类指数 i 已经可以看作是这种非数值测量的单位，但它对比例定律(I)的解释尚不符合算术中"成反比的大小"。相反，它仅仅表示了一个事实，即如果其中一个量增加则另一个量减少。因此接下来当这提高到算术水平时，发生的显著变化就是乘法运算的引入将有效地让它在上述比例关系中通过 F_i 的倍数取代 F_j 和 F_k 成为可能，这在 G 的比例关系中同样生效。

虽然这么说显得微不足道，但它能帮助我们强调儿童可能会面临的两个难题。第一个是在动作本身水平上的。如果这类问题中确实涉及因果性的某些环节，如果儿童确实将定性的顺序关系设想为序列差值，那么很可能年幼的被试一开始会通过减少大小关系来简化差值的比较，并会在加上1(基数方面的)的情况下混淆了等级排列(序数方面的)。另一个难题可能会进一步增加第一个的难度，它具有逻辑-数学的性质。自然数不过是通过加1所获得的0的后继者。因此，它们可以说是加法的具体表现。也有一些对新运算的人为干预，比如让它们相乘，对其成因做详细研究将会是件有趣的事。两个数的乘积确实差不多可以简化为两个类的交集。但我们也知道要谨记对这种逻辑简化必须加以解释。① 我们更应该注意的是，即使从形式的观点来看，引入乘法带来的影响非常多。该方法需要证明包含乘法的系统一致性，这种需求在本质上就强于那些证明只包含加法的系统一致性的需求。②

§4　基本关系——运算

皮亚杰最近指出即使是数学家也一直在运算与函数的区别问题上犹豫不决。③ 正如我们所建议的，如果推论是基本元素的话，其实前面的讨论就可以解释这种犹豫不决。然而我们仍然需要再次审视内涵和外延之间的关系。对该关系的了解让我们接受了以下三个事实：

1. 这两个概念的联系如此紧密，以至于不可能设想其中一个却不想到另外一个，这不只是抽象性的(abstracto)和哲学性的考量，在任何情况下都如此，只不过它可能是具体的。

---

① 皮亚杰(1949)。

② 例见 S. 巴贝尔的研究(1960)。

③ 希尔伯特-伯奈斯(1934)，I，7，d。

2. 如果仍然需要对它们进行某种优先排序的话，我们很可能会倾向于内涵。它依赖于语言的程度至今未得以确定。我们只能说，任何只在话语水平上而不借助外延的定义，所指的都是对象的属性而非对象本身。

3. 与此相反，几乎整个逻辑与数学都是通过外延得以进行的。让我们首先注意到，根据第1点，事实2和事实3是完全不矛盾的。如果内涵和外延的确互为对立，那么就没有什么可以阻止我们将某个任务完全地归结于它们之一，然后将另一些任务完全地归结于另一个。这让我们不由得问，一方面，是否不存在至少一个数学领域让这两个概念在其中能有效地互相替代，另一方面，我们是否不能发现一个能让二者同时凸现出来的概念。我们认为态射和有序数对满足了这一双重条件，同时提供了具体的活动模式。

"一开始就存在类"这样的陈述是难以得到支持的。正是由于这个原因，我们与阿波斯特尔[25]一起寻找运算的标准，以寻找区分被试是否掌握了类的真正时机。我们不会在此回顾阿波斯特尔的观察和定义，我们将自己限定于从集合的概念的讨论开始。一个集合"包含了"对象，但它又区别于一个类或一个集合，区别在于它仍然因为两个方面而未具备确定性。一方面，没有理由让一个对象属于或不属于它。另一方面，也是前述的结果，它未构成一个对自身的全封闭性(图17,a)。

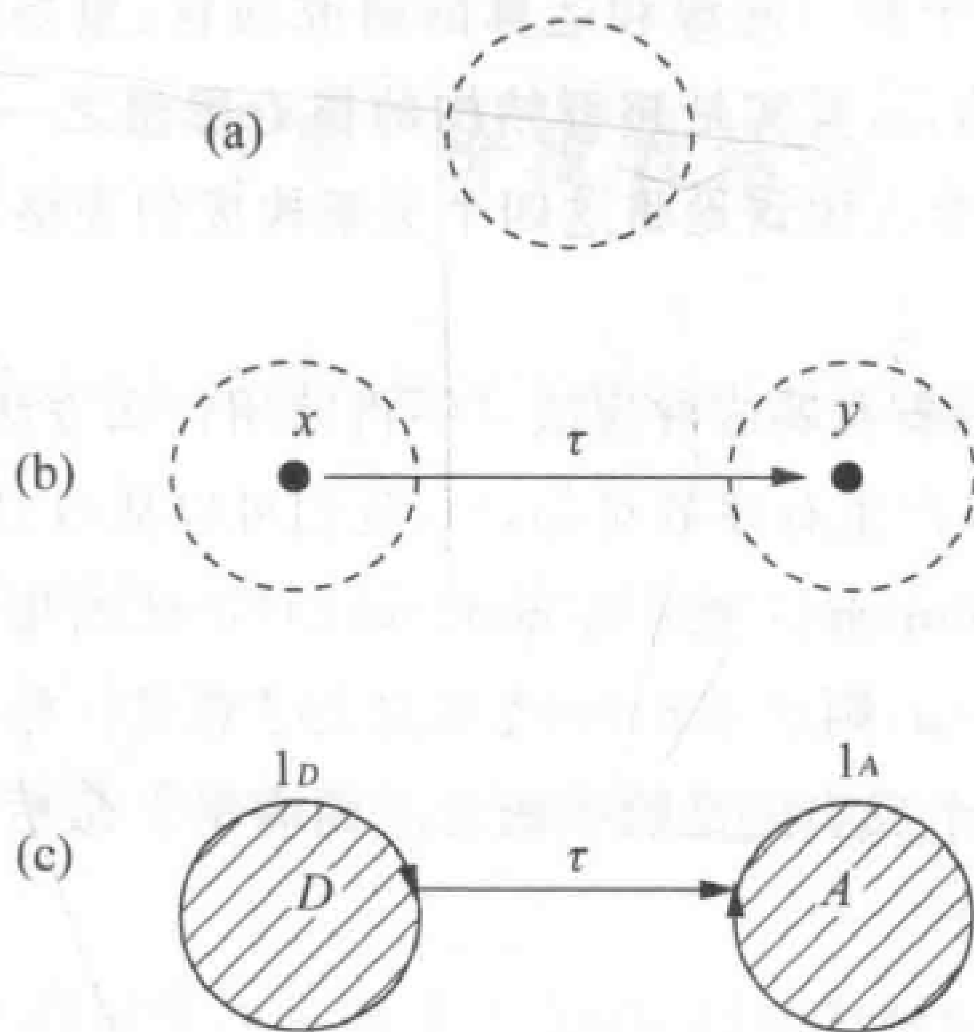


图 17

我们对被试行为的了解让我们假设动作 τ 可以单独应用于对象 x 并导致对象 $y=\tau(x)$(图17,b)。于是运算器 τ 就会如我们下面将详细说明的那样，影响对象 x 以及 y 构成类或集合(源集合 D 和目标集合 A)，并同时作用于内涵和外延(图17,c)。我们知道在一个范畴结构中，"单箭头"(unit arrows)1_D 和 1_A 是与任何一个箭头 τ 联系起来的，此外，任何箭头 1_x 与一个"对象"x 之间存在一一对应的关系。

显而易见的是，这样一种形式化体系，或者如果我们愿意，这样的话语体系支持了大量的解释。我们提议在此引入下述之一的概念：此处的"单箭头"对应于集合的内涵，

而“对象”对应于集合的外延。这就意味着 1_D，举例来说，实际上为 x 被算作 D 的元素提供了依据。换个说法，依照皮亚杰在许多场合所表示的，①$1_D$ 表现为“共……关系”(co-something relation)，而 D 则不过是对应的等价类。

有人可能会怀疑这个话语体系是否为我们关于类和关系的知识贡献了任何新的东西，因为语言本身不能增加知识。但这并不排除这样一个事实，即一种精心挑选的语言可以启发研究，令其富有成果。在我们看来，这种话语体系至少提供了以下三个有利条件。

(1) 它所占的上述三个事实：内涵与外延的不可分离性、前者可能的优先性和只可能与后者一起操作的事实。

(2) 它让我们可以如我们所期待的那样精确地讨论应用问题，即它能验证未预设类-函数逻辑顺序的研究。

(3) 最后，在运算、类、关系和函数方面，它赋予有序数对以核心角色的属性。

在此我们认为有趣的是指出皮尔斯无疑是第一个注意到有序数对的基础性作用的人，事实上他将有序数对称之为“基本关系”。② 他表示，尤其是当我们考虑四对双向关系，比如“同事”、“老师”、“学生”和“同学”时，只有某些组合才是合理的。这让他产生了一个想法，即我们认为对于智力起源和运算的研究而言，重要的东西并不是完全明确的。正如门格尔所介绍的，这其实是超群结构的核心思想之一。皮尔斯在其父亲对四元数所做研究的基础上，令人惊讶地将这四个关系构成的表格与 B. 皮尔斯给出的四元数做了类比。

今天我们似乎能进一步发展这种想法。不再问用什么方法以及在什么条件下将顺序引入到类$\{a,b\}$中，借以产生有序数对(a,b)，我们可以从数对自身入手。顺序消失的问题很容易通过建构域(domain)和共域(codomain)(上述的集合 D 和集合 A)来解决。另一方面，若没有逆序 $b \leftarrow a$，则顺序 $a \rightarrow b$ 也就失去了意义。与类相反的，(a,b)和(b,a)是同一现实的两面，而这个现实正是顺序概念所固有的。最后，如果在前述的公式(2)中，我们让 $a=b$ 就会得到：

$$(a,a)=\{\{a\},\{a,a\}\}=\{\{a\},\{a\}\}=\{\{a\}\}a$$

忽略$\{\{a\}\}$是一个类中的一类这个事实——这似乎未超出逻辑形式化体系的本质范围，逻辑形式化体系终究还是相当特殊的——我们观察到(a,a)只涉及 a，正如(b,b)只涉及 b。由此我们自然地认为集合：

$$M=\mathrm{d}f(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)$$

如此一来我们看到，如果 $x,y,z \in M$：

---

① 皮亚杰(1966)，第 20—21 页。

② 阿波斯特尔(1959)。

(1) 当且仅当 $x(yz)$ 被定义时，$(xy)z$ 才得以定义，然后

$$(xy)z=x(yz)=\mathrm{d}fxyz$$

(2) 如果 xy 和 yz 被定义，则 xyz 也得以定义。

(3) 对任意 $x\in M$，存在一个 u 和一个 $u'\in M$，从而定义 ux 和 xu' 且 $ux=x$ 且 $xu'=x$。

由于任何具有(1)－(3)特性的集合 M 在形式上都是一个抽象范畴(abstract category)，①我们可以得出这样一个结论，即上述这四组数对的完全自然的集合是一个范畴。

在我们选出的微不足道的例子中提到“范畴”一词可能有些不恰当。但这却是正确的，而且所遵循的方向已被证明是富有成效的。自皮亚杰所进行的基础观察以来已经有一段时间了，儿童在其发展过程中表现出来的结构恰是早期布尔巴基在当时提出的数学的三个母结构。因此当今天的数学家试图通过分离出范畴的概念来更深地研究数学大厦的基础时，如果能通过心理实验在儿童身上发现类似的概念，那这将是在相同方向上的另一步。

§5 阶段性结论

我们无法在缺乏前文事实验证的情况下提出结论。然而，以下建议的观点可能是有用的。

首先，如果根据我们所知道的一切，我们首先想到的是动作，然后是处于智力起源核心的被试所进行的运算，这也导致我们为运算赋予一个非常特殊的意义。它们在有序数对中似乎有一个特别简单的表现形式，并因此让有序数对看似成为类、关系和结构函数的根源。

此外，在由连续层级包含所产生的分类之后，有可能存在通过划分而得到的分类。然后它会按照“一些”和“全部”的基本协调，在内射和满射的双重性中仍然可以表现出来。

也有可能——这将允许我们解释在某些任务上的过早成功——结构性函数是智慧发生到一定时候的一种未来组合运算的具体替代品。

最后，我们不能排除这种可能性，即比起集合理论来，类不再是最基础的心理现实，这是在数学基础上的定论。

---

① 例如皮亚杰(1949)的文中。

文献总汇

Apostel, L. , "Logique et apprentissage," *Études d'épistémologie génétique*, Ⅷ, Paris, Presses Universitaires de France, 1959, 1-138.

Apostel, L. , " Psychogenese et logiques non classiques," *Psychologie et épistémologie génétiques*, Paris, Dunod, 1966, 95-106.

Bloch, L. , *La philosophie de Newton*, Paris, Alcan, 1908.

Brandt, H. , "Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes," *Math. Annalen* 96, (1927), 360-366.

Bunge, M. , *Causality*, Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 1959.

Cantor, M. , *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 4 vol. , 2nd ed. , Leipzig, Teubner, 1901.

Crombie, A. C. , "Quantification in Medieval Physics," *Isis* 52 (1961), 143-160.

Euler, L. , "Introductio in anaiysin infinitorum," *Opera mathematica*, Vol. Ⅷ-Ⅸ, Leipzig, Teubner, 1913, 1922.

Frey, L. , "Langages logiques et processus intellectuels," *Les modéles et la formalisation du comportement*, Paris, C. N. R. S. (1967), 327-340.

Grant, E. , "Nicole Oresme and his De proportionibus proportionum," *Isis* 51 (1960), 293-314.

Guübaud, G. -Th. , "Des trucs et des machins: comment faut-il enseigner les rudiments de la théorie dite des ensembles?" *C. r. du Séminaire sur les modéles mathématiques dans les sciences sociales*, I (1961-1962), 20-28.

Hilbert, D. and Bernays, P. , *Grundlagen der Mathematik*, Vol. I, Berlin, J. Springer 1934.

Inhelder, B. and Piaget, J. , *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*, New York, Basic Books, 1958.

Inhelder, B. and Piaget, J. , *The Early Growth of Logic in the Child*, London, Routledge & Regan Paul, 1964.

Mac Lane, S. , *Homology*, Berlin, Springer-Verlag, 1963.

Menger, K. , "An Axiomatic Theory of Functions and Fluents," *The Axiomatic Method*, Amsterdam, North-Holland Publ. Co. , 1959, 454-473.

Milhaud, G. , *Etudes sur la pensée scientifique chez les Grecs et les Modernes*, Paris, Alcan, 1906.

Mittelstaedt, P., *Philosophische Probleme der modernen Physik*, Mannheim, Bibliographisches Institut, 1963.

Newton, I., *La méthode des fluxions et des suites infinies*, Paris, 1740.

Papert, S., "Sur le réductionnisme logique," *Etudes d'épistémologie génétique*, Ⅺ, Paris, Presses Universitaires de France, 1960, 97-116.

Peirce, S. C., *Collected Papers*, Vol. Ⅲ, Cambridge (Mass.), 1933.

Piaget, J., *Traité de logique*, Paris, A. Colin, 1949.

Piaget, J., *Essai sur les transforntatìons des opérations logiques*, Paris, Presses Universitaires de France, 1952.

Piaget, J., "Problémes du temps et de la fonction," *Etudes d'épistémologie génétique*, ⅩⅩ, Paris, Presses Universitaires de France, 1966, 1-66.

Poincaré, H., *Science et méthode*, Paris, Flammarion, 1920.

第十五章　总　　论[①]

从这些到目前还很零碎的事实中，我们似乎可以得出一些结论，它们可能无助于建构函数的认识论理论这一目的，而是作为对此类理论的一个“介绍”。为了走得更远些，我们应该需要继续在一个更广义的解释和因果关系的研究框架内进行这些研究，正如眼下我们研究中心正在做的那样。事实上，函数越来越成为运算和因果关系的一个常规起源。尽管运算的发展变得愈发清晰，因果关系的发展却仍然充满了神秘感。然而，它确实像是动作的一个属性，其次是运算对象的一个属性。无论如何，一定的并行性(尽管这也许只是一个局部属性，其意义在此难以说明)无疑会以在它们之间施加函数的影响而告终。因此，只有在运算和因果关系结构之间互换的背景下，函数的概念才会获得一个稳定的认识论状态。但与此同时，我们可以从前述的实验中得到一些结论。

§1　函数的起源

函数实质上表示的是一种依存关系，无论它发生在客体的属性(可变的或恒定的)之间，还是建立于动作固有的或主体所建构的元素或属性之间。即使当我们将函数界定为应用时，我们也没有忽视依存关系的想法，因为函数中包含的数对是有序的，因为对应是单一的指向右边，最重要的是因为，正如格里兹所说的那样(§2)，真正的问题在于引起对应关系的形成过程：在这个例子中，E 在 F 上的应用表示的是目标集合 F 对其源集合 E 的一种依存关系，否则对应会仅仅相当于一个比较，应用也将不过是建立一个关系，而不是建立一个函数。这种依存只能解释从集合 E 转化为集合 F 的结构过程中所做的运算建构，这不一定是一个正在进行的或预先存在于被试动作之外的依存。

Ⅰ——依存的这个一般特性区分出了函数与简单关系(后者不过是比较的结果)，也因此提出了函数的来源问题。它们源自物理还是运算，或者更好地，它们是源自于被试的动作吗？如果情况正是如此，那么又是受到谁的支配呢？是因果的还是运算的？

从之前的事实中我们可以清楚地看到，每种来源均依次在我们所研究的函数中被发现。在第七章罐子任务的研究中，我们观察到间距的增加或减少并没有被预估到(阶

---

① 由让·皮亚杰著。

段Ⅰ和Ⅱ)，这表明函数是从对事实的观察中提取的，并且发生在(阶段Ⅰ)对任何因果关系的理解之前。因此，在这个例子中，函数被还原为一个简单的物理定律。在有关拉伸的实验中(第四章)，弹簧的长度是重量的函数也是通过物理实验的方法发现的，但这立即被理解为一个因果联结。在车轮与汽车例子中，函数(第十一章)兼具了物理和空间的特点，所以它在物体空间的意义上是物理几何的，然而那些在正方形转换为长方形(第八章)过程中介入的函数却源自于被试不需要使用任何物理手段就能有效进行的空间运算。在第五章和第六章中，被表达为函数的数值差异就已是真正的运算了，但它们被认为是永远正确的关系，甚至在对深层原因的理解达到必要的演绎水平——超出简单归纳水平——之前就已经是这样了。此外，在达到运算水平前，第三章§1的规律性产生了从单一动作与其协调之间的函数，即前运算动作构成了后续运算的起因。正如第四章所述，一个动作还能产生因果函数而非运算函数，当主体通过拉动绳子从而让弹簧加长时也就略过了重量这一变量(在涉及老鼠的问题中也是如此)。

所有类型的依存关系都可以转变为函数式依存，当它们转化时，问题就不再是为函数确定一个明确的来源，而是要找到如此多来源的共同点。在此方面函数的状态堪比空间的状态，因为空间关系也可以通过抽象而从客体中获得，无论空间关系是简单的还是物理的，抑或是通过反省抽象获得的，反省抽象是建立在动作的一般性协调基础之上的，动作的一般性协调则是基于演绎运算，而演绎运算是对邻域、双侧连续对应等关系的应用。这种密切关系并没有什么值得惊讶的，因为所有基本的物理函数都包括了一个空间维度，然而，这并没有解决函数多个来源的共同特点问题。

Ⅱ——在寻找共同来源之前，让我们先花点时间思考下产生函数的两种抽象模式。逻辑-数学的联系起因于反省抽象，因为反省抽象来自于动作的协调，而不是客体的协调：即使一个类或一个关系的内容(内涵上的)来自于客体(简单抽象)，它们的形式(联合、包含、顺序等)却是被试活动的结果。另一方面，物理数据是来自于客体的。就空间而言，我们发现了两者的混合物：物理空间被物体所占据，同时也被主体的运算所建构。在此方面，函数类似于空间，这就是为什么它像空间一样在演绎运算和因果关系中起着基本的中介作用，即函数是由物理定律和大量逻辑-代数结构(态射等)建立起来的工具。

即使当$A<B$这样的关系，当应用于两块石头(的比较时)也没有像这样的物理存在：客体肯定存在并具有一定的长度，但在主体对它们进行比较之前它们之间是互不相关的。因此这一关系极其异于它的构成项，关系是物理性的，即使关系的多个项在知觉(对比错觉)或概念上是不可分割的，那只是因为只有在主体不得不对它们进行比较时才是不可分割的。相反地，在一个物理的函数共变关系[A推动B从而移动B，或在第四章中放置砝码后拉伸弹簧，或在第十一章中在相同的时间内行进相同的距离，即$d=f(t)$]中，项之间的联结是一个真正的依存关系而不仅仅是一个比较关系。项并不独立于函数，因为项之间的变化构成了一个共变，这种共变关系不只是因为主体而存在，也

是客观地存在的。

至于具有逻辑-数学性而不再是物理性的函数，相同的依存关系和共同属性或共变仍然作为变化的结果而存在，这些变化是由主体的运算操作所引起的。在第五章，集合 E_2 中元素数量的增加是集合 E_1 中元素数量减少的一个函数，我们可以由此将它说成是一个逻辑-数学的函数，因为这些非常简单地增加和减少（即使它们在物理上受到了具体符号的影响）都是由主体的操作引起的。但是，如果这两个集合是由球组成的，这些球被分别放在天平的两个托盘上，并由一个装置将这些球从一个托盘传递到另一个托盘上，共变和依存关系将会再次构成一个物理的函数，而在第六章中加法和减法之间的联系却仍然是一个逻辑-数学的函数。

Ⅲ ——回到这两类函数的共同来源问题上，有一个基本的事实从前述的实验中凸现出来，即到目前为止函数的建立先于运算的建立，如果我们根据其可逆的成分和结构化整体的组合来定义后者，也就同时意味着不变量和一个封闭的转换系统。这就是为什么建立了一个对应关系的应用是一个如此早熟的函数，即使它所建立的对应关系在儿童 7 岁前都不会发展为运算。因此存在已经是函数的前运算对应关系（无等价守恒等）和在运算结构，甚至是最基本的诸如群形成之前的合成函数（参阅第一章的有序数对），当然，这种划分是有点武断的，因为在别的标准中，我们可以按照其本来定性的性质将"前函数"称作前运算动作，然后我们就可以为运算构成的量化函数保留函数这一术语。

另一方面，有两个原因提示我们为什么要认为前运算函数是构成性函数①（constitutive functions）。首先，函数超出了主体的运算领域，因为它们实际上是运算和因果关系的共同来源。因此在函数与运算联系起来之前考虑到函数的"依存性"及其本身是有好处的。不过，第二个原因更为重要。在心理学上，运算和因果关系的共同来源是由动作本身构成的，这些动作的动力学特征让主体通过简单的抽象，体验那些最早的联系变为因果关系，虽然它们的整合结构因为运算的建立反而让位于反省抽象。现在，一个动作包含了一组有序的依存关系（在影响条件与其结果之间的依存关系；在作为方法的对象与工具性动作中的终极对象之间的依存关系；在或多或少特殊或一般的协调中一个动作与其后继事物之间的依存关系等）。因此，将构成性函数视为依存关系的表达，这样做不只自然，也的确是有益的，这种依存关系符合动作的格式，通过客体对这些格式的同化作用而表现出一种特殊类型的"应用"。

基于上述情况，我们就可以理解为什么初等函数高于运算，大大扩展了运算的领域，并进而包含了运算。这种外延过宽的第一个原因在于，并非所有的动作都被内化到

---

① 尽管如此我们仍会保持"前函数"（prefunctions）一词（见论著第 24 卷，第二章 § 2）来表示一个心理形态学属性的基本函数，例如，一个生物（或一件被误认为是活着的事物）的运动是某个目标或意图等的一个函数（或看上去是一个函数）。

了运算中，因为它们并不总是可逆的，亦非总是可组合的，只一般性动作协调（联合、包含和排序等）可能实现内化。被内置于函数组合中（麦克莱恩的集合论，勃兰特广群，门格尔的超群）是有边界的（运算并非处处都是界定清晰的，以及有限传递性的等等），自不必说函数是否确实说明了动作的格式而非它们的一般协调。另一方面，虽然在前运算水平上的某些“前关系”已经是函数了，但在术语的严格意义上，只有关系的组合才能被视为运算。

首先，运算预设了外延与内涵之间的分化以及外延的量化（见第四章的结尾）。即使是在一个给定的关系 $a\mathrm{R}b$ 中，项 a 和项 b 构成了关系的外延域，此外延域反而以内涵作为其特征。其次，构成性函数本质上是定性的或序列性质的。例如，参见我们的每一项任务中对第一个阶段反应的描述，其中儿童唯一进行的量化尝试，在实际进行时，要么通过对应而实现的均衡，要么通过比例的自约束而实现的序数增加。给定的一个函数对 (x,y)，我们不能说，就像在关系 $a\mathrm{R}b$ 中，这些客体构成了外延和函数的内涵，因为函数并不是联系了客体本身①，而是只联系了它们的属性。然而这是事实，这些属性是限定性的，因此可以被归为内涵，它们同时也附属于这些来自于外延的客体，即使这些客体本身并非函数的项（它们是“范畴”的项，但范畴并非一个纯粹的函数系统，因为它包含了一组与其函数一起的客体）。

事实是，构成性函数被以数量的或度量的形式量化（比例等），这也将它们转化为构成化函数。然而，构成性函数至今仍只相当于综合构想的动作，而构成化函数则可以包含多种形式的量化（参见所有的分析），但该高阶是以函数和运算之间的密切合作（甚至到了同化的程度）为先决条件的。

§2 动作格式，协调器与函数

若构成性函数的源头出自于有关其因果目的和运算演化的动作格式，从这一观点出发，函数起源的机制必须是可以通过所形成的函数进行分析的。这正是我们打算要做的，即根据以上事实，从函数的运算角度而非因果角度出发来进行分析。

Ⅰ——我们将它称为动作的一个格式，这使之变得可重复、可换位和可概括化，换言之，它的结构或形式与作为其变量内容的客体截然相反。但除了遗传性行为（笼统的自发性运动；反射或本能）的情况外，这种形式的建立并非先于其内容的。它是通过客体之间的交互作用发展而来的，这种交互作用让动作被建构成了应用。确实是在一个交互作用的情况下这些客体之间不再是通过动作进行简单的结合，而是通过动作发展

① 正如格里兹所指出的，客体并非另一个客体的函数。然而当客体之一是另一个客体的产物，就像是下一代时这就可以发生了。但另一方面所涉及的客体本身也成了函数变量。

整合为一个一体性的结构，与此同时，该结构的发展过程即是调整自身以顺化相关客体的过程。这一动态过程包括了两个可分离的极点：客体成为格式的同化，例如前者的整合和后者的建构（这种整合和建构形成了一个整体），和对各种特殊情况的顺化。

同化构成了格式的定型机制(formatory mechanism)（在非常普遍的生物学意义上，因为有机体将环境同化到它们的结构或形式中，这也能反过来通过同化变为环境），表现为三种形式。首先，我们将使用功能同化（在生物学意义上）或"再生(reproductory)"同化来命名一个动作的简单重复过程，如此一来这样的练习也就可以使格式得以巩固。其次，客体同化为格式的前提是它们之间的区别，即一个"再认(recognitory)"同化在将格式应用于客体时就有可能区分并识别出客体来。最后，还有"概括化"同化令格式可以扩展应用于新情况或新客体，从这个观点出发，这些新情况或新客体被判断为是相当于先前的情况或客体的。让我们进一步回顾一下格式的协调使互反同化成为必然的情况。例如，在4—5个月的感知运动阶段，视觉协调和抓握协调的前提是客体同化从"被看到"开始同化为"被抓住"；互反也可以得以验证（通常是非常迅速地），视野外的客体现在被带到了眼前，而不再是像前面那样被带到了嘴边。

在回顾完这些心理学概念后，让我们回到构成性函数上，并试着将它们与格式，尤其是客体到格式的同化联系起来，因为这就是同化，它决定了定形的过程。在这方面我们可以区分三个问题或是三个连续的分析阶段：(1)给定的任何动作格式（但格式及其内容是变化的），我们首先必须描述该格式各种模式的运作特征，从而让我们区分在运作中起作用的不同的协调器[这是我们用于组合子(combinators)的术语，组合子连接了那些源自于相同格式的连续动作]；(2)因为，在另一方面，客体到格式的同化包含了将客体整合为一个有组织的整体，我们必须审视将格式应用于客体上的形式，这让我们对通过介绍或观察到的客体之间的联系的性质做了如下描述：这些联系随后构成了函数，应该指出的是，通过介绍或观察到的（或者两者都有）这些联系有赖于在同化和顺化之间起作用的不同的平衡，因为被格式所包含的这些联系可以如同通过同化自身来增加联系一样，容易在同化到格式中的客体之间寻得；(3)最后，格式之间的协调问题依然存在（而不再只是一个给定格式之中的连续动作）。这是通过函数的组合方式来表达的。

Ⅱ——至于格式的函数化，这些格式在第Ⅰ部分区分出三种形式的定形同化是三个协调器，这三个协调器对应于在库里和费斯等人的组合逻辑中被区别开来的主型算子(principal operators)，它们在第三章（§1）中用于分析某些动作格式的规律。

实际上，协调器W或中继器(repeater)所对应的自然是再生同化，正如协调器I或鉴别器(identifier)对应于再认同化。至于交换器C，我们已经看到，如果我们想表达动作格式的基本形式和普遍形式，就应该区分出排列的程度或层级类型（正如识别中存在着不同的程度一样）。给定的两个客体A_1和A_2，我们会说如果A_2被选来代替A_1，则会出现一个简单替换C_0：这就是在第一章中当一枝花或一列火车替代另一个时，被替代

的那个随之被忽略而介入的协调器。另一方面，如果 A_2 被 A_1 所替代（反之亦然），那么我们会谈到一个 C_1 排列。同样地，“反转”替换 C_2 指的将是 A_2A_1 替代 A_1A_2，等等。由此可见，简单替换 C_0 是介入所有“概括性同化”中的一个组合，格式的概括化在于将格式应用于新的替代客体。

作为联合协调器 B，它必须在格式被应用于至少两个客体的同时就介入其中，连接器（associator）B 在此情况下产生有序数对等。在我们对同化的分析中，我们认为没有必要对此情况区分出一个特殊的形式来，但不言而喻的是，如果我们想要让一切都明确，作为逻辑学家的责任，我们必须将这个组合子添加到前者中：这仅仅是因为通过同化整合来对格式的建构进行管理时所需的一般条件。

Ⅲ——同化格式在其建构的过程中，与受到同化格式的影响而将一个动作从一种情况转移至另一种情况的重复实现过程一样，引起了两种并存且可分离的应用。一方面，从同化格式的建构之时起，就有将某些类型的动作（例如寻找、移置和调整）至少运用于一个客体之上，另一方面，也有同时的或通过连续的转换在两个或多个客体之间创建联结，这再次构成了同化格式的应用。事实上，联结两个客体并同化为相同的格式，与将相同的格式应用于客体，并建立一个客体之一的特性（相对于同化格式以及客体本身）与其他客体的特性（根据同样的相互依存性）之间的对应关系是一样的。也就是说，这种对应就是一种应用。

总之，一个格式被应用于客体，在同化的过程中形成（从整合的意义上）格式，这与在调换过程中同样包括了在客体之间彼此同化是一样的，这形成了与建构或使用（以及在这两种情况下观察）中同样的相互依存性。正是这些相互依存性构成了函数。无论我们将一个函数定义为一个“应用”，一个有序数对，抑或是一个单一向右的对应关系，它从一开始就通过组织动作和合并客体的方式介入到同化格式的建构之中。作为一个构成性函数，它表达了这一有机结构，或者更好地，它表达了它所建立起来的这些联结。

Ⅳ——我们仍然需要考虑不同格式通过互反同化形成的组合。通过互反同化的协调过程，充分展示了在格式内部结构以及它与其他格式的组合之间的连续性。从函数组合的观点出发，一个相当明显的事实是，如果我们使用“范畴”这一术语来表示一组连同其函数的客体，并通过指定运算联结并非总是明确限定的方式来表达它的组合规则，那么当它被定义为是联合性的，并且它仍然包含了一个顺序（将一个未分化内容区分到左侧和右侧之后也就结束了的识别动作），我们发现在原始的函数有序数对与多个有序数对构成的范畴之间并不存在连续性（正如格里兹所说的）。这是早在第一章关于有序数对的组合中就证实了的。

换言之，函数早在严格的运算结构被建立起来之前就构成了。对此，可以用心理学来解释（我们需要回答这些问题），函数是否表达了适合于动作的同化格式之间的联系，以及格式的协调是否仍然是同化的产物，这些同化则是互反同化的概括化形式。此外，这些组合只是转换为整体或局部的协调，而运算结构则是从最广义的动作协调中通过

反省抽象得到的。由此我们可以推断在函数的组合和运算(在我们使用这一术语的意义上)的结构之间的逐次多级发展之中,出现一个连续但缓慢的发展的概率。在前面的若干章节中我们所关注的正是这些逐级发展水平,例如:在第二章中,从最初的有序数对开始关注于包括类在内的层级构建;在第三章和第八至十二章,关注比例关系的建构;在第五章和第六章,关注数值的加、减、加倍和减半等的组合等。在上述这些情况下,从函数到运算或者从构成性函数到构成化函数的转变,其基本特征之一就是从属于一个渐进的量化(类的外延量化,或成比例的差异量化等)。这发生在初级水平上,在此水平上函数仍只是基本的定性化或由于对应关系的运用所导致的均等化状态。但在审视量化的过程之前,我们应该对构成性函数的第二个基本问题,即它们的因果关系问题进行分析。

§3 函数与因果性

如果函数的确在事实上构成了运算和因果性的常见来源,我们必须期待从动作的因果性特征开始,与前者同构的函数将沿着并行路线逐步形成,但这是基于客体之间存在的独立于我们的相关性,而不是基于那些由我们的操纵和操作所引起的相关性。

Ⅰ——首先,我们要简单地介绍一下我们采用术语因果性(具有和术语运算同样多的含义)的意思以及为何要像运算那样从自身的动作入手,即使它涉及的是客体之间的关系,而非主体的结构。

动作改变客体。即使当唯一的目的是找到一个客体,个体也必须推开障碍物,移动身体(包括个体自己的)位置,从而以某种方式改变现实。因此,当动作导致他们从因果方面抽象出运算,为的是保持(1)源自动作的同化格式的结构组织而非动态组织,以及更重要的(2)它们的总体协调。相反,作为最接近的含义,如果我们将因果性定义为包含不变量的一个客观转变系统,那么动作本身就立刻为我们提供了一个因果关系模型,特别是在工具性动作的情况下:儿童在早年就明白自己的身体动作被传递到一个工具(棍子等)上,并通过某些转换(运动等)和某些有限守恒(推的动作传递是通过阻力来补偿的等等)从工具那里传递到外界客体上。现在,观察显示(从基本的感知运动水平开始)恰恰是这些从动作本身中得到的模型让我们有机会理解客体之间的因果关系,并用作现实建构的同化格式。

但客体的动力并非全是因果性的,而且在规律的水平上必须与原因仔细区分开来。规律是从对客体的反复观察中得出的,而且对于它们所表现出的共变的发现可以早于对它们的因果理解(无论对规律的寻找有没有以对原因的探寻作为先决条件,从启发式

的观点来看，这仍是一个悬而未决的问题)。某些规律一经建立(这发生自感知运动水平：婴儿很快就知道一个声音对应于一个图形，悬挂的响铃可以保持稳定等)，仍需要被加以说明，起因也正是在这一点上介入其中：不是作为被发现的(或显露的)孤立的规律，而是作为一个由多个规律之间的协调所构成的系统。这样的系统从自身的动作中过早地形成，自身的动作同样是建立规律所必需的(在上述例子中，转动头部去倾听，触碰物体以维持平衡等)。因此，因果关系在两个阶段中不断地通过动作得以调整或建构。

第一阶段是前运算阶段。因果关系在本阶段表现为一个来自于客体的动作体系，这些客体动作对主体作用于客体的动作做出反应并与之保持一致。这就是为什么儿童知道在一个工具性动作中如何通过反方向投掷 A 球来移动 B 球，他会立即将移动 B 球的力量归于 A 球，即使 A 球不是由他自己的身体控制的(这是休谟在他著名的台球例子中忘记的一点，他忽视了来自于线索以及球员本身的因素……)。这些归于客体的动作，在前运算阶段可以是任何一种类型的(机械的、终极目的论的、万物有灵论的等)，但必须是实证研究而来的并且有助于规律的建立。后面这些绝无可能归于客体的动作则仅供解释之用。

在运算水平上，因果关系得到进一步精细化，更加准确，差异也变得更加清晰。一方面，运算一旦形成(类之间的分类、序列化、序列对应或对应关系等)就会通过充当作用于客体或表征或符号等的操作来加速对规律的发现和确立。另一方面，作为一个解释这些规律的系统，因果关系导致运算被认为是由客体引起的，而客体则自认为是在保留不变量时对状态进行转换的运算。例如，儿童解释物质的守恒，可溶性糖的重量与体积，这两种状态的转换是通过假设细小的无形颗粒在加法运算的基础上实现的。

Ⅱ——现在的问题在于建立构成性函数之间的关系和一套由规律和原因形成的物理知识工具。从现在开始我们将参照这套工具作为函数的因果方面，以对照于它们的逻辑-数学性质的运算特征。

在这方面要做的第一点正是对应于我们在 §2 中所看到的，即在物理学或因果意义上，动作格式证明了函数的某些通用模式，这些模式可被表征为协调器，并逐项对应于组合逻辑的组合子。然而在这种情况下，它们都来自于客体，而不是只被用于主体的思维中。

(1) 协调器 W′或中继器[①]自然地介入规律的建立过程，但因为对主体而言它是客体表现出来的将会自行重复的现象或行为，所以协调器或中继器已经具备了某种因果性的光环。这就是为什么在第四章中，最小的被试一开始就相信，如果我们更换一个重

---

① 我们将使用符号 W′，I′，C′和 B′来定名物理协调器，以将它们与 W，I，C 和 B 区分开来。

量，那么弹簧将会像早前所观察到的那样拉伸等。①

(2) 鉴别器 I′也照此被归于客体的作用，设想它们的身份与主体为之确定的身份保持一致。同样在第四章中，向最小的被试呈现一根被分为两段——y 和 y'（成直角）的绳子，当线段（y）变短时线段（y'）会变长，被试们认同从线段 y 到线段 y' 仍然是“同一根绳子”，而这一观点的发生早于被试承认绳子的长度守恒。

(3) 转换器 C′具备作为一个位移组合子所具有的一般物理学意义。在序数的（前运算）水平上，运动并不是以十进制（区间覆盖）来构想的，而是被构想为一个位置的变化：由此相对于一个不可移动的参考单元 E，一个可移动单元 A 被认为是从顺序 AE 转移到顺序 EA。正是这种在超序数或超度量的考虑之前描述位移特征的排列或位置起到了估测区间的相对大小及其量化的作用（见下面的 § 5）。

(4) 联合协调器 B′表达了合并的一般动作，但该动作再次被归因于客体，并在运算的构成及其守恒之前就介入其间了。例如在第七章中，5—6 岁的儿童观察不同部位或水平的水从广口瓶 A 连续不断地流入广口瓶 B 和 C，不要怀疑这些相关数量的合并将再次得出相同的总数（他们甚至期望产生一个水平和间隔的完全同构，由于对运算的构成以及守恒缺乏了解，他们后来也未能理解到底发生了什么）。在这种情况下，连接器 B′有效地表明合并早在运算之前就发生了。

Ⅲ——这些对客体间可重复关系的观察、预测与概括也就产生了函数，第四章，第七章和第十一至十二章中对此提供了大量的例子。事实上，这些联系从一开始就具有表达真正依存关系的基本特性，即如此有序的连接使得当 $y=f'(x)$ 时，y 就是依存于 x 的（参见第四章中弹簧的长度取决于砝码的重量，在第七章中广口瓶 B 的填充量取决于广口瓶 A 的排出量等）。这些函数的依存关系，只要它们是物理的，也就构成了我们称之为规律的东西，②但它们尚不精确，也与主体可能的发展水平有关，因为我们正在将函数具体化，使之表现客体之间的共同属性或共变，而不仅仅是那些在主体的心理操

① 然而根据自然是按照恒定规律重演的特点，人们切不可夸大这种主体信念的超前发展。首先，出于同样的原因，一个给定的现象被定性重现的事实并不意味着同一量化值也被重复了。万·邦的数个章节显示，实际情况正相反的是这些完全相同的数值守恒，儿童只在将近 8 岁时才获得（在一个定量的运算守恒和定性的前运算恒等式之间就有一个真实的差别）。另一方面，即使是在定性重复的领域中，无疑存在着一个水平（前函数的而不只是前运算的），在该水平上这些重复确实还没有很明显地出现，我们有时会直到 7—8 岁才发现这种迹象。例如，我们已经在 B. 英海尔德的著作《从儿童到青少年逻辑思维的发展》中指出这样的情况，被试认为一具没有浮出水面上的身体随后仍会留在那里；一个客体滚下一个斜面但并不总是到达同一终点；在墙（具有观察到的相等的入射角和反射角）上的反复回弹能带来一些累积效应的变化；相同化学物质的混合物并不总是产生相同颜色的产物（此处修正的效果再次是累积的）；等等。也许在上述情况中涉及的是一种量化的不守恒性，但它确实表明，根据现象的复杂性，对定性重复本身的信念并不总是与关于充分了解的可观察量的信念一样超前发展。

② 出于即将明朗化的理由，我们用符号 f' 来指代这些规律或物理函数。

作中存在的术语。

发现这些函数规律与因果性之间关系的问题很笼统。但在提出并充分讨论该问题之前，我们必须强调以下内容，即物理的组合子 W' 等，这些我们刚才谈过的（在第Ⅱ部分）并且具体化了的函数或规律，它们使得不更换而是复制§2第Ⅱ部分中的一般组合子 W 成为可能，我们称之为“认知协调器”，由此（§2－Ⅲ）得到的函数则被称作“认知函数”。实际上，要建立一个规律，即要承认自然会重演（W'），那么主体首先必须重复他自己的探索性行为和观察（W），并且将此“归因”于自身形式为 W' 的客体或现象上。为了辨别出研究中的客体仍然是完全相同的事物（I'），他首先必须识别出它们（I）来。同样地，为了判断客体的一个位移 C'，他必须变动他的连续观察，这就必须用到 C；以及为了将元素看作是统一的（B'），他必须通过 B 将它们联系起来。结果是当主体承认一个实质的或客观的依存关系 $y=f'(x)$ 时，他必须从使用或“应用”一个心理或认知的依存关系 $y=f(x)$ 开始。这种依存关系的意义在于，要想了解或确定 y 他就必须先了解 x。

因此可以说（在大多数情况下是合乎情况的），规律本身不是解释性的，因为它被限于为可观察量建立一个有规律的次序，并且这也适用于 $y=f(x)$ 这样的函数关系。但对于理解事实规律 $y=f'(x)$ 在物理范围上的意义仍然存在两个需要解决的问题：(a)物理协调器 W'，I'，C' 和 B' 增加给认知协调器（W 通过 B）的新属性是什么？(b)考虑到真实或物理的依存关系很早就被所有被试认识到，相对于 $y=f(x)$ 中想象的依存关系，在 $y=f'(x)$ 中 y 与 x 之间被判断为真实的依存关系，其基本意义是什么？

至于物理协调器 W 等，值得注意的是所有都被“归因于”客体，如果我们的假设是正确的，那么这已经标志着（儿童的认知）朝因果关系的方向迈出了一步。协调器 W' 在这种重复中获得了显著性意义，对主体而言，事实上就是协调器对自身的重复，而不仅仅是对知觉和语言的重复。现在，这种稳定的规律进一步意味着客体保留了自身身份（I'），意味着它们独立于主体而移动（C'）和合并（B'）。因此与一组协调器只是简单地表达主体动作相反的是，物理协调器集合则体现一个本体论的或本体的视角，超越现象主义并假定存在着“某物”，该事物虽然超出了可观察的范围却必须对它的存在加以考虑。尽管这项假设因为缺少“如何”而不能构成一个完整的因果解释，但它却让因果解释变得必要。

依存关系的观点导致了同样的结论。此处如果没有三种也至少有两种类型的依存关系：(1)一种“想象的”依存关系，使得在 $y=f(x)$ 中对 y 的认识取决于对 x 的认识；(2)一种“物理的”依存关系，例如，使得运动 y 取决于外部客体造成的冲击 x；(3)一种关于主体的有效动作的依存关系，例如，x 是一个由操作造成的推力。不言而喻，第三种类型是另两种类型的共同来源，并迟早会被安排到两个方向上，此后就只有(1)和(2)这两种依存关系能保留下来。而且正如我们看到的那样，它们以一种平行的方式共同介入。真实的或物理的依存关系这一概念现在带来的想法就是，这个因组合子变得超

出可观察范围的“某物”不只存在，而且是活跃的，并且是关系的一个来源：这让我们更加接近那些“被归因于”客体的动作，从而更感受到解释因果关系的紧迫性。这就是为什么，从前运算水平开始，一个描绘或复制动作本身因果关系的特定因果解释与这些函数依存关系是重叠的，例如：砝码“拉动”，这是“有力的”等。这种情况在科学的历史（一定距离的引力等）中有大量的类比，在此情况下，我们可以效仿格里兹的言论，称因果关系还只属于元语言的范围，而未进入函数语言的范围。另一方面，在对该假设普遍性的表面验证中，主体也满足于某些情况下的分离的函数规律（第四章中的阶段等），这种分离的函数规律是由没有因果理解的纯粹的观察所建立而来的。

Ⅳ——然后是如何从特定的函数规律或从这些分离的函数（分离的也就意味着它们可以被独立地发现）中构成这种因果理解。无疑是通过它们的组合构成的，因为因果解释来自于一个组合函数系统，而不是来自于若干分离的函数。但关于这种构成中有趣的一点是它同时假定了一个认知的或运算的函数结构，以及归属于客体的一组运算符，这些运算符为函数的“依存关系”提供了框架并与此同时协调这些依存关系，第四章为此提供了一个例子。正是在这一点上，因果关系成为函数语言的一部分，因为那样它所包含的就不是一个特殊的函数（照此也就不存在所谓的“因果律”），也不是这样或那样函数的一个语义和元语法副本，而是一个解释性的整体结构，该结构在一定程度上将转换和守恒整合在一起，并以此可以独立地解释可观察现象的产生。

这段内容，从规律及其协调器和“依存关系”已经暗示的那个超出了可观察范围的活跃的“客体”世界，到这些可观察现象的因果“产物”，其实是对本质的论述，或者至少是沿着两条平行的路径对本质进行讨论，就像两军联合力量汇聚于一个单一的目标。其中一条路径是认知协调器 W…B，然后是认知函数 $y=f(x)$，最后是运算本身，这条路径允许上述变换的组合，并确保其守恒。纵观第四章，函数对之间是相互协调的，直到它们构成一个可传递的序列，以及从这些函数中得到的关系的运算成分保证通过补偿的相互作用，令$(x+y)$以及$(y+y')$的守恒与差值 Δx，Δy 和 Δz 的度量等式是相同的。另一条平行的路径是由协调器 W…B 投射到物理协调器 W′…B′，由函数 $y=f(x)$ 投射到物理的依存关系 $y=f'(x)$ 以及由运算本身投射到“归因于”客体的运算符上的；如此一来它们就让依存关系系统有可能封闭成为一个整体结构，而该整体结构又能确保它们的成果。事实上，在第四章的例子中涉及的由砝码 z 产生的力的提升取决于弹簧 x 和位移的下降（弹簧的拉长，绳子的位移和砝码重量的减少），与系统的闭合性和循环性一起说明了所观察到的函数的依存关系。

但这两条路径中——运算的或是因果关系的——是谁控制着另一条，并使之在其他可能性中朝向这种并行关系？两条路径差不多：运算可以先于因果关系，甚至在任何关于规律的实验和观察之前产生因果关系，这似乎已经是希腊原子论的实例；但一个假设的因果模型也可以将自身强加于运算之上，并强迫它们以同样的方式效仿自己——用一个稍微大胆的对比——以数学物理学构造的定理，即演绎的方式效仿，但同时又与

受实验启发而来的解释模式保持一致。

这两条路径的并行性应用于第四章开始的函数研究。物理依存关系是通过实验被发现的，在此情况下仍然只构成了一些函数的法则以及单向函数，随后这些物理依存关系被调整为相互依存关系(interdependences)，继而导致了不同的动作系统朝着两个方向发展，并分别具有了事实上的因果性意义。然而，这一阐述只有通过运算的平行结构才有可能实现，运算的平行结构将最初的定向函数包括进一组可逆变换中，从而产生了守恒的观念和对共变的量化(直到形成一个比例结构)，当相互依存关系最终达到可理解的因果水平时，我们在牵引操作(其动作是从底部到顶部的传送或扩张以及反向移动)与主体(通过将暗示来推导和建构这些相同的联系，作为其解释的元素)的运算之间发现了一个完全的同构。

§4 应用、类与关系

如此这般地分离(§1－3)构成性函数的特有性质和超前的重要性后，现在我们应该试着解释它们构建函数的路径，即函数与运算之间的渐进交互。

事实上，构成性函数代表了未来运算结构的定式模型，换言之，它们表示了动作产生运算的方式。但即使在后者已经详尽阐述后，函数仍然保持了定向“依存关系”或结构应用的方向，并通过令其种类多样化的逐步量化得以丰富，尤其是允许在函数之间进行运算组合，并由此无限地(adinfinitum)自我繁殖。

Ⅰ——首先我们必须弄明白的是从函数到运算性类包含的转变。格里兹从逻辑的角度解释了这一联系，在第二章中对此所举的例子是相当直接的。正如第二章中，令元素 $A'_{1,2,3}$ 构成一个源集(source-set)，主体将使用源集来覆盖一部分基本集 A(在此情况下的目标集)。由 A'到 A 的应用构成了一个函数联系(单一向右的联系；相比之下，单个 A 与多个 A'之间的对应关系则不是一个由于缺乏该单一性而产生的应用)，它在 A'集合之上定义了一个商集，而这反过来又构成了一个等价类(因为就 A'的结果来看，A'是等价于 A 的)。另一方面，如果我们将源集 E 扩展到包含 A'，B'，C'和 D'的所有元素(各有 1 至 3 个)且目标集 F 扩展到包含 A，B，C，D 四个基本集，我们注意到一个商集在 E 上的应用只覆盖了 F 的一个子集，从而提出子类和层级包含的概念。因此很容易将函数转变为一个系统，该系统包含了类及其可能的量化扩展，而且因为这些类是不相交的，所以可能在它们之间相互构成一组类。

该转变发生于三个相继的阶段，第一个阶段(5－6 岁)已经介绍了的基于 A'“适合于”A 等的等价关系，但直到最后一个阶段(8－9 岁)才达到层级群集的运算系统水平。但现在这个逻辑转变必须翻译为发生学术语以便我们理解应用或前运算函数与等价类的运算结构认识论之间的认识论起源关系。正如第二章所示的，在心理上，该转变进展

缓慢是由于这样一个我们再次提起的事实，等价关系最初只来自于从客体到动作格式的同化，即在这种特殊情况下通过覆盖来同化到应用的格式中(回想该初始阶段是以“用途”的定义为特征的)。只有在第二阶段期间，等价关系开始通过客体之间的同化来形成，但作为格式的一个函数：从这个结果来看，元素的小型“单个合并”(=数学家的“分解”)至此还没有任何层级包含。后者终于在第三阶段出现了(按照种属差异来定义的)，但它建立在类的并集的可逆运算基础之上，而不再只是建立在单个元素的基础之上(这样也就是建立在运算 $\alpha+\alpha'=\beta$ 和 $\alpha=\beta-\alpha'$ 的基础之上)。

但是，虽然该演变证实了应用和函数的原始特征和前运算特征可以表达动作同化的格式，但这显示了上述的所有成为等价类包含的运算的转变是以一个新方法为前提的，即可逆性，此处它的介入非常明显。动作本身是单向的，因而不是运算(在我们通常使用的狭义上)：E 在 F 上的应用构成了一个多对一的对应关系(图 18，Ⅰ)，这种对应关系是一个函数，因为它是单一向右的。另一方面，根据定义，由 F 到 E 的一对多对应关系既不是一个应用也不是一个函数，因为它不是单一向右的。然而，正是这种一对多的对应关系(例如图 18 中Ⅱ从 G 到 F 和从 F 到 E)表征了一个层级分类(属及其物种，物种及其亚种等)，而且，为了得到它，主体必须能够毫无困难地在这个相互单向的对应关系系统(一对多或多对一)中从一个方向转到其他方向。因此，主体自身只有不拘泥于函数的单向性，才能获得运算的可逆性移动。

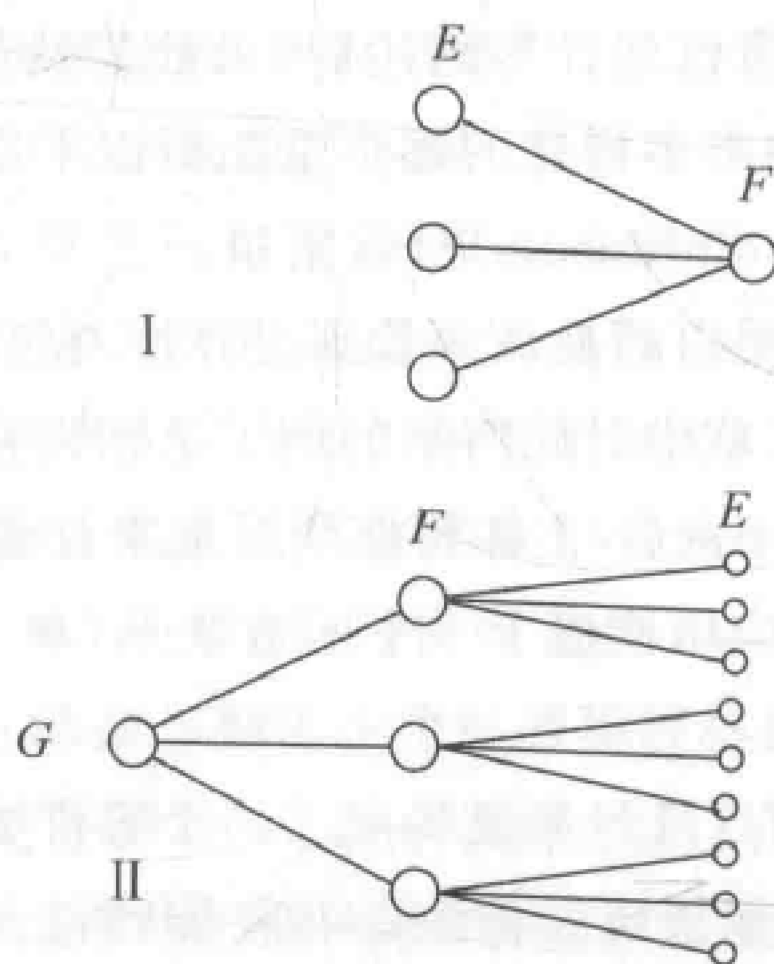


图 18

Ⅱ——回忆一下，互补的子类(第二章中的元素 A'，B' 等)并不是由 E 到 F 的应用所确定的。现在我们明白原因了。在类的合并运算 $\alpha+\alpha'=\beta$ 和 $\alpha=\beta-\alpha'$ 中，补集 α' 得到了明确的限定，因为在这种情况下运算是可逆的，这对于补集的建立和包含而言是必需的，而在单向应用的情况下这是无法实现的。

还应当指出的是，虽然函数的建构与协调器及之后的组合子有关(正如我们在上文§2 所说的那样，但没有“应用”本身被作为协调器之一，因为后者表现的是格式的形成特征，而前者表现的是它在客体同化过程中的使用)，将这些协调器从运算(更准确的应

该称作运算符)中区分出来的本质差别在于前者仍然是不可逆的,就像在做一般动作,而后者是可逆的。我们当然可以在逻辑水平上减弱这种对立(通过引入一个反演算子或通过适当地操纵交换器 C),但从系谱起源的角度来看,保留这个非常发人深省的对比是值得的。

另一方面,如果我们能区分出两种分类模式(格里兹所正确坚持的那样),一是通过单个元素的直接合并(数学家的"分解"),二是通过将始集(initial set)细分为包含类(included class)和子类,我们可以清楚地看到,这种区分也适用于建构方法:单个合并与单向应用有关,细分则涉及可逆的包含运算。鉴于从发生学的角度来看应用更为早熟,我们可以区分出两个水平,一个是前运算水平,另一个则是完全的运算水平(其结果是包含的量化以及对补集的明确界定)。在自发分类的形成中这对于观察是有指导意义的,儿童靠自己以一种相当通用的方式从第一种模式发展为第二种模式。后者凭借运算结构的进程来实现了自约束,这些运算结构源自于构成性函数,却反过来后包含了它们,并且,这些运算结构超越了它们,在两个方向上均实现了共同单向的对应关系的概括化。但尽管函数结构在大多数情况下超越了构成性函数,它们还是改进了后者并由此形成了构成化函数,这得益于多种多样的量化方法,我们将稍后再回来讨论这些方法。

Ⅲ——对我们而言仍然需要澄清函数与相关群集之间的关系。函数表达的是一种依存关系,而关系不过是一个比较的结果。二者之间的差别在物理层面上可以最清晰的体现,在此层面上依存关系是客观的,比较是由主体而来的,然而在逻辑-数学层面上,当比较被定向时,它也就通过一个应用将单一的依存关系移向了右侧。但从形式化的观点来看差别仍然明显,因为函数包含了一个有序的单向数对,而关系要么无序要么在项与项之间建立起一个数对,但这个数对可以在两个方向上来回移动。

我们可以举一个例子来说明连续对应关系的群集,正如 N. 范登博加尔特在我们中心所做的特殊个案研究那样。① 一辆卡车沿着一条复杂的道路驶过五间房屋,从每家门前取走不同颜色的标志,并按照它们被取走的顺序放到卡车后面。于是就有了两个问题:(a)解释为什么标志已按特定顺序被放置在了卡车上("为什么红色在黄色的前面?"等);(b)陈述卡车经过每家门前的顺序。60%的 5 岁儿童(25 人中的 15 人)和 68%的 6 岁儿童(25 人中的 17 人)解答了问题(a),然而只有 28%的 5 岁儿童(25 人中的 7 人)和 44%的 6 岁儿童(25 人中的 11 人)理解了问题(b)[在 7—8 岁组中我们发现 50 名被试中只有 4 人解答了(a)而没有解答(b)]。由此可见在 7 岁之前,让回答问题

① 见《时间认识论》(L'épistémologie du temps),《发生认识论》,第 20 卷,第 24—26 页和第 137—148 页。至于时间,回顾 S. 巴贝尔和沃亚特(《发生认识论》,第 21 卷,第二章,5F 处)的论述可能会有趣,他们表示"对于联结空间速度与时间的函数规律的发现到目前为止已经成功地早于位移持续时间的层级包含问题"。因此,我们再次发现可逆函数与定向函数截然相反的晚出现。

(a)成为可能的定向函数并没有伴随出现确保(a)的倒数是(b)的可逆运算。这是一个极好的关于连续对应关系的例子,连续的对应关系目前还不是一个倒数的或双态射的,也不是一个同构(一种目前被发生学所公认却只发生在高等数学领域的状态),正如这些事实被讨论之时吉博所指出的那样。

如此一来它再次具有了可逆性,这将函数从关系的运算结构中区分出来,但除了关系群集所需的逆运算外仍然存在其他方面的差异。有序对的一个给定"范畴",其中箭头代表关系,这些箭头产生了部分的组合(或不是处处都被定义了的"运算"),但达不到严格的传递性。另一方面,此系统所包含的由元素构成的一般性同一(general identity)不是一个而是两个,因为即使这些对(a,a)等是有序的,仍然需要区分出左侧和右侧身份。相反地,关系的群集由于其可逆性而忽略了这种差异,并由此包括了在对的"范畴"中缺失的再吸收定律和重言式定律。

我们因此可以大体上承认,将构成性函数从"群集"的基本运算结构的发展中区分出来的基本滞差(décalage)起因于类合并(class union)的可逆性以及关系的串联或传递顺序的逐步形成,这些可逆的合并运算或串联由此成为在有序对的最初"范畴"中所缺失的包含(inclusions)的来源。现在可逆包含(因为它可以被反转为去包含)导致类的外延及其等价关系在量上的增加或减少,这些等价关系本身是可宽可窄的,也导致在不对称关系的串联中项$A,B,C,\cdots$之间差异(或距离)量的增加或减少。这种量化反过来从类和关系群集中区分出最基本的定性本构函数,类与关系群集的量化必然规定了其自身的存在形式,即在合成之前的最初的包含,这产生了数值或度量上的量化。

Ⅳ——在分析这个量化过程前让我们重叙下一些定义。内涵量(intensive quantity)只描绘了局部与整体之间关系,而忽略了局部与局部之间的定量关系。内涵量由此受限于表达这样一个事实,即一个非空类B中的元素多于其子类之一A中的元素的事实,或是在三个项的顺序排列$A<B<C$(或$0<A<B$)中,A与C(或0与B)之间的差值大于A与B(或0与A)之间的差值,借助于包含的性质才令这个如此简单。我们将在用于指明一组个体联合为一个类时保留"内涵量"(因为康德)和"外延"这两个术语,尽管这可能从如下事实中引起模棱两可性(纯粹字面意义的),这一事实就是"外延"关系只与"内涵"量有关(这个模棱两可性在英语中是复合而成的,在英语中"理解"是由"内涵"翻译而来的)。另一方面,外延量表示的是一个整体的各部分之间的定量关系(例如:"几乎所有"的——科瓦莱夫斯卡),或是不同总体间的关系,当它们只用更多、更少或相等的术语来表达时。例如,当我们能够通过某种方法(一致性分析等)来判断在一个类$B=A+A'$中,补集A'包含了比子类A更多、更少或一样多的元素,或当在一个顺序排列$A<B<C$中,我们可以求出B与C的差值是大于、小于还是等于A与B的差值(苏佩斯将这种对间隔的非数值估计称作"超序数")。最后,我们将使用度量或数值数量的术语来描述任何以基本单位的迭代为基础的比较。这种估值形式是"外延"类型的一个亚变种(subvariety)。

§5 函数的量化与构成化函数的过渡

我们所谓的“构成化”函数是通过它们与运算之间的交互发展而来的无数的分化函数。它们最一般的特征源于从基本“应用”带来的定性共性到运算可量化的共变，然后到变化之变化等的转变。对此，第三章、第五至六章和第八至九章为我们提供的例子不胜枚举，更不必说在第四章、第七章和第十一至十二章对这些物理函数的平行发展进行了检验。

Ⅰ——这样的发展开始于由定性的“前比例”引向的度量或数值比例，这一过程本身从属于层级包含的构成(加法以及最重要的乘法)。

比例是一种关系等式，换言之，是关系间等价性的一种特例。因此，我们可以使用“前比例”这一术语(甚至是在斯皮尔曼所采用意义上的“相关”一词，尽管我们有时会扩大这一概念)来指所有类型的等价，包括函数。这样一个概念的意义，无论它可能有多广，都只是强调了这样一个事实，即在严格意义上比例构成了一个组合的长序列的到达点，而该组合的长序列则始于两个有序对的组合。假设 a 和 b 是两个借助于任何应用而被同化到同一格式的两个客体，无论是因为它们各自的属性 α 和 β 彼此相似或是因为这些客体出于何种理由的彼此“适合”，我们都可以写出关系式 $\beta=f_1(\alpha)$。现在假设客体 c 和 d 借助于一个应用 f_2 联结到一个相似对中，f_2 或多或少相当于 f_1(“多”意味着 $f_1=f_2$ 的同一性，而“少”则与一个事实有关，即两个函数都通过同样的客体得以协调)。因此，在任何情况下，如果 γ 和 δ 是 c 和 d 的固有属性，我们就有了“δ 对 γ 正如 β 对 α”这样一个前比例关系。这一点并不像看上去那样微不足道，因为这一联结标志着最初级的组合的开始：两个连续动作或两个函数数对的协调，无论它们相似与否。例如在第一章中，当儿童用一个小蓝花替换一个小红花，然后用一个大蓝花替换小蓝花时，他已经对两个替换做了协调，而且他明白尽管两个替换的内容不同，但这两个交换是可比较的，也因此允许用第三朵花替换第一朵花，从而使他获得了用一朵大蓝花替换一朵小红花的能力(当然这样的传递性并非总是可行的)。①

从这些完全普通和基本的前比例关系开始，主体达到了前比例水平，这不同于 f_1 和 f_2 之间更精确的等价关系，后者也更好地定义了前比例。格里兹对此提供了几个例子，其中最典型的是由类的矩阵连乘而得到的“相关”，即通过笛卡尔积得到的水果类与蔬菜家族类之间的关系：“谷物对小麦正如葡萄对藤蔓”等。

Ⅱ——这种乘法结构依赖于一组双向的(一对一的)对应。这与序列对应有关，我们可以最清楚地看到从前比例转变为真实比例的条件。顺便我们要指出的是在对序列

---

① 在此处比例应该被表达为大蓝花对于小蓝花正如大红花对于小红花。

对应的使用我们并没有离开包含的领域，因为在任何给定的顺序 $A,C,\cdots$ 中，我们总能将 A 与 B 的关系看作是包含在 A 与 C 的关系之中，一个亚类也以同样的方式被包含在一个有着更大外延的类之中。其中第二章（§3）给了我们一个关于这一转变的好例子。

在那个实验中，儿童被要求在三条不同长度的鱼之间建立 $A<B<C$ 这样的对应关系，同时也被要求在这三条鱼所需的相应食物量之间建立关系（例如，不同长度的鱼所需的饼干量分别为 A',B' 和 C'）。在该任务中所观察到的阶段显示了讨论中的那种进步发展。但是我们在下文中不会坚持使用 A,B 和 C 在实验中的值，我们宁可定义 a 是 A 与 B 的差，b 是 B 与 C 的差等诸如此类的；而 a' 是 A' 与 B' 的差，b' 是 B' 与 C' 的差等。只要 $A<B<C$，那么 a,b 和 c 就可以以任何方式予以解释。

（1）第一阶段包括对这些差的简单识别（由此排除等式 $A=B$ 等），并在差 a,b 和 c 以及 a',b' 和 c' 之间做出随意的对应（$b'>a'$ 或 $b'<a'$，等）。在第一阶段存在以"$B'>A'$ 正如 $B>A$"为形式的初级前比例，其中并没有集中任何注意于差异量上。

（2）第二个阶段是关于 $B'=A'+1$ 和 $C'=B'+1$ 类型对应的识别，这些对应类型与我们针对 a,b 等所说的一样，一般情况下仍然是主观不明确的，这与差 $a'=b'=1$ 是一致的。因此我们可以说加法前比例虽然实际存在，但这种加法本质上是顺序的：它等同承认，如果 A,B 和 C 占据了排列的位置 1，2 和 3，并且对应项 A',B',C' 亦是如此，那么差异 a',b' 等则分别等于 1 个附加秩（additional rank），并因而彼此相等（但没有超出 $a=b=\cdots$ 的基数的量化）。

（3）下一阶段是另一方面的"超序数"：$a'\leqslant b'\leqslant c'\cdots$ 或 $a'=b'=c'=k\pm m$。在第三阶段明显的基本发展就是试着考虑变量的值，并且一旦儿童意识到其重要性，他就会发现自己正站在比例的门口。至此他的前比例被简化为：从一个数对的简单协调意义上说，B' 对于 B 正如 A' 对于 A，此时还没有任何量化差异。反之，从那时起主体得出了"b' 对于 b 正如 a' 对于 a"的结论，考虑到 A 与 B，然后是 B 与 C 的实际间隔，试图将 a,b 等与 a',b' 等的差值留待以后处理。但这些差尚未得到测量确定，仍然只是用"更多"或"更少"的措辞来估值，即以一种超序数的方式精确估计差值（苏佩斯所使用的意义上）。此外，主体自己并不是基于 $a'=a,b'=b$ 等关系，而是试图根据由原始元素 A,B 和 C 得到的 X' 的值将 a,b 等移项为 a',b'，并适应那些他在 A,B 和 C 上观察到的差。这标志着真比例的开始，但这是在广义上估计的，尚未得到度量的量化。

（4）最后，这些定型的比例以一种数字或度量的关系得以精确：$a'=na,b'=nb$ 等，其结果是 $b'/b=a'/a$ 以及随后可能的叉积（crossed product）等化。

Ⅲ——在其一般形式中，尤其是当差 a,b,c 与 a',b',c' 之间存在一个反比例时（正如在天平的例子中坐标轴上距离的增加会通过减少重量来得以平衡），直到大约 12 岁时才达到度量比例的阶段，因为它们预先假定了一组的四个转变：恒等式 I，倒数 N，互反 R 和相关 C（=NR），其中互反可以导致与倒数 N 相同的结果，但不是通过抵消的方

式而是通过补偿的方式得到的。与此相反，在一个顺向的对应序列中，当一个等差递增的序列的比例必须在另一个不同差值的序列中进行重构时，其中唯一介入的转换就是其自身同一性和互反性转换，而不包括反演（N 和 C 都不包括）。[①] 这简化了问题并使之更早得到解决。这在第二章 § 2 中更是如此，在这一节中，孔的比例 1∶2 的获得可以通过加法组合：到 1，2，3，4，…通过 2 的叠加有对应的 2，4，6，8，…（这确实涉及了乘法，但只是蕴涵的，因为 $1+1=2\times1$）。这在第二章 § 3 中也是如此，解决该问题的方法或多或少包括了自身的公式化，因为我们告诉被试，B 摄取的食物量是 A 的两倍，C 的食物量则是 A 的三倍。有趣的是，这并没有让被试通过所有的阶段，这些阶段中在达到比例性之前，差值首先是随意的，然后等于 $+1$，然后是 $+k>1$。

问题的关键是主体顺利完成了从定性前比例到真正的量化比例的途径是什么。这个问题围绕着超序数比例的出现，叙述了主体通过再次将自己限制到一个外延的量化然后迅速变为度量，从而做到对间隔值或差异值的考量。

答案似乎存在于可逆性包含的构成，这是在组合子系统和命题运算的出现之前的间隔的来源，组合子系统和命题运算的出现让 INRC 群的达成具有了可能。在前运算水平（简单排序的项 $A<B<C\cdots$ 之间是任意差值或差值等于 $+1$）主体受限于一个非常普遍的不可逆顺序的结构，这个不可逆顺序由于非常缺乏可逆性而没有包含物。这种情况起因于构成性函数的首要性（或由它们表达这种情况），因为所有这些函数都是定向的（有序数对，应用等），而不是运算的。一旦由加法运算得到类包含时，被包含的类 A 在 B 内，B 在 C 内，……构成了（由于可逆性 $A=B-A'$）互补类 A'，B'，C'，…（见第三章）。现在后者恰恰表达了 A 与 B，B 与 C 等之间的差或间隔，这意味着“如果 $A<B$，那么 $A'=B-A$”等这种内涵的量化。这同样适用于有序关系：如果 A 小于 B 且 B 小于 C，等等，则关系 $A<B$ 被包含于关系 $A<C$ 中，而且每个 $X<Y$ 的关系都在 $X<Z$ 的关系之下构成了一个互补类，如果 $Y<Z$ 是同一序列的一部分的话。这并没有告诉我们差的大小，虽然我们可以推断出来，就像在类包含中所做的那样，$A<B$ 的差小于 $A<C$ 的差，而且这两个差之间的差等于 $B<C$ 的差。

由此互补的类或关系的形成构成了一个对量化必不可少的初级阶段，这种量化表现出了包含的类或关系与被包含的类或关系之间的间隔或差值。但是所涉及的量化仍然是“内涵的”（见 § 4 的最后），并仍然存在着由此到对这些差或间隔的量化比较之间的转变，这些差或间隔预设了一个“内涵的”量化。现在这就是一种心理事实，只要这些间隔被注意到，它们导致了以“更多或更少”（即尚未度量的超序数）为表达方式的估值。

---

① 另一方面，虽然我们从 7－8 岁组儿童中没有发现 INRC 群（因为它包括了一个命题组合逻辑），我们从乘法矩阵水平上观察（$\alpha\beta$；α 与 β；非 α 与 β；非 α 非 β），一个克莱因群使得可以通过一个方格到达任何的四个方格。

根据埃斯图-齐普夫-曼德尔布罗特定律①我们知道这种判断估值是很自然的，因为它既可应用于商店中的分类也可应用于生物学分类。近似比例通过该定律显示出在属的大小和种的数量之间必然包括了它们相互之间及其部分之间的一个总数上的比较（由此外延被量化），而这只是基于对整体构型的检查做出的。这正是我们在一定水平的被试身上所观察到的，在给定这些构型，他们判断一个序列是否具有相等的或增加的差值，或判断一个互补类的外延是否大于基本类等。这些比较是"应用的"或不同的对应关系。

因而对于这些定向的应用而言，这足以让它们以双向（由此运算＝可逆）对应的形式完成，以便这些外延的比例能变成数值的并最终成为将用于四元群（quaternality group）中的严格比例。

Ⅳ——然而，比例并不是构建或运算量化函数的唯一特征。最普通的例子就是关于一个变化之变化或一个函数之函数。尤其是第七章说明在共变接替共同属性并被理解后，它们使被试形成了变化之变化的概念，这首先是观察到，然后是经概括化形成，并且从 11—12 岁起是演绎地预料到。有两个阶段必须区分开来。在第一个阶段变化之变化不是预测到的，虽然对事实的观察带来了对它的理解和某种程度上的概括化；这一水平在接近 7—8 岁时开始，相当于前面分析的内涵与外延量化的水平。在第二个阶段中这些变化之变化被预料和推测到，即最后被完全地同化：该第二水平是对应于命题运算的，因为它是关于运算的运算问题，即关于二阶运算的问题，这个二阶运算表现了始于 11—12 岁的阶段特征；其结果就是在这些结构与比例之间的世系关系。

由万·邦所写的章节（第八至十三章）为我们提供了一些极好的关于变化之变化和比例变化的例子。第八章尤其显著。给定一个 L 形的图形，7 岁起的儿童懂得当拉动细绳使之围着放置在 x 与 y 交点的插针滑动时，分段之一（x）的加长正好叠加补偿了另一个分段（y）的缩短。但如果该图形被做成正方形（4 角有 4 个插针并且通过转移插针将该正方形调整为矩形），而直到 12 岁时，主体才理解了这些简单的加法补偿（$+x=-y$），并找到图 11 所示的规律。相对于两个单分段 x 与 y，正方形是一个封闭图形的事实引出了面积的元素。因所涉及的函数被发现只与恒定周长有关，而后者必须从整体的转换中提取出来，而该整体的转换同样可能缩减面积。当图形为正方形时面积（xy）最大（即 x^2，因为 $x=y$），当一条边的长度等于周长的一半时，矩形的面积也减少至零。② 表面积上的减少由此构成了一个变化，该变化相当于如下的分段 x 和 y 的加法结合（开始之时各为 10cm）：$10\times10=100$；$9\times11=99$；$8\times12=96$；$7\times13=91$；…；$3\times17=51$；$2\times18=36$；$1\times19=19$ 和 $0\times20=0$。因此，这是由于他未能分离出 xy（面积）和 $2(x+y)$（周长）这两个成分，直到 11—12 岁主体都未能掌握 $2(x+y)$ 这一组合，虽然他在 7 岁时仅仅因

① 参见《发生认识论研究》，第 3 卷。

② 至于像这样的表面积，参见《发生认识论研究》第 19 卷中由万·邦所写的文章（空间守恒）。

为 $x+y$ 就能这样做了(7 岁前不能,因为长度守恒和精确补偿的缺乏)。

第九章提供了有关简单比例的另一个例子(圆圈被有序地放置在不同长度的棍子上),在该例子中直到 11—12 岁时被试才找到了解决方法。与此相反,在第十章和第十二章中,由于其因果背景显示了从简单的依存关系(与发现车轮的行进距离是其直径的函数一样,简单依存关系的发现有时也发生得非常晚)到相互依存关系(和距离、直径与车轮滚动频率三者间的关系一样)的转变是如何与其构成所需的运算结合相伴而生的。这些成分通过量化值的数量守恒的发展在接近 8 岁时开始,这种数量守恒复制了那些简单的定性副本(参考§3 中的组合子 W′)。然后他们用差异间的间隔或关系的量化对变化的大小做了估值,尤其是对相对大小的理解,这带来了比例性在接近 11—12 岁时开始出现。

§6 总结:函数序列与包含的可逆性——协调逻辑(初级组合子)和运算逻辑

上述研究的两个主要成果就是实现了我们几个人的梦想,即分离出一个前运算结构的逻辑(或相对一致的前逻辑);并解释"构成化函数"的产物与运算数量有限性的相反的无限性。

Ⅰ——构成性函数表现了动作格式中固有的联系,并按照这些动作的普遍形式组织起来,我们称之为基本协调器(W,I,C,B)以取代组合子这一称呼,以强调其基础性方面。动作被定向,并且常常是不可逆的始于函数和应用的有序或定向的特征。

动作与函数的基本属性是有序(单一向右的),从而解释了(或表达,这取决于个人观点)前运算思维的最普遍特质之一(4—7 岁):顺序关系的首要性在最多样的领域中超过了包含关系。这就是为什么在根据间隔来估计之前,长度是通过到达点的位置(越长=越远)进行估计的:如此一来,在所有想象的表现中边界是重要的;车速是根据超车来评估的;类始于有序的(排列的)具象集合;数字同样服从于等级的长度,按照外延过宽的逻辑错误来排除;以及由于单向定向所具有的优势而对相互作用知之甚少,等等。

顺序的首要性自然是所有类型的错觉(因为序数估量而产生的不守恒等;路径 A,B 与其返回路径 B,A 之间的不等,诸如此类)的一个来源,它包括了一个有效的逻辑,证明了:构成性函数的逻辑和基本协调器或组合子的逻辑(以替换为形式的中继器、鉴别器和交换器等)是合理的。该逻辑表现出了所有逻辑的显著特征,这是因为它具有一个结构:我们已经看到初始函数数对一旦构成,我们就可以像麦克莱恩所用的那样谈及"范畴"。它们那些不重要的(在这种情况下)特征,实际上是向此类组织的普遍性致敬,该类型的组织包含了一个客体与其函数的集合,以致结合律存在于其组合的一致性可能(而不是任何适宜的地方)视顺序(或者箭头的方向)而定的地方。这似乎是早在前运算水平时就已出现了的基本结构。

有关此原始逻辑最有趣的事实是，它本质上仍然是定性的，其内涵的优势地位显著高于外延，因为后者还未得到系统的管理，即量化。因协调器Ⅰ的缘故使之成为恒等关系式过早发展的基础（一个必然结果，本书没有对此进行探讨，但在本丛书的第24卷做了论述），与守恒概念相反的是，所有这些都包含了从识别中精确得到的除客体永存性格式之外的量化。

尽管这样一个相对清晰的逻辑是非常宝贵的，但在与运算的总逻辑相比较时它就有了一个主要缺陷，那就是，可以这么说，它只代表了一半的逻辑，这是因为这样一个事实，即它是按照一个给定顺序来定向并且仍然缺乏可逆性。正如我们已经强调的，第二章清楚地说明了这一点，因为通过主体进行的“应用”是单向的，并且形成阶段的连续性遵守了从应用概念作为一种定向对应开始的理论发展。逆向对应会直到主体由函数转变为运算才发挥作用（一对多取代多对一），并且多亏了函数和运算的可逆性才建构起层级包含。

由于缺乏这种运算可逆性，因而构成性函数的逻辑忽略了让我们回到其定性性质的包含，因为正是由于可逆包含才让运算的结果达成了量化（从类和关系的外延到数量的建构）。多亏了可逆性，运算一旦得到展开，构成性函数的不完全逻辑就从群集的加工或被量化的包含的结构中发现了（如果我们能再次如此表达它的话）其后半部分。

Ⅱ——一旦通过运算完成了最初的协调器，甚至在某些方面转换成可逆的运算，函数也就作为“构成化函数”浮现出来，然后无限地多样化。

我们已经能够区分出这一加工细化的两种形式。第一种形式依然是初级的（相较于函数的水平二而言），但它无疑在随后起了至关重要的作用，即比例的建立，这是我们不会倒退回去的。与此相反，第二种形式则是无限多产的，即函数之函数的建构，这是通过对变化之变化的发现来进行的。从第七章倾倒液体或第八章将正方形转换为长方形的例子中，主体从微分和那些他已经掌握了的格式或定性方面中分离出了函数的机制。

逻辑-数学函数在数字上是无限的，相反，从构成性函数中通过精细化加工而形成的运算却是小数字的，如何解释这一事实呢？这不过是一个问题的翻版，该问题可能在与初级协调器或组合子的相对稀缺性相比较时，已经针对构成性函数这些原始函数的多样性提出了讨论。

我们可以给出两种不同的答案。要么我们将这种多产性归于物理世界的贡献，因为函数就像动作那样构成了因果关系和运算的常见来源；要么我们求助于运算所固有的建构主义，并对应于（不是来自于它们）归入物理因果关系的“产物”的无限序列。本章§3的考虑指向的是第二种解答。在运算建构性与因果生产力之间不言而喻地存在

着一个对应，而没有任何一个被还原为另一个。[①] 这始于在双重因果和动作的运算-成形性质的基础上，“物理协调器”、W′和I′它们在因果水平上对应于逻辑组合子W和I等的形成，以及开始于因果关系发挥“归于”客体的运算符的作用，对应于主体的运算之时。

借助运算而形成的函数凭借一个特殊的抽象过程而被无限地建构。此处所研究的比例和变化之变化，尽管该过程结果的少数例子很容易受到无限概括的影响：考虑到某些关系与系统变化有关，故比例不过是这些关系之间的关系。此外，鉴于它们所引起的这些变化和差异，变化之变化不过是与差异本身有关的类似函数。因此，我们可以通过应用新函数从一个 n 次系统中得出一个关于其自身协变的 $n+1$ 次系统，以它们为对象并分离出高阶的协变来。

这一函数-生成过程不过是“反省抽象”借助动作或运算的结构的一个特例，与某一水平的要素有关的该过程不断地反映出（在对新水平的反省和通过思维重建的双重意义上）一个更高水平的比例，又将成为新结构的阐述对象。这种不确定建构的形成工具不是别的而正是协调器或基本组合子，然后是在可逆运算意义上的运算符。该建构的产物是在前运算水平上的构成性函数，然后是更大数量的构成化函数成倍增加。因此这些产物自然而然地就比那些成形工具更为丰富，并且在这个发展过程中所处的水平越高，则产物与工具之间的区别就变得越模糊，因为其中的每一个都可以在态射之间无穷尽的相互作用中成为新阐述的对象。但我们重申，虽然逻辑-数学函数的这一连续建构是由反省抽象推进的，该运算的演进却并没有以任何方式排除并行通路，即适用于物理经验的简单抽象，运算经历了从观察到的变化到各种顺序的共变，以及从定向的依存关系到因果的相互依存关系的演进过程。

---

① 无论如何这不排除，在某种情况下，一个数学函数会模仿或重构一个最初是物理发现的函数，几何图形可以以相同的方式演绎重构一个物理空间构型。

原版索引*

A

Abstraction, 88,142,146,168　抽象
　simple,96,145,169-170　简单～
　reflective,97,146,168-170,174,194-195　反省～
　definition by,142　～的定义
Accommodation,39,171　顺化
Actions, 94,164,168,175,180,182-183　动作
　attributed to objects,167,176,179　归因于客体
　causal and operatory,3,49　因果的和运算的～
　coordinations of,30,75,88,95-96,168-170　～的协调
　instrumental,6,49,149　工具的～
　interiorization of,7,170　～的内化
　inversion of,62　～的反演
　schemes of,3,12,15-16,22,24,28,30,46,74,88,95,170,182　～的格式
Addition, 160　加(法)
　cardinal and ordinal,37　基数的和序数的～
　ordinal,171,187　序数的～
Algebra, 97,152　代数
　functional,149　函数的
　Boolean,156-157　布尔～
Anticipation,5,19-20,22,51,85-86,91,93,127　预期
Apostel,L,150-151,161,164n,165n　阿波斯特尔
Applications,21,28,146,170,172-174,190,192　应用
　as simplest functions,13,20,23,34,39-40,46,58,74,87,130,162,167,169,182　作为最简函数

* 注:原版索引的页码,为英文原文的页码。

canonical, 158 经典应用
defining a quotient-set, 27-29, 151, 181 定义一个商集
functional, 19, 27, 40 函数～
mathematical, 141, 146 数学～
one-way, 25, 29 单向
oriented (ordered), 37, 39, 181, 190, 192 定向(有序)～
Aristotle, 143 亚里士多德
Arithmetic operations, 145 算术运算
Assimilation, 23, 28, 40, 57, 182 同化
functional, 171 函数的～
of actions (primacy of), 88 动作的～(～的首要地位)
recognitory, 33, 172 (认知)
schemes of, 3, 39, 95, 171 (～的格式)
of structures, 87 结构的～
Associativity, 177, 192 结合律
Asymmetric relations, 84, 159, 185 非对称关系

B

Bernoulli, J., 145 伯努利
Bijection: 22, 67, 155 双映射
functions of, 34 ～的函数
Bimorphism, 184 双态射
Block, L., 145, 164n 布洛克
Boolean: algebra, 156-157 布尔:代数
lattices, 152, 157 格
structures, 149 结构
Bourbaki, N., 163 布尔巴基
Bradwardine, 143 布拉德沃丁
Brandt, 147, 164n, 170 勃兰特
Bresson, 149 布列森
Bunge, 159, 165n 布日

C

Calculation, 77, 81 计算
Calculus: infinitesimal, 96 微积分:无穷小
predicate, 142 谓词

Cantor, 143, 164n 康托尔
Cardinal numbers, 43, 185, 188 基数
  and ordinal numbers, 46, 71, 135 和序数
Cardinality, 153, 160 基数
Categories: 4, 170-171, 174, 184-185, 192 范畴
  abstract, 163 抽象～
  structure of, 8, 12-13. 148 ～的结构
Cauchy, 144 柯西
Causal: aspects of actions, 175-176 因果的:动作方面
  circularity, 61, 74, 80 环形
  composition, 89, 96 组合
  comprehension, 55, 168, 179 理解
  consequence, 102n, 136 结果
  explanation, 14, 52, 70, 88, 178, 180 解释
  links, 128, 136, 160, 168 联系
  laws, 144, 176-179 定律
  relations, 175 关系
  and spatial functions, 49-64 和空间函数
  systems, 14, 16 系统
Causality, 48n, 52, 74-75, 158, 176-179 因果性
  linear, 74 线性的～
  and operations, 16, 43, 49, 60-61, 84, 93, 148-149, 168 和运算
  physical, 126 物理～
  principle of, 145, 159 ～的原理
Cause and effect, 89, 101 原因和结果
Centration, 15, 22 中心化
Chance, 144 偶然
Clairaut, 146 克莱罗
Class inclusions, 15, 18, 24, 37, 85, 189 类包含
Classes, 27, 29, 148, 150, 153, 164, 169, 183, 185 类
  construction of, 148, 192 ～的建构
  equivalence, 15-16, 22-23, 27-28, 148, 150, 154-155, 157-159 等价
  of ordered pairs (definition by abstraction), 142 有序数对的～(通过抽象来定义)

and relations, 141, 181 和关系

union, 28 联合

Classifications, 3, 15, 18-19, 23, 27, 149, 151, 152, 164, 183, 190 分类

operatory grouping of, 27-28 ～的运算群集

Cognitive coordinators, 177, 180 认知协调

dependence, 178 依存

functions, 178, 180 函数

structuring, 3 结构

Collections, figural: 3, 15, 150, 161 集合，图形

Combinators, 14, 31, 172, 176-177, 179, 183, 192 组合器

and combinatory logic, 30, 189-195 和组合逻辑

Combinatory, logic, 150-151, 172, 176 组合的：逻辑

operations, 164 运算

Commutativity, 7-8 交换性

Comparisons, 74, 167-168, 184 比较

hyperordinal, 97 超序～

Compensations, 34, 50, 52, 56, 58, 61-63, 94-96, 105-107, 123-124, 129, 133, 180, 191 补偿

absolute, 134 完全～

direct or inverse, 133 直接的或逆向的～

double, 103, 125 双倍～

intensive, 107, 132-133 集中～

inverse, 102n, 124-125, 133 逆向～

qualitative, 111, 123-124, 128-129 定性的～

quantitative, 91 定量的～

reciprocal, 108-109, 121, 126, 133, 135 互反的～

Complementary subclasses, 183 互补的子类

Complements, 25-27, 130, 136, 141, 156-157, 183 补充

Compositions, 31, 37, 117, 180, 186 组合

additive, 37, 174 加(法)～

causal, 60, 89, 96 因果～

of dependences, 50, 61 依存关系的～

formation of, 4 ～的形成

functional, 60, 169 函数～

of functions,63,76-77,82,84,88,89,95,102n,141,147,174 函数的～
operatory 30,60,75,88,92,96 运算～
of pairs,5,7-13,50,58,60,174 数对的～
partial,185 部分～
progressive,32,50,62 前进～
quantitative,51 定量～
of relations,91,121,170 关系的～
Comprehension, 20,36-37,51,53,59-60,66,68,70,74-75,85,91,101,185 理解
causal,55,73,79,110, 116,168 因果～
Concrete operations,77,82,94 具体运算
Connexity,128 连通性
Conservation, 48n,57,59,63,94-95,108,176,179,180 守恒
construction of,92 ～的建构
of distances,50,58,115 距离的～
of length,51-52,56,58,191 长度的～
of liquids,86,91 液体的～
Constancy,51,130,136,142,159 恒定
Constituted functions, 16,24-25,31,47,73,75,82,96,170-171,174,181,184,186,192-195 构成化函数
of proportionality,40,46 比例关系的～
Constitution of functions,169 函数的构成
Constitutive functions, 13-14,16,24,35,39,40,73,75,95-96,170-172,174,176,181,184-185,189,192-195 构成性函数
of application,27 应用的～
qualitative or ordinal,170 定性的或序数的～
of simple application,46 简单应用的～
source of,94 ～的来源
Constructions, 95,97,115,136,152,159,167,175 建构
of classes,148 类的～
of functions,132-133,136,183,193 函数的～
operatory,167 运算～
of order,97 顺序的～
of proportionality,174 比例关系的～

Constructivity,145,194 建构性
Coordinations, 75,111,123 协调
of actions,30,88,95-96,118,168-170 动作的～
of functions,96 函数的～
of ordered pairs,186 有序数对的～
of schemes,172-174 格式的～
Coordinators,30-32,34,172,176,183,192,195n 协调器
Coproperties,65,73-74,82,151,169 共性
Correlates,27,31,63,186 互相关联
Correspondences, 18,22,34-35,46,57,101,114,136,147,167,169,171,173 对应
bicontinuous,168 双连续的～
co-univocal,22,25,29,183-184 共同单一的～
functional,19,47,95 函数的～
many to one,29,182 多对一
one to many,24,29,181,193 一对多
one to one,85,101,107,148,155,162,187 一一对应
ordinal and hyperordinal,31,193 序数的和超序的～
preoperatory,169 前运算的～
qualitative,43,57,95 定性的～
serial,40-44,84,91,187 系列～
simple,114,117,133 简单～
surjective,21 满射～
univocal,27,146-147 单一～
visual,95 可见的～
Covariations, 41,50,60,63,65,68,74,82,96,101,103,105-108,113,136-137,159,169,175,186,194 共变,协变
Crombie,A. C.,164n 克龙比
Curry,14,172 库里

D

Décalage,58,76,82,108,118,185 滞差
Decentration,15,22 去中心化
Deduction, 7,66,72,77,81,101,115,131,181 演绎
anticipatory,94 预期的～
operatory,10,94,119 运算的～

Definitions, 153,161 定义
by abstraction,142 抽象～
by kind,28,182 类别～
by usage,15,27,182 用途～
propositional,152 命题～
Dependences, 16,35,62,82,89,94-95,145,159, 167-170,173,178,180,184,191 依存关系
abstraction of,88 ～的抽象
composition of,50,61 ～的组合
functional,43,60,74,88,143,168 函数的～
Descartes,145 笛卡尔
Discourse,161 话语
Displacements,9,12,49-52,56-63,68,105,122,128,180 位移
Distance,114,116,128,133 距离

E

Epimorphisms,148 满态射
Epistemology,141-165,167 认识论
Equilibrium,140,172 平衡状态
Equivalence, 15,24,28,33-34,85,151,182,187 等价
classes,15-16,19,22-23,27-28,148,150,154-155, 157-159,163,181-182 ～类
relations,153,185-186 ～关系
Estoup-Zipf-Mandelbrot Law,190 埃斯图-齐普夫-曼德尔布罗特定律
Eular,145-146,164n 欧拉
Extension, 146,161-162,171,181 外延
and intension,13,160,170 ～和内涵
quantification of,170,185 ～的量化
Extensive quantities,48n,190 外延数量

F

Feedback,74 反馈
Feys,172 费斯
Figural collections,3,15,150 图形集合
Force,transmissions of,54,60 力的传递

Formal: constructions, 159 形式的:建构
explanation, 73 ～解释
systems, 146 ～系统
Formalization, 13, 30, 149, 162-163 形式化
Foundations of mathematics, 163-164 数学的基础
Fractions, 112-113, 135 分数
Frey, L., 150 弗雷
Functional: dependences, 30, 43, 60, 88, 170, 179-180 函数的:依存关系
laws, 75, 88, 101, 115, 126, 134, 137, 159, 177, 179 ～定律
pairs, 186, 192 ～数对
relations, 97, 107, 109, 112, 117, 121, 126, 136, 142 ～关系
schemes, 25 ～格式
Functioning, 7, 172 功能
Functions, 12, 27-28, 40, 46, 111-112, 114, 142, 144, 147, 152, 162, 167, 170, 172, 174, 177, 182 函数
of application, 30, 33 应用～
causal, 49-65, 76, 94, 168 因果～
composition of, 30, 60, 63, 76-77, 82, 84, 88-89, 93, 102n, 141, 147, 190 ～的组合
concept of, 89, 101, 117, 141 ～的概念
constituted. *See* constituted functions 构成化～ 参见构成化函数
constitutive. *See* constitutive functions 构成性～ 参见构成性函数
continuous, 144 连续～
construction of, 86 ～的建构
coordination of, 96 ～的协调
of correspondence, 19, 95 对应的～
definition of, 3, 142 ～的定义
derived, 96 衍生～
elementary, 170, 57 基本～
equivalence of, 186 ～的等价
formation (construction), 73, 95, 126, 132, 148, 159, 168-169, 194 形成(建构)
of functions, 58, 60, 90, 93, 96, 141 函数的～

inverse,56-57,96 逆向～

logico-mathematical,34,169,194 逻辑-数学～

and operations: distinctions between,160 ～和运算:二者的区别

operatory,84,142,168 运算～

oriented or ordered,4,196n 定向或有序的～

physical,94,168 物理～

qualitative,95,170 定性～

quantification of,186 ～的量化

recursive,146, 递归～

and relational groupings,184 ～和关系群集

structured,149,151 结构化～

structuring,149,151-152,164 结构性～

G

Galileo,145 伽利略

Genealogical filiation,183 家族血统

Generalizations, 19-20,22,28,73,79,81,113,127 归纳

inductive,70,72 归纳的～

metric,63 度量的～

Generalized assimilation,172 归纳同化

Generalizing conservations,59 归纳守恒

Genesis of: functions,148,159 发生:函数的

intelligence,164 智慧的～

Genetic epistemology,13,147 发生认识论

Genus and species,183,190 属和种

Geometric intuition,93 几何直觉

Gonseth,96 贡塞斯

Grant,E. ,164n 格兰特

Grize,J. B. ,13-14,31,46,96,97n,164n,167,174,179,183,187,195n 格里兹

Grouping, 13,149,185,193 群集

of classes,26,181 类的～

of classifications,27 分类的～

multiplicative,84 乘法～

operatory,25,27-28 运算～

of relations,185 关系的～

of serial correspondences,184 序列对应的～
Groupoids,149,170 广群
Guilbaud,164n,184 吉博

H

Hierarchical inclusions: as basic notion of logic,148 层级包含：作为逻辑的基本概念
and classifications,152,164 ～与分类
construction of,26-28,157-158,174. 181-182,186 ～的建构
Hierarchical: classifications,183 层级:分类
groupings,182 ～群集
relations,116 ～关系
structures,24 ～结构
Hilbert,D. and Bernays,P. ,165n 希尔伯特和伯奈斯
Hoeffding,3 霍夫丁
Hume,92,176 休谟
Hypergroup,149,162,170 超群
Hyperordinality,31,47,71,97,183,188,190 超序数

I

Identity, 7,33,75n,153,174,178,185,193 同一性
functions of,34,172 ～的函数
logical,152 逻辑的～
Inclusions, 152,169-170,185,196n 包含
class,18,24,85,183 类～
hierarchical,26-28,148,152,157-158,164,193 层级～
reversible,189 可逆～
of subclasses,27 子类的～
Individual unions (partitions),28,182 个体联合(划分)
Induction, 69-73,77,80 归纳
and deduction,66,70 ～和演绎
experimental,101,126 实验～
Inequalities,65,67,74 不相等
Inference: logical,106,117,119 推理:逻辑～
Inhelder and Piaget,29n,131n,150,158,164n,165n,195n 英海尔德和皮亚杰
Injection,148,164 内射

INRC group,188-189,196n	INRC群
Instrumental: actions,149,175-176	工具性的:动作
transitivity, 6,12,49	～传递性
Instrumentality,15,59	媒介
Intension: 146,160-162,169,171,185	内涵
and extension,13,160,170,193	～和外延
Intensive: compensation,107,132-133	内涵的:补偿
covariation,136	～共变
quantification,117,189	～量化
quantities,46,48n,185	～数量
seriations,134	～序列化
variations,136	～变异
Interaction: of functions and operations,181	相互作用:函数和运算的
notion of,74	～的概念
Interdependences,62-63,128,180-181,191	相互依存关系
Interiorization of actions,170	动作的内化
Intermediaries, 50,53-54	媒介
causal,62-63	因果的～
Intersection,141,160	交集
Invariants, 169,175-176	不变量
transformational,155	转换的～
Inverses, 136,159	反演
functional,96	函数的～
Inverse: compensation,202n,124-125,133	逆向的:补偿
functions,56-57	～函数
operations,56,183-184,188	～运算
proportionality,126,136	～比例关系
relationships,130,134	～关系
Inversions, 12,33,48n,87	反演
of actions,62	动作的～
Irreversibility,14,183,189	不可逆性
Isomorphisms,39,85,87-88,91,177,180-181,184	同构
J	
Johannot,L. ,82,83n	若阿诺

K

Kant,185 康德
Kowalevska,185 科瓦莱夫斯卡

L

Language, 178 语言
  of functions,179 函数的～
Lattices, 152,156,158 格
  Boolean,152,157 布尔～
  structure,157 结构
Lawful prediction,86 合法预测
Laws, 96,130,137,178,185 定律
  causal,144 因果～
  of composition,174 组合的～
  construction of,129 ～的建构
  of coordination of actions,75 动作的协调的～
  of covariation,108 共变的～
  functional,75,88,101,115,126,134,131,159 函数的～
  induction of,66,70 ～的归纳
  physical,158,168 物理～
  of progression,107,115,119,129,133 前进～
  search for,34,175 探索～
Length: conservation of,51,58 长度:的守恒
  constancy of,51 ～的恒定
  function of,111-112 ～的函数
  ordinal and metric,128 序数的和度量的～
  unit of,128,135 ～的单位
Leibnitz,143 莱布尼茨
Links: causal,128,136,160,168 联系:因果的
Liquids: conservation of,86,91 液体:的守恒
Logic: 146,148-149,192 逻辑:
  abstract,145 抽象～
  combinatory,30,48n,150-151 组合～
  of operations,193 运算的～
  propositional,149 命题～

Logical implication: aspects of proportionality,157 逻辑的蕴涵：比例关系的方面
deduction,119 演绎
identity,152 同一性
inference,106,117,119 推理
proportions,159 比例
relations of,105 ～的关系
Logico-mathematical structures,96-97,144,169 逻辑-数学结构

M

MacLane,4,13,165n,170,192 麦克莱恩
Mathematics, 143 数学
foundations of,164 ～的基础
Measurement,115-116,118-119 测量(衡量)
Menger,143,147,162,164n,170 门格
Metalanguage,145,179 元语言
Metric(s): 44-47,63,120,180 度量
and ordinal lengths,128 ～和序数长度
proportions,47,188 ～比例
quantification of,48n,94-95,133,189 ～的量化
Meyerson,E. ,145 梅耶森
Meylan-Backs,A. ,48n,64n 梅兰-巴克斯
Milhaud,G. ,164n 米尧
Mittelstaedt,P. ,165n 米特尔施泰特
Mobility,82 移动能力
Morphisms,47,86,147-148,161,169 态射
Multiplication,130,159-160 乘法
of relations,135 ～关系
Multiplicative: matrices,37,187 乘法的:矩阵
groupings,84 ～群集

N

Natural numbers,149,153,160 自然数
Necessity,69,72-73,75,168 必然性
Newton,144-145,164n 牛顿
Non-coordination,78,122 非协调

of dimensions,88 维度的～
Numbers：natural,149,153,160 自然数
construction of,46 ～的建构
ordinal and cardinal,46 序数的和基数的～
Numerical：correspondence,46 数的对应
differentiation,63 差异
quantification of intervals,47 间隔的量化
sets,conservation of,95 ～的集合,守恒

O

Object-language,145 客体-语言
Objective dependences,184 客观的依存关系
Operations，3,16,29,146-148,162,164,167,174,176,180,183,185 运算
arithmetic,145 算术～
attributed to objects,167,176,179-180,194 归因于客体
and causality,61 ～和因果性
combinatory,164 组合～
concrete,77,82,93-94 具体～
deductive,168-169 演绎～
and functions,160,194 ～和函数
hypothetico-deductive,82,168-169 假设一演绎的～
inverse,56 逆向～
logico-mathematical,97 逻辑-数学～
propositional,94 命题～
relational,141 相关的～
reversible,169 可逆的～
second order,190 第二顺序的～
Operators,142,150-151,154,162,164,183 运算器
Operatory：and causal aspects of functions,60,84,93,171 函数的运算方面和因果方面
compositions,30,60,75,88,92,96,180,191 组合
construction,167,194 建构
deduction,94 演绎
evolution,171 演化
functions,168 函数

integration,73 生成
mechanisms,77 机制
reasoning,59 推理
reversibility,62-63,94 可逆性
seriation,63 序列化
structures,89,95,169,174,181,184 结构
system,75,82,182 系统
transformations,82 转换
Order, 97,157,159,169-170 顺序
construction of,97 ～的建构
primacy of,37,192 顺序的首要地位
qualitative,160 定性的～
Ordered: dependences,170 有序的依存关系
relations,128,136,189 关系
series,119 序列
Ordered pairs, 3-4,37,141,143,146,153,161-162,164,169,174,184,186 有序数对
construction of,10 ～的建构
definition of,142,152-153 ～的定义
Ordinal: addition,171,187 序数的加法
and cardinal numbers, 46,71,128,135 ～和基数
and hyperordinal solutions,72 ～和超序解法
level,177 水平
numbers,43 数
Ordinality,44,47,57,153,160,170 序数(性)
Oresme,143 奥雷姆
Orsini. F. ,48n 奥尔西尼

P

Paris, 28 数对
composition of,7-13,50,58,62 ～的组合
ordered. *See* Ordered pairs uncoordinated,51 有序～ 参见未协调的有序数对
Papert,S. ,13,97n,165n,196n S. 巴贝尔
Papert-Christophides,A. ,64n S. 巴贝尔-克里斯托弗
Partitions,28,83n,150,152-156,159,164,182 划分

Pierce, 163 皮尔斯
Pierce, C. S., 162, 165n 皮尔斯
Perception, 79, 102n, 119, 178 知觉
Permutator, 14, 48n, 172 交换器
Physical: coordinators, 178, 180 物理协调
  dependences, 179-180 依存关系
  functions, 168 函数
  laws, 158, 168 定律
  space, 169 空间
Physics: mathematical, 180 物理:数学
  quantum, 156 量子～
Piaget, 14n, 75n, 149, 151-154, 157, 159-160, 162-163, 165n, 195n and Szeminska, 14n, 48n 皮亚杰和斯泽明斯卡
Poincaré, H., 72, 144, 164n 庞加莱
Porphyry, 150 波菲利
Prediction, 55, 68, 85-86, 103, 105, 118 预测
Prefunctions, 169, 195n 前函数
Preoperatory: actions, 168 前运算的:动作
  functions, 182 ～函数
  level, 7, 170, 176, 179, 192-193, 195 ～水平
  relations, 94 ～关系
  structures, 12 ～结构
  thought, general characteristics of, 192 ～思维,的一般特征
Preproportionality, 31, 45-47, 155-158, 186-188 前比例关系
  notion of, 154 ～的概念
  qualitative, 89 定性的～
Proactive orientation, 40 主动的方向
Probability functions, 157 概率函数
Progression: of differences, 118 前进:差异的
  law of, 107, 115, 119, 129-130, 133-134, 137 ～的定律
  serial, 119 序列～
Progressive: compositions, 50 前进的:组合
  quantification, 174, 181 量化
Proportional relations, 110-112, 115, 117, 134, 136-137 比例关系
Proportional relationships, 101, 113, 118, 120, 135 比例关系

Proportionality, 34,38,41,47,61,63,69,109-110, 114-115,136-137,143-144,181,186,191 比例(关系)
function of,46 ～的函数
hyperordinal,45,189 超序的～
inverse,126 逆向的～
logical aspects of,157 ～的逻辑方面
Proportions, 31,35-36,48n,112,143,155-156,190 比例
construction of,60 ～的建构
logical,154-155,159 逻辑的～
numerical or quantified,45,189 数的或量化的～
qualitative or ordinal,43-44,188 定性的或顺序的～
system of,38,63,194 ～的系统
Propositional logic: 149 命题逻辑
definition,152 定义

Q

Qualitative: compensations,111,123-124,128-129,133 定性的:补偿
coproperties,186 共性
correspondences,43,95 对应
functions,95 函数
functional relation,136 函数关系
order,44,160,188 顺序
relations,121 关系
Quantification, 43,95,119,123,133,136,171,175, 177,184,189,193 量化
of covariations,180 共变的～
of extension,170 外延的～
of functions,186 函数的～
of inclusions,183 包含的～
intensive,116-117 内涵的～
metric,94-95,133,185 度量的～
numerical,47,188 数的～
progressive,180 前进的～
of relationships,121 关系的～
Quantitative: compensations,91 定量的;补偿
composition,51 组合

ordinal correspondence,57 有序对应
Quaternality group,190 四元群
Quaternions,63 四元法
Quotient-set,29,148,152,181 商集

R

Reciprocals,8,117,184,188 互反
Reciprocal: assimilation,172 互相:同化
compensations,108,121,126,133 补偿
solutions,123 解决办法
Recognitions,28 认知
Recognitory assimilation,172 认知的同化
Recursive: functions,146 递归的:函数
generation of sets,146 集合的生成
reasoning,12 推理
Reflective abstraction. *See* abstraction,reflexive 反省抽象。参见抽象
Reflexivity,141,151,153 反身性
Regularities,30-33,66,70,102,108,168,172,195n 调节
Relations, 74,120,132-133,135,141,142,147-148,152,154-155,162,164,167,169,177 关系
asymmetric,84,159 非对称的～
causal,101,129 因果的～
and classes,141 ～和类
composition of,92,121,170 ～的组合
of compensation,102n,124 补偿的～
of connexity,128 凸面的～
elementary,133,162 基本～
equivalence,152-153 等价
establishment of,101,119 ～的建立
functional,97,103,107,109,112,117,121,126,136 函数～
hierarchical,116 层级～
order,111,128,136 顺序
preoperatory,94 前运算～
proportional,134,136-137 比例～
of relations,30-31 关系的～
Relational: groupings,184 关系的:群集

operations, 14	运算
Relationships, 89, 130, 134, 136-137	关系
comprehension of, 116	～的理解
functional, 142	函数～
inverse, 130, 134	逆向～
proportional, 135	比例～
quantification of, 121	关系的～
Reproductive assimilation, 171	繁殖同化
Retroaction, 40, 151	反作用
Reversibility, 7, 13, 29, 158, 183-185, 193	可逆性
operatory, 62-63, 94	运算的～
progress of, 40	～的前进
Reversible: correspondences, 190	可逆的:对应
inclusions, 185, 189	包含
operations, 40, 169, 184	运算
transformations, 180	转换
Rignano, 82	里格纳诺
S	
Schemes: accommodation of, 39	格式
of actions. *See* actions, schemes of	动作～。参见动作格式
of assimilation, 39, 95, 173, 175	同化～
causal and operatory, 49	因果的和运算的～
empirical, 128	经验～
Schmid-Kitzikis, E., 29n, 97n	施密德-克兹科斯
Seriation, 107, 109-112, 129, 132, 151, 185	序列化
double, 107	双重～
operatory, 63	运算的～
Set: operator, 142	集合:运算器
of subsets, 152	子集的～
theory, 146, 164	理论
Sets: recursive generation of, 146	集合:的递归生成
Similarities and differences, 15-19, 151	相似性和差异
Sinclair, H., 48n	辛克莱
Source-sets, 162, 167, 181	来源集合
Spearman, 31, 63, 186	斯皮尔曼

Structures, 152,155-156 结构
assimilation of,81 ～的同化
of functions,12,91 函数的～
logico-mathematical,96,149,157,169 逻辑-数学的～
operatory,12,88,95,169 运算～
transport of,47,86 ～的传输
Structured: functions,149,151 结构化:函数
wholes,96,169,180 整体
Structuring functions,149,151-152,154,164 结构性函数
Subclasses,18,26-27,29,181,185 子类
Substitution,3-12,33 替代
Suitability (*convenance*),15-24,27-28 适用性
Suppes,47,185,188 苏佩斯
Surjection,19,22,128,164 满射
Symmetry,33,141,151,153 对称
Systems,3,63,75,82,114,146,169 系统
Szeminska,A. ,75n,83n 斯泽明斯卡

T

Target-sets,162,161,181 目标集合
Theory: of categories,148 理论:范畴的
of classes and relations,141 类和关系的～
epistemological,167 认识论的～
of functions,14 函数的～
of sets,146,164 集合的～
Totalities,62,161,185,190 总数
Transfer,of elements,65-75 passim,79-81 转移,元素的
Transformations,38,46,74,82,102-103,105-108,132,154-157,168-169,175-179,188 转换
Transitivity, 50,59,62,84,141,151,153,180,185,187 传递
instrumental,6,12,49 工具的～
restricted,170 限制的～
Transport of structures,47,87 结构的传输
Transpositions,32,173 转移

U

Union (operation of),141,151-152,158,169-170,177, 联合(运算的)

182-183,185
Units, 45,128,135,162 单元
Univocal to the right, 14,40,141,146-147,152,167, 174,181-184,192 单一向右

V

Van den Bogaert,N. ,184 范登博加尔特
Variations, 60,91,93,103,106,114,128,133,136, 145-146,158-159 变异,变化
continuous,107,126,136-137 连续～
functional,50,101,133 函数的～
intensive,136 内涵的～
progression in,40 ～的进步
system of,114 ～的系统
of variations,38,93,96-97,186,190-194 ～的变异
Vinh-Bang,57,102,108,190,195n,196n 万·邦

W

Wallon,3 瓦隆
Weber's law,69 韦伯定律
Weierstrass,144 维尔斯特拉斯

文献总汇

关于认识论、逻辑、方法论、科学哲学、科学社会学、
知识社会学以及社会与行为科学的数学方法等的著作

1. J. M. Bocheński, *A Précis of Mathematical Logic*, 1959, Ⅹ+100 pp.

2. P. L. Guiraud, *Problémes et méthodes de la statistique linguistique*, 1960, Ⅵ+146 pp.

3. Hans Freudenthal (ed.), *The Concept and the Role of the Model in Mathematics and Natural and Social Sciences*, *Proceedings of a Colloquium held at Utrecht*, *The Netherlands*, *January* 1960. 1961, Ⅵ+194 pp.

4. Evert W. Beth, *Formal Methods*, *An Introduction to Symbolic Logic and the Study of Effective Operations in Arithmetic and Logic*, 1962, ⅩⅣ+170 pp.

5. B. H. Kazemier and D. Vuysje (eds.), *Logic and Language*, *Studies Dedicated to Professor Rudolf Carnap on the Occasion of His Seventieth Birthday*, 1962, Ⅵ+256 pp.

6. Marx W. Wartofsky (ed.), *Proceedings of the Boston Colloquium for the Philosophy of Science*, 1961-1962, Boston Studies in the philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume Ⅰ. 1973, Ⅷ+212 pp.

7. A. A. Zinov'ev, *Philosophical Problems of Many-Valued Logic*, 1963, ⅩⅣ+155 pp.

8. Georges Gurvitch, *The Spectrum of Social Time*, 1964, XXVI + 152 pp.

9. Paul Lorenzen, *Formal Logic*, 1965, VIII + 123 pp.

10. Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky (eds.), *In Honor of Philipp Frank*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. and Marx W. Wartofsky), Volume II. 1965, XXXIV + 475 pp.

11. Evert W. Beth, *Mathematical Thought*, *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, 1965, XII + 208 pp.

12. Evert W. Beth and Jean Piaget, *Mathematical Epistemology and Psychology*, 1966, XII + 326 pp.

13. Guido Küng, *Ontology and the Logistic Analysis of Language*, *An Enquiry into the Contemporary Views on Universals*, 1967, XI + 210 pp.

14. Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky (eds.), *Proceedings of the Boston Colloquium for the Philosophy of Science* 1964 — 1966, *in Memory of Norwood Russell Hanson*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume III. 1967, XLIX 489 pp.

15. C. D. Broad, *Induction*, *Probability*, *and Causation*, Selected Papers 1968, XI + 296 pp.

16. Günthet Patzig, *Aristotle's Theory of the Syllogism*, *A Logical-Philosophical Study of Book A of the Prior Analytics*, 1968, XVII + 215 pp.

17. Nicholas Rescher, *Topics in Philosophical Logic*, 1968, XIV + 347 pp.

18. Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky (eds.), *Proceedings of the Boston Colloquium for the Philosophy of Science* 1966-1968, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume IV. 1969, VIII + 537 pp.

19. Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky (eds.), *Proceedings of the Boston Colloquium for the Philosophy of Science* 1966-1968, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume V. 1969, VIII 482 pp.

20. J. W. Davis, D. J. Hockney and W. K. Wilson (eds.), *Philosophical Logic*, 1969, VIII + 277 pp.

21. D. Davidson and J. Hintikka (eds.), *Words and Objections*: *Essays on the Work of W. V. Quine*, 1969, VIII + 366 pp.

22. Patrick Suppes, *Studies in the Methodology and Foundations of Science*, *Selected Papers from* 1911 *to* 1969, 1969, XII + 473 pp.

23. Jaakko Hintikka, *Models for Modalities*, *Selected Essays*, 1969, IX + 220

pp.

24. Nicholas Rescher et al. (eds.), *Essays in Honor of Carl G. Hempel, A Tribute on the Occasion of His Sixty-Fifth Birthday*, 1969, Ⅶ+272 pp.

25. P. V. Tavanec (ed.), *Problems of the Logic of Scientific Knowledge*, 1969, Ⅻ+429 pp.

26. Marshall Swain (ed.), *Induction, Acceptance and Rational Belief*, 1970, Ⅶ +232 pp.

27. Robert S. Cohen and Raymond J. Šeeger (eds.), *Ernst Mach: Physicist and Philosopher*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume Ⅵ, 1970, +295 pp.

28. Jaakko Hintikka and Patrick Suppes, *Information and Inference*, 1970, Ⅹ +336 pp.

29. Karel Lambert. *Philosophical Problems in Logic, Some Recent Developments*, 1970, Ⅶ+176 pp.

30. Rolf A. Eberle, *Nominalistic Systems*, 1970, Ⅸ+217 pp.

31. Paul Weingartner and Gerhard Zecha (eds.), *Induction, Physics, and Ethics: Proceedings and Discussions of the 1968 Salzburg Colloquium in the Philosophy of Science*, 1970, Ⅹ+382 pp.

32. Evert W. Beth, *Aspects of Modern Logic*, 1970, Ⅺ+176 pp.

33. Risto Hilpinen (ed.), *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*, 1971, Ⅶ+182 pp.

34. Jean-Louis Krivine, *Introduction to Axiomatic Set Theory*, 1971, Ⅶ+98 pp.

35. Joseph D. Sneed, *The Logical Structure of Mathematical Physics*, 1971, ⅩⅤ+311 pp.

36. Carl R. Kordig, *The Justification of Scientific Change*, 1971, ⅩⅣ+119 pp.

37. Milic Capek, *Bergson and Modern Physics*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume Ⅶ 1971, ⅩⅤ +414 pp.

38. Norwood Russell Hanson, *What I Do Not Believe, and Other Essays* (ed. by Stephen Toulmin and Harry Woolf), 1971, Ⅻ 390 pp.

39. Roger C. Buck and Robert S. Cohen (eds.), PSA 1970. *In Memory Of Rudolf Carnap*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume Ⅷ, 1971, LⅩⅥ+615 pp, Also available as paperback.

40. Donald Davidson and Gilbert Harman (eds.), *Semantics of Natural Language*, 1972, Ⅹ+769 pp. Also available as paperback.

41. Yehoshua Bar-Hillel (ed.), *Pragmatics of Natural Languages*, 1971, Ⅶ+231 pp.

42. Sören Stenlund, *Combinators, λ-Terms and Proof Theory*, 1972, 184 pp.

43. Martin Strauss, *Modern Physics and Its Philosophy, Selected Papers in the Logic, History, and Philosophy of Science*, 1972, Ⅹ+297 pp.

44. Mario Bunge, *Method, Model and Matter*, 1973, Ⅶ+196 pp.

45. Mario Bunge, *Philosophy of Physics*, 1973, Ⅸ+248 pp.

46. A. A. Zinov'ev, *Foundations of the Logical Theory of Scientific Knowledge (Complex Logic)*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume Ⅸ. Revised and enlarged English edition with an appendix, by G. A. Smirnov, E. A. Sidorenka, A. M. Fedina and L. A. Bobrova, 1973, ⅩⅫ+301 pp. Also available as paperback.

47. Ladislav Tondl, *Scientific Procedures*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume Ⅹ, 1973, Ⅻ+268 pp. Also available as paperback.

48. Norwood Russell Hanson, *Constellations and Conjectures* (ed. by Willard C. Humphreys, Jr.), 1973, Ⅹ+282 pp.

49. K. J. J. Hintikka, J. M. E. Moravcsik and P. Suppes (eds.), *Approaches to Natural Language, Proceedings of the* 1970 *Stanford Workshop on Grammar Semantics*, 1973, Ⅷ 526 pp. Also available as paperback.

50. Mario Bunge (ed.), *Exact Philosophy-Problems, Tools and Goals*, 1973, Ⅹ+214 pp.

51. Radu J. Bogdan and Ilkka Niiniluoto (eds.), *Logic, Language and Probability, A Selection of Papers Contributed to Sections* Ⅳ, Ⅵ *and* Ⅺ *of the Fourth International Congress for Logic, Methodology, and Philosophy of Science, Bucharest, September* 1971, 1973, Ⅹ+323 pp.

52. Glenn Pearce and Patrick Maynard (eds.), *Conceptual Chance*, 1973, Ⅻ+282 pp.

53. Ilkka Niiniluoto and Raimo Tuomela, *Theoretical Concepts and Hypothetieo-Inductive Inference*, 1973, Ⅶ+264 pp.

54. Roland Fraissé, *Course of Mathematical Logic-Volume* 1: *Relation and Logical Formula*, 1973, ⅩⅥ+186 pp. Also available as paperback.

55. Adolf Grünbaum, *Philosophical Problems of Space and Time*, Second,

enlarged edition, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XII, 1973, XXIII+884 pp. Also available as paperback.

56. Patrick Suppes (ed.), *Space, Time and Geometry*, 1973, XI+424 pp.

57. Hans Kelsen, *Essays in Legal and Moral Philosophy*, selected and introduced by Ota Weinberger, 1973, XXVIII+300 pp.

58. R. J. Seeger and Robert S. Cohen (eds.), *Philosophical Foundations of Science, Proceedings of an AAAS Program*, 1969, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XI, 1974, X+545 pp. Also available as paperback.

59. Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky (eds.), *Logical and Epistemological Studies in Contemporary Physics*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XIII, 1973, VIII+462 pp. Also available as paperback.

60. Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky (eds.), *Methodological and Historical Essays in the Natural and Social Sciences, Proceedings of the Boston Colloquium for the Philosophy of Science*, 1969-1972, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XIV, 1974, VIII+405 pp. Also available as paperback.

61. Robert S. Cohen, J. J. Stachel and Marx W. Wartofsky (eds.), *For Dirk Struik, Scientific, Historical and Political Essays in Honor of Dirk J. Struik*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XV, 1974, XXVII+652 pp. Also available as paperback.

62. Kazimierz Ajdukiewiez, *Pragmatic Logic*, transl. from the Polish by Olgierd Wojtasiewicz, 1974, XV+460 pp.

63. Sören Stenlund (ed.), *Logical Theory and Semantic Analysis. Essays Dedicated to Stig Kanger on His Fiftieth Birthday*, 1974, V+217 pp.

64. Kenneth F. Schaffner and Robert S. Cohen (eds.), *Proceedings of the* 1972 *Biennial Meeting. Philosophy of Science Association*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XX, 1974, IX+444 pp. Also available as paperback.

65. Henry E. Kyburg, Jr., *The Logical Foundations of Statistical Inference*, 1974, IX+421 pp.

66. Marjorie Grene, *The Understanding of Nature: Essays in the Philosophy of Biology*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and

Marx W. Wartofsky), Volume XXIII, 1974, XII + 360 pp. Also available as paperback.

67. Jan M. Broekman, *Structuralism: Moscow, Prague, Paris*, 1974, IX +117 pp.

68. Norman Geschwind, *Selected Papers on Language and the Brain*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XVI, 1974, XII +549 pp. Also available as paperback.

69. Roland Fraissé, *Course of Mathematical Logic-Volume 2: Model Theory*, 1974, XIX +192 pp.

70. Andrzej Grzegorczyk, *An Outline of Mathematical Logic, Fundamental Results and Notions Explained with All Details*, 1974, X +596 pp.

71. Franz von Kutschera, *Philosophy of Language*, 1975, VII +305 pp.

72. Juha Manninen and Raimo Tuomela (eds.), *Essays on Explanation and Understanding, Studies in the Foundations Of Humanities and Social Sciences*, 1976, VII +440 pp.

73. Jaakko Hintikka (ed.), Rudolf Carnap, *Logical Empiricist, Materials and Perspectives*, 1975, LXVIII +400 pp.

74. Milic Capek (ed.), *The Concepts of Space and Time, Their Structure and Their Development*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XXII, 1976, LVI +570 pp. Also available as paperback.

75. Jaakko Hintikka and Unto Remes, *The Method of Analysis, Its Geometrical Origin and Its General Significance*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XXV, 1974, XVIII +144 pp. Also available as paperback.

76. John Emery Murdoch and Edith Dudley Sylla, *The Cultural Context of Medieval Learning, Proceedings of the First International Colloquium on Philosophy, Science, and Theology in the Middle Ages-September* 1973, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XXVI, 1975, X +566 pp. Also available as paperback.

77. Stefan Amsterdamski, *Between Experience and Metaphysics, Philosophical Problems of the Evolution of Science*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wattofsky), Volume XXXV, 1975, XVIII +193 pp. Also available as paperback.

78. Patrick Suppes (ed.), *Logic and Probability in Quantum Mechanics*, 1976,

XV +541 pp.

79. H. von Helmholtz, *Epistemological Writings*. (A New Selection Based upon the 1921 Volume edited by Paul Hertz and Moritz Schlick, Newly Translated and Edited by R. S. Cohen and Y. Elkana,) Boston Studies in the Philosophy Of Science, Volume XXXVII, 1977 (forthcoming).

80. Joseph Agassi, *Science in Flux*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XXVIII, 1975, XXVI +553 pp. Also available as paperback.

81. Sandra G. Harding (ed.), *Can Theories Be Refuted? Essays on the Duhem-Quine Thesis*, 1976, XXI +318 pp. Also available as paperback.

82. Stefan Nowak, *Methodology of Sociological Research: Geneal Problems*, 1977, XVIII +504 pp. (forthcoming).

83. Jean Piaget, Jean-Blaise Grize, Alina Szeminska and Vinh Bang, *Epistemology and Psychology of Functions*, 1977 (forthcoming).

84. Marjorie Grene and Everett Mendelsohn (eds.), *Topics in the Philosophy of Biology*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XXVII, 1976, XIII + 454 pp. Also available as paperback.

85. E. Fischbein, *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*, 1975, XIII +204 pp.

86. Ernest W. Adams, *The Logic of Conditionals, An Application of Probability to Deductive Logic*, 1975, XIII +156 pp.

87. Marian Przeiecki and Ryszard Wöjcicki (eds.), *Twenty-Five Years of Logical Methodology in Poland*, 1977, VIII +803 pp. (forthcoming).

88. J. Topolski, *The Methodology of History*, 1976, X +673 pp.

89. A. Rasher (ed.), *Language in Focus: Foundations, Methods and Systems. Essays Dedicated to Yehoshua Bar-Hillel*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XLIII, 1976, XXVIII +679 pp. Also available as paperback.

90. Jaakko Hintikka, *The Intentions of Intentionality and Other New Models for Modalities*, 1975, XVIII +262 pp. Also available as paperback.

91. Wolfgang Stegmüller, *Collected Papers on Epistemology, Philosophy of Science and History of Philosophy*, 2 Volumes, 1977 (forthcoming).

92. Dov M. Gabbay, *Investigations in Modal and Tense Logics with Applications to Problems in Philosophy and Linguistics*, 1976, XI +306 pp.

93. Radu J. Bogdan, *Local Induction*, 1976, XIV +340 pp.

94. Stefan Nowak, *Understanding ard Prediction: Essays in the Methodology of Social and Behavioral Theories*, 1976, XIX +482 pp.

95. Peter Mittelstaedt, *Philosophical Problems of Modem Physics*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XVIII, 1976, X +211 pp. Also available as paperback.

96. Gerald Holton and William Blanpied (eds.), *Science and Its Public: The Changing Relationship*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XXXIII, 1976, XXV + 289 pp. Also available as paperback.

97. Myles Brand and Douglas Walton (eds.), *Action Theory*, *Proceedings of the Winnipeg Conference on Human Action, Held at Winnipeg, Manitoba, Canada*, 9 —11 *May* 1975, 1976, VI +345 pp.

98. Risto Hilpinen, *Knowledge and Rational Belief*, 1978 (forthcoming).

99. R. S. Cohen, P. K. Feyerabend and M. W. Wartofsky (eds.), *Essays in Memory of Imre Lakatos*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XXXIX, 1976, XI + 762 pp. Also available as paperback.

100. R. S. Cohen and J. Stachel (eds.), *Leon Rosenfeld, Selected Papers*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XXI, 1977 (forthcoming).

101. R. S. Cohen, C. A. Hooker, A. C. Michalos and J. W. van Evra (eds.), PSA 1974: *Proceedings of the* 1974 *Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume XXXII, 1976, XIII + 734 pp. Also available as paperback.

102. Yehuda Fried and Joseph Agassi, *Paranoia: A Study in Diagnosis*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume L, 1976, XV +212 pp. Also available as paperback.

103. Marian Przeiecki, Klemens Szaniawski and Ryszard Wöjcicki (eds.), *Formal Methods in the Methodology of Empirical Sciences*, 1976, 455 pp.

104. John M. Vickers, *Belief and Probability*, 1976, VIII +202 pp.

105. Kurt H. Wolff, *Surrender and Catch: Experience and Inquiry Today*. Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume LI, 1976, XII +410 pp. Also available as paperback.

106. Karel Kosik, *Dialectics of the Concrete*, Boston Studies in the Philosophy Of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume LII, 1976, VIII+158 pp. Also available as paperback.

107. Nelson Goodman, *The Structure of Appearance*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume LIII, 1977 (forthcoming).

108. Jerzy Giedymin (ed.), *Kazimierz Aidukiewic: Scientific World Perspective and Other Essays*, 1931—1963, 1977 (forthcoming).

109. Robert L. Causey, *Unity of Science*, 1977, VIII+185 pp.

110. Richard Grandy. *Advanced Logic for Applications*, 1977 (forthcoming).

111. Robert P. McArthur, *Tense Logic*, 1976, VII+84 pp.

112. Lars Lindahl, *Position and Change: A Study in Law and Logic*, 1977, IX +299 pp.

113. Raimo Tuomela, *Dispositions*, 1977 (forthcoming).

114. Herbert A. Simon, *Models of Discovery and Other Topics in the Methods of Science*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume LIV, 1977 (forthcoming).

115. Roger D. Rosenkrantz, *Inference, Method and Decision*, 1977 (forthcoming).

16. Raimo Tuomela, *Human Action and Its Explanation, A Study on the Philosophical Foundations of Psychology*, 1977 (forthcoming).

117. Morris Lazerowitz, *The Language of Philosophy*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume LV, 1977 (forthcoming).

118. Tran Duc Thao, *Origins of Language and Consciousness*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume LVI, 1977 (forthcoming).

119. Jerzy Pelc, *Polish Semiotic Studies*, 1894-1969, 1977 (forthcoming).

120. Ingmar Pörn, *Action Theory and Social Science, Some Formal Models*, 1977 (forthcoming).

121. Joseph Margolis, *Persons and Minds*, Boston Studies in the Philosophy of Science (ed. by Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky), Volume LVII, 1977 (forthcoming).

历史文献

关于逻辑史与哲学史的论文和研究

1. M. T. Beonio-Brocchieri Fumagalli, *The Logic of Abelard*, Translated from the Italian, 1969, Ⅸ+101 pp.

2. Gottfried Wilhelm Leibniz, *Philosophical Papers and Letters*, A selection translated and edited, with an introduction, by Leroy E. Loemker, 1969, Ⅻ+736 pp.

3. Ernst Mally, *Logische Schriften*, ed. by Karl Wolf and Paul Weingartner, 1971, Ⅹ+340 pp.

4. Lewis White Beck (ed.), Proceedings of the Third International Kant Congress, 1972, Ⅺ+718 pp.

5. Bernard Bolzano, *Theory of Science*, ed. by Jan Berg, 1973, XV+398 pp.

6. J. M. E. Moravcsik (ed.), *Patterns in Plato's Thought*, *Papers Arising Out of the* 1971 *West Coast Greek Philosophy Conference*, 1973, Ⅷ+212 pp.

7. Nabil Shehaby, *The Propositional Logic Of Avicenna*: *A Translation from al-Shifa*: *al-Qiyâs*, with Introduction, Commentary and Glossary, 1973, XIII+296 pp.

8. Desmond Paul Henry, *Commentary on De Grammatico*: *The Historical-Logical Dimensions of a Dialogue of St. Anselm's*, 1974, Ⅸ+345 pp.

9. John Corcoran, *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*, 1974, Ⅹ+208 pp.

10. E. M. Barth, *Logic of the Articles in Traditional Philosophy*, 1974, XXVII+533 pp.

11. Jaakko Hintikka, *Knowledge and the Known*, Historical Perspectives in Epistemology. 1974, Ⅻ + 243 pp.

12. E. J. Ashworth, Language and Logic in the Post-Medieval Period, 1974, XIII + 304 pp.

13. Aristotle, *The Nicomachean Ethics*. Translated with Commentaries and Glossary by Hypocrates G. Apostle, 1975, XXI + 372 pp.

14. R. M. Dancy, *Sense and Contradiction*: *A Study in Aristotle*, 1975, Ⅻ + 184 pp.

I5. Wilbur Richard Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements*, *A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*, 1975, Ⅸ + 374 pp.

16. Augustine, *De Dialectica*, Translated with Introduction and Notes by B. Darrell Jackson, 1975, Ⅺ + pp.

公理方法和运算方法

〔瑞士〕让·皮亚杰　著
朱倩兰　译
蒋　柯　审校

公理方法和运算方法

Méthode Axiomatique et Méthode Opérationnelle

作　者　Jean Piaget

原载于 *Synthese*, 1955, 10(1), pp. 23-43.

朱倩兰　译自法文
蒋　柯　审校

内容提要

公理是命题系统。运算在心理学层面上由活动构成，反过来又将活动内化为思维。从感知-运动活动到具体运算，从具体运算到命题间运算或形式逻辑运算，我们在心理学层面上见证了四个阶段的连续建构，直至达成最终的平衡形式。

至于整体运算结构和思维心理法则之间的关系，则牵涉到运算的可逆性及其严密（逆向）形式和互反形式。逆向形式内在于群，互反形式内在于网格。而“群集”的结构（包括类别和关系的基本群）作为半完成的形式先于群与网格，且与命题结构同构。

最终我们借由从心理学到公理研究的过渡，对公理方法和运算方法做出了调和，条件就是接纳历史学的、心理学的真值。运算方法在心理学和公理研究之间扮演了调和者的角色，这一调和过程正是发生认识论所期许的模式。

朱倩兰

内容提要

[illegible]

[illegible]

[illegible]

公理方法和运算方法①

让·皮亚杰
(日内瓦,巴黎)

以下我们将基于三种范畴,对公理方法和运算方法做一番研究:首先是心理学角度,因为上述两种出于逻辑学目的,即规范目的得以运用的方法参与了思维表达,即心理学事实的建构;继而是心理学和逻辑学两种学科关系的角度,这是由于运算在上述两种学科之间建立了联系点;最后是认识论角度,因为同样的问题在一般知识领域同样显著。

I 心理学角度

从心理学角度来看,公理是一套命题系统,即言语思维(或依附于符码系统的意义)系统。在这里无须再次回顾我们在"国际符号学会议"上提出的议题:言语思维实际上是在交流活动中形成的,也就是说,命题(以及从一些命题到另一些命题的证明过程)首先是一种作用于他者(autrui)的活动,激发他者形成一套对应的思维系统,通过双向对应的方式,这套系统一方面构成了某种理论期待,另一方面,也满足了其创造者的构想。

与公理相反,运算在心理学层面上由一般性活动构成,这些活动不仅作用于他者,还首先作用于活动的对象本身,无论这些对象是物质实体,还是任意的符号性系统。绝大多数运算不会止于物质性活动(诸如,将一组实际对象纳入一个集合,或者将两个物理量叠加以进行比较测量,等等)。相反,运算能自行内化为心理活动,进而构成思维,同时保留自身作为有效行动的特征:这类活动的特性被简单地勾勒出来,针对符号化对象,同时保留了物质性活动的全部心理学特性。因而我们认为,马赫(Mach)、里根纳诺(Rignano)和戈布洛(Goblot)等人的观点"运算是'经验的'"或"运算是心理层面进行的活动",即使不是错误的,至少也是有歧义的(équivoque):将符号化的两个对象 A 和 A' 用一个类别 B 组合在一起,这一心理学层面上的活动和在物质层面上将两个物理对象纳入同一集合的活动并无两样,唯一的区别只在于前者不涉及外部动作,始终保持着内

① 本文中出现的字母 O 均表示空集∅。——译者注

化的形式，这是由于该活动是针对相关的符号化对象所做的加工，而不涉及物理学意义上的既有事物。

不过，运算也并非简单的内化活动，这是由于单凭某一种内化活动无法构成运算。此外所有运算都包含两个特征，这两个特征是任何内化活动都无法提供的。运算的第一个特征是，在运算之间形成相对于运算整体而言属性定义良好的集合系统。针对两个对象（无论物质的或内化的）的序列化活动仅在下述情况才构成运算，即，或与同类型的其他活动相协调（通过前述两个对象，形成关于第三个对象的序列，诸如此类），或者这种协调活动遵从某几种整体性的法则（诸如：半序列性系统，完全序列性系统等）。我们理应使用不包含集合系统的必然性呈现（la présence nécessaire）的方法来定义运算，不过，从心理学的角度来看，在我们所谓的“前运算”水平（举例来说，儿童不能根据 $A \leqslant B$ 和 $B \leqslant C$ 的前提推演出 $A \leqslant C$ 的结论，即缺乏递推能力，[1]也就是缺乏将可以传递的非对称关系归类的意识）和完全运算水平（即运算生成了这样的协调作用）之间存在着巨大的差异；再者，确切来说，这一差异与集合系统[群（groupe），格（lattices），群集（groupement），等等]的呈现与否切实相关，集合系统的形成可以用心理学的方法予以跟踪或研究，并描绘出它在心理领域发挥重要的功用，它独立于我们基于集合系统得出的数学逻辑理论。

运算的第二个基本特征被我们称为“可逆性”，这一特征可能以多种形式表现。这里有两条原则。其一是针对任何已知的运算，总存在一个逆（否定）的运算，可以将其抵消：如 $+A$ 和 $-A$。这一属性是群运算的基本属性，对应着一个心理学的关键特征，即通过撤销初始运算而返回起点的可能性。但并不能认为一切运算的可逆性都遵循这一特定方向，即使是确定存在逆运算的运算，它的可逆性也可能表现为另一种形式。即我们称为“互反”的形式，互反并不抵消某种元素，而是抵消差异，互反意味着等价（例如，倘若 $a \supset b$ 为真，它的逆命题 $b \supset a$ 也为真，我们便得到 $a=b$）。

与在集合系统中的表现相同，可逆性（在集合系统内部构成关键属性：群的逆运算，网格中的互反运算，等等）在运算的心理学构成中发挥了基础性功能。我们倡导的观点是（基于我们针对被试儿童的智慧形成过程所做的全部研究）智慧[2]的发展以可逆性发展作为其衡量标准。接下来我们将对此进行阐述。

根据前文我们定义了公理系统，即一般意义上的命题系统，也定义了运算系统，另外，要从心理学层面理解公理方法和运算方法之间的关系的问题，需要确定两种系统中，哪种在智慧形成过程中发挥了相对更为基础的作用。我们很清楚，公理派和运算派主要的对立在于认识论的特征：前者通常相信，通过公理的约减（la réduction axiomatique）作为中介，他们可以把握住某种独立于运算，尤其是独立于朝着心理学方向发展

---

① 原文此处有一个括号“（”，根据上下文判断应为编辑错误，故删除。——译者注

② 参见 J. 皮亚杰，A. 柯林（Colin）：《智慧心理学》，另有英、德等语种译本。

的某种真实;而运算派则正相反,他们惯于接受"渐进式建构"的观念。结果便是,我们所针对的问题或许与前者无关,而要假设它能向后者呈现出某种意义。但这不能阻止我们对这个问题的探讨,因为心理学的真值并不使用准确意义上的逻辑来表述(cité),反而在认识论层面上必然获得某种表述,只要我们或多或少地接受了发生认识论的方法,就会认可这一点。

继而,从心理学的角度看,运算构成了比公理系统更为基础的实在(réalité),这是因为:如果说在较高的发展阶段,由于某种冲突(choc)而产生的思维引导了活动由前者向后者转移,那么,在较初级的发展阶段,活动先于思维,而前者的发生先于后者。更确切地说,思维只能始于活动的内化,之后才能形成命题系统,而这些命题系统确保了运算活动的调节。因此,运算系统构成一项先在的既有事实,而公理的映射跟随其后,必以运算系统为其基础才能实现。

相对于言语思维或命题,一般化活动的心理学优先性是运算的心理学优先性的前提,同时还显示出儿童思维智慧发展的某种清晰轨迹。实际上我们可以将这一发展过程总结为四个主要的相继阶段。

第一个阶段,即语言以及作为其结果的思维出现之前(从出生到1岁6个月左右),我们发现智慧的初级形式已经形成,但仅仅依附于活动(知觉和运动在感知-运动系统中不可分割地彼此协调)。再有,这种感知-运动智慧已经体现出了某些重要的发展成果(conquêtes),包括对象恒常性(objet permanent)格式的建构和实际邻近空间(escape proche pratique)中的建构,等等。此外,感知-运动性活动(在儿童1岁左右)在相关集合系统中相当迅速地实现了组织化,同时位移群也在实验性邻近空间(escape expérimental proche)中得以组织化,庞加莱(H. Poincaré)(我们相信是错误的)认为群是内在的,而所谓不变的东西,准确来说,就是对象恒常性(即在知觉缺失的情况下,以反向位移或同一实体的互反位移来抵消位移,或实现返回的可能性)。

第二个阶段以语言的出现作为其开端,延续到7—8岁。这一阶段的特征是符号化,即表象表征与言语叙述。感知运动活动继续外显地表达,同时也伴随着从这一时期开始的内化活动,不过,在整个第二阶段,内化活动都保持着不可逆性,即前逻辑的特征。因而,直到7—8岁,儿童尚不能掌握除了邻近空间中实际对象的守恒原则以外其他的守恒原则:如果我们将液体从一个容器转移到另一个形状不同的容器,儿童会认为液体量有所增减;如果我们将黏土小团拉伸或者擀平,儿童则认为黏土团的量改变了;两根长度相同的直杆,倘若将一根举得比另一根更高,儿童会认为两根长度看起来不一样。诸如此类。

在第三个阶段(7—8岁到11—12岁),具备可逆性的内化活动形成了某些运算,并且围绕这些活动形成了确定的集合系统。但这种建构只在具体层面也就是在现实中以表象表征作为其支撑,也就是在相对可操作对象层面上得以成立。涉及的运算仅包括类比运算、关系运算、数字运算和空间实在(以及基础性物理实在)的运算,但不包括准

确意义上的命题运算(即命题的逻辑独立于其内容)。

而具体运算最确定的心理学指标是恒常性观念的建构,以运算可逆性作为其基础。因此,诸如一块尚未塑形的黏土团,或者一定量的液体,等等,我们可以改变它们的形状,但其构成物的质和量保持恒定,因为每次对形状的改变都可能被另一种反向的改变所抵消,这是由于某一维度上量值的增加总会伴随其他维度的量值减少,从而达到了平衡补偿的效果。同理,我们对一些非连续对象的集合(collection)的空间排列做出转换,根据建立在可逆性基础上的推理,这些非连续对象的总量依然被认为保持恒定。简言之,可逆运算的出现在所有领域都带动了整体恒常性格式的形成,这些在前一阶段尚不分明的恒常性格式自此将推动具体逻辑的建构。

继而,具体运算逻辑一开始就表现为初级整体结构的形成,这种结构总是与特殊的运算相依存。例如将部分 A 并入整体 B,从而建立类别概念,这一过程在心理学意义上与类别化(classification)的发展相关联,而最简单的类别化则是一系列的二分法:$A+A'=B$;$B+B'=C$,以此类推(或 $A\times A'=O$ 之类)。这种运算结构确保了建立在包含关系传递和互补类别析取基础上的初级逻辑推理的生成。同理,建立在非对称递推关系上的初级推理,如$(A<B)+(B<C)=(A<C)$能够立即关联于某种整体结构,我们称之为串列(enchaînement)或质性序列(sériation)。倘若我们将 $O<A$ 这一关系称为 a,将 $A<B$ 称为 a',那么我们实际上获得了一个区别于前述系统的初级系统,以区分关系的加或减为其基础(而不再基于构成类别的单项本身),例如 $a+a'=b$;$b+b'=c$ 或 $a'=b-a$;$b'=c-b$ 之类。

同一阶段还形成了初级乘法系统,或称为复式统计表(tables *à* double entrée),其中最简单的便是一一对应(在成为数据或"任意"属性之前,这些对应是属性的对应,亦即,在被视为简单的单元之前,这些项基于共有质性彼此对应)。

不过,在我们目前考察的这一阶段,整体运算结构只能赋之于具体逻辑,即以具体逻辑的对象为支撑来进行推理。一旦我们将对象替换为简单言语命题,7－8 岁到 11－12 岁儿童——仍然处于前逻辑水平——则不再能够以严密(cohérente)的方式来处理这种命题。从心理学层面看,很明显,类别和关系逻辑——形式是我们方才提及的初级群集(groupement)——先于命题逻辑形成。

最后,也就是从 11－12 岁开始,涵盖整个青春期的第四阶段,儿童形成了通常意义上的形式逻辑或曰命题逻辑。从具体逻辑到命题逻辑的路径在心理学层面上的推进如下:出于演绎推理的需要,对应类别(或关系)的"各部分的整合"(ensemble des parties)迟早会叠加于乘法类别集合(或乘法关系集合)。我们在此以初级乘法群集(复式统计表)为例,将一个类别与另一个相乘。

由 $B_1=A_1+A'_1$,$B_2=A_2+A'_2$,可得

$$B_1\times B_2=A_1A_2+A_1A'_2+A'_1A_2+A'_1A'_2$$

从上述四个基本类别的组合,我们得到如下 16 种"各部分的整合":

1个空集类别

4个只含一个基本类别的组合类别

6个含有两个基本类别的组合类别

4个含有三个基本类别的组合类别

1个含有四个基本类别的组合类别

若我们现在用命题 p 对应类别 A_1，用命题 q 对应类别 A_2（p 对应 A_1，q 对应 A_2），那么16种组合对应着命题二价逻辑的16种二元运算符（空集；$p \cdot q$；$p \cdot \bar{q}$；等等）。

因此，正是这种格式化进程（schématiquement）使得从11—12岁到14—15岁儿童形成了从类别逻辑和关系逻辑到命题逻辑转变。人们有时会对我们的判断提出质疑，认为上述转变在逻辑上无法成立，同时认为，从逻辑角度看，命题演算的出现先于类别演算。不过，逻辑公理的目的是"奠基"（fonder），而心理学的目标则是"解释"。在心理学层面上，命题逻辑从类别关系逻辑衍生而来，倘若这样的转变在逻辑上无法成立，那就意味着命题逻辑在心理实在的层面上以一种非逻辑的方式自我建构[对我们来说，要承认上述说法成立，没有比属于公理化分析的便利性或曰惯例（commodités ou conventions）更好的理据了]。这里也最为明确地显示出公理方法和运算方法之间的冲突，严密的运算分析以调和为名义展现出来的功用在心理学的既有事实（données）和数理逻辑的约束（exigences）之间或多或少地充当着中介的作用。

这个问题很微妙，无论我们能从中得出什么结论，儿童或青少年的心智（esprit）都仅在第四阶段才能生成命题逻辑，自此命题可以由其他命题基于纯粹形式关系复合而成，无涉其具体内容。另外，这一阶段的推理具备了假设-演绎属性，形式逻辑最终得以形成。但很显然，主体自此开始受限于多种规则，但主体自己无法在抽象层面上列出这些规则：因而命题逻辑从最初就带有本质上的运算性质。实际运用预先给定的公理并不能即刻生成命题逻辑，而是由下层（sous-jacent）运算机制逐渐获得意识而形成命题逻辑。从感知-运动的活动到具体运算，从具体运算到命题间运算或形式运算，我们在心理学层面上见证了一个阶段接着另一个的连续建构，直至达成最终的平衡形式，直至达成通常意义上具有形式逻辑特征的结构，同时并没有切断其与智慧运算机制之间的联系。

从心理学角度，我们总结为，在活动先于思维并成为思维先导的情况下，运算先于公理而存在。思维部分地决定于组织规则，而组织规则的根系延展到活动结构，同样地，所有的公理亦与运算结构相关联，运算结构本质上则由意识获得所构成。如果我们用心理知觉的角度分析命题二价逻辑的四项公理 $(p \vee p) \supset p$；$p \supset (p \vee q)$；$(p \vee q) \supset (q \vee p)$ 及 $(p \supset q) \supset \{(p \vee r) \supset (q \vee r)\}$，实际上我们会发现整体之中的部分嵌套结构，整体中的自嵌套，嵌套的传递性和部分叠加的交换律，不仅从属于之后的类别关系的具体运算，还从属于之前的感知-运动活动的前运算格式。得出以上观点之际，我们不禁思索：对于公理而言最为首要（primitif）的因素，经过足够深刻的充分性分析，迟早会与

运算方面以及发生学方面的首要因素相联结(rejoint)。

Ⅱ　心理学和逻辑学之间的关系

现代数理逻辑首先在公理层面上呈现,因而我们有必要将其设定为分析系统真值条件的目标。换言之,倘若我们从规范角度对逻辑进行考量,就只能采用公理化的方法。这一观点毋庸置疑,我们无意在此过多争议。

不过,数理逻辑也是运算技术的综合,由于运算技术建立在公理化方法的基础上,人们仍会有质疑,彼此不同的运算各自遵守着什么样的结构性法则。已有相当数量的数学著作着重考察了逻辑结构和群或网(网格)形式之间的关系,不过此类研究的衍生能力(fécondité)或许尚未耗尽。

在我们看来,有关公理方法和运算方法关系的具体逻辑问题首先旨在判定公理和公理所采用的运算结构之间的关系。而这种关系并不简单。实际上,一切公理化方法都给出了一定数量无法定义的运算概念和使用这些概念的不可证明的命题(等同于公理)。因而无论我们愿意与否,总有某种未被言明的元素存在(subsiste)于公理之中,由于我们不清楚那些隐藏在无法定义和不可证明之下的东西是什么,所以我们也没有恰当的方法予以应对。因此,现在的问题是:这些未被言明之物是否真的是非运算的;或者,当它们与下层的整体结构产生关联,并投射在明晰的结构之上,它们投下的是否不仅是晦暗的阴影,还有系统化的能力。

问题从公理的选择开始。实际上,某一系统的公理应当同时满足既非相互矛盾又要彼此独立的双重条件。但是,历史表明,要证明彼此独立是困难的,这是因为我们时而在事后觉察到,某种之前尚且独立存在的公理可以化约:例如,伯奈斯(P. Bernays)能够证明罗素和怀特海(Whitehead)五项公理之一可以化约到其他四项之内。此外,倘若选中的公理确实彼此独立,我们又如何能够确信它们永远不会导向某种矛盾?我们能够取得某种程度的接近真实的认识,然而无法定义的概念阻止我们获得绝对的确定性(la certitude absolue),或是达成完全的解释。

再有,从运算角度来看,这种既非彼此矛盾又相互独立的双重条件立刻触发了整体结构的观念。多种基本运算组成了彼此区分又互为联系的结构,由此导致的结果是,倘若公理反映了这种运算组织,它的初始命题将会复制这个双重属性,体现为必然的多元性(相对独立)和严密性(cohérence)(非矛盾性)。这方面特别清楚的一个例子是著名的尼克德(J. Nicod)单一公理,它将罗素-怀特海公理总结为一个单一的复合陈述(un seul énoncé complexe)(包含了五个命题和两种运算):我们已在之前著述中①试图给出

① 《逻辑公约》, § 35。

将它表述为“群集”(groupement)的基础结构(我们即将回到这一概念)。

于是,人们会发现,以下提出的一般性问题触及了逻辑意义本身。或许逻辑的基础只是纯粹的约定俗成,因此没有什么值得从公理角度来探索的:每一项公理都是自足的,只是这种情况下不可避免地要把公理结果与物理事实和心理事实相协调。或者,相反的看法是,逻辑法则以某种方法表达了智慧或思维的法则,因而有必要将整个公理系统对应于某种“前公理化”的分析,从而将运算结构与表达调节性(réglage)的公理解锁。

继而,沿着第二种路径,我们发现,整体运算结构作为命题的二价逻辑的一种形式,在整体运算结构和思维的心理学法则之间存在着某种显明的趋同性(convergence),尤其牵涉到可逆性,包括严格的可逆(反向)形式和互反形式。

我们首先注意到 16 种运算(或 256 种三元运算,以此类推)遵守四种转换的群法则。即对任意一个类似于 $p \vee q$ 的运算,我们都能得到:

(1) 保持其不变:即同一性转换 I。

(2) 将其反转,即通过完全肯定命题定义确定其互补性

$$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$$

故而$(p \vee q)$的逆命题 N 应为$(\bar{p} \vee \bar{q})$。

(3) 互反转换 R,不改变运算本身($\vee$)而否定相关联的命题。即

$$R(p \vee q) = \bar{p} \vee \bar{q} = p | q$$

(4) 转换为相关运算 C,即对调正常运算形式中的($\vee$)与($\cdot$),但不改变命题符号。即

$$C(p \vee q) = p \cdot q$$

我们发现四种转换构成了对易群,即:

$$RC(=CR)=N;\quad NC(=CN)=R;\quad NR(=RN)=C \tag{1}$$

及

$$RNC(=NRC=CRN=\cdots)=1 \tag{2}$$

像这样的群可以用如下乘法表来表示:

I R N C
R I C N
N C I R
C N R I

实际上,如果 $p \vee q$ 的 C 运算是 $p \cdot q$,那么 RC 是 $\bar{p} \cdot \bar{q}$,也就是 $N(p \vee q)$。同理 NC 是 $p|q(N(p \cdot q))$,也就是 $R(p \vee q)$。

同理 $p \supset q$ 包括一个 N 转换(也就是 $p \cdot \bar{q}$),一个 R 转换($\bar{p} \supset \bar{q} = q \supset p$)和一个 C 转换(也就是 $\bar{p} \cdot q$),这三种转换加上原有的同一转换 I 同样构成了 INRC 群组。只需要注意,在某些场合(比如等值 $p = q$)我们会得到 R=I 和 C=N,而在另一些场合(比如运算 $p \cdot q \vee p \cdot \bar{q}$)我们会得到 R=N 和 C=I。但上边提到的命题(1)和(2)总是成立,即使四种转换并不完全分立。还需要确认的是,同样的群在命题的二价逻辑的 256 种三

元运算和65536种四元运算中同样存在。

从而我们以最明晰的方式观察到了趋同的数理逻辑群的一般性，我们凭此做出智慧的心理发生学分析，大致来说，心理运算的发展趋向两种平衡互补形式，它们分别是逆向形式（即抵消顺运算的逆运算）和互反形式。

某些不够完整的群仅包含一种运算和它的逆向形式（正如有两个群，一个是排他性析取的群，一个是基于布尔代数的循环属性的等价群），显然地体现了严格意义上的可逆性（即逆运算）。

不过，正如我们所知，命题逻辑运算同样构成一种"网"（或"网格"），其"上限"由非排他性析取（∨）构成，"下限"则由合取（·）构成。再有，网格的表现越来越趋向于一般化属性的整体结构，我们在许多数学甚至是物理学的领域中都发现了网格的整体结构的存在，而今天，网格的重要性已经与群的重要性等同了。于是，我们需要做以下思考：在命题逻辑运算分析的启发下，是什么理由促成了网格的基本特性？若是论及群，我们即刻就会明白群这一形式结构的特性与思维法则，是由于顺运算和它的逆运算联合构成了平衡状态的条件，从而统一了运动平衡化的特征和智慧运算的特征。不过，若是论及网格，它趋于完型（prégnance）的理由又是什么呢？

如果，在一般形式上的群是逆（否定）运算的表达，那么，同样一般形式上的网格则是互反运算的表达。两种形式的基本特征即刻显现。首先，从构件运算 a 的角度来看，上限["会合"（meet）]和下限["加入"（join）]处于关联关系之中（C）。实际上，倘若 x 与 y 两种运算的上限是 $x \vee y$，下限就是 $x \cdot y$。于是，关联就是互反命题 a 逆命题（即否定形式）。其次，网格包含某种二元法则，以置换（∨）与（·）以及"在前"（précède）"在后"（succède）两项关系，而二元法则构成了事实的表达。倘若我们将这项法则运用于上下限的关系，就会得到如下内容：

$$(x \cdot y)\text{先于}(x \vee y) \qquad (x \vee y)\text{后于}(x \cdot y)$$

故而我们发现，上述转换并不否定第一种表达，只是简单地作了某种转换，或是置换项，或颠倒关系来实现的转换，而转换后的表达与初始表达等价，这就是互反形式。此外也可以追加转换的否定关系，即：

$$(x \cdot y)\text{先于}(x \vee y) \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})\text{后于}(\bar{x} \cdot \bar{y})$$

但我们立即发现，从构件（composante）运算 a 的角度（这里指∨）来看，$\bar{x} \vee \bar{y}$ 是 $x \vee y$ 的互反形式，同理（$\bar{x} \cdot \bar{y}$）是 $x \cdot y$ 的互反形式（这里指·）。

通常来说，倘若我们将 a 称为构件运算（∨），Ca 称为它的关联运算（·），我们得到：

$$Ca\text{先于}a\begin{cases} Ra\text{后于}RaCa \\ a\text{后于}Ca \end{cases}$$

举例说，基于二元法则，从"$(p \cdot q)$先于$(p \vee q)$"可以得出"$(p \vee q)$后于$(p \cdot q)$"或"$(p|q)$后于$(\bar{p} \cdot \bar{q})$"。但我们不能得出互反变换，因为$(p|q)$是$(p \vee q)$的互反，$(\bar{p} \cdot \bar{q})$

是$(p \cdot q)$的互反。进而，确切地说，其理由是上下限之间的关系是关联关系(Ca)。

现在我们要确认网格也能同时伴随严格的逆向转换(条件是存在第一和第二类互补关系，类似的情况还有，由命题的二价逻辑构成的网格)，同理群也能伴随逆向转换(本质上群表达了逆向转换，而网格表达互反转换)。

故此，从运算机制和思维心理法则层面，我们可以提出两个问题：从上述二价结构到1,2,3等命题形成过程中，逆向和互反的关系问题；以及我们如何命名整体结构的运算序列的问题。

要解决第一个问题，首先为1,2,3等命题排出可能运算的列表。一个单独命题，在此我们称其为q，会有如下四种可能：

$$q;\quad \bar{q};\quad q \vee \bar{q};\quad q \cdot \bar{q}(=0)$$

我们可以用图表1的形式表示：

$$\begin{matrix} 0 & \bar{q} \\ q & q \vee \bar{q} \end{matrix}$$

图表 1

无须强调也可看出，该图表呈现出与下表相同的属性。为了建构一个二元运算表，我们将四种一元运算用命题p和p的否命题相乘，得到：

$$p \cdot 0 = 0;\quad p \cdot q;\quad p \cdot \bar{q};\quad p \cdot (q \vee \bar{q})$$

及 $$\bar{p} \cdot 0 = 0;\quad \bar{p} \cdot q;\quad \bar{p} \cdot \bar{q};\quad \bar{p} \cdot (q \vee \bar{q})$$

现在我们来处理双项式表基于两种维度的这两种序列，并将第一序列中的每一项与第二序列中的互反项相对应(这是因为关于网格结构的假设是建立在互反基础上的)。

从而将第一序列中的项目与第二序列中的项逐一对应相加($\vee$)，可以得到所有16种二元运算网格的上限。实际上，完整的表包括以下16种可能(图表2)：

$$\begin{matrix} 0 & p \cdot \bar{q} & p \cdot q & p[q] \\ \bar{p} \cdot q & p \mathbin{\vee\!\!\!\vee} q & q[p] & p \vee q \\ & & + & \\ \bar{p} \cdot \bar{q} & \bar{q}[p] & p = q & q \supset p \\ \bar{p}[q] & p | q & p \supset q & p * q \end{matrix}$$

图表 2

(我们用符号$[q]$指代$q \vee \bar{q}$，用符号$\mathbin{\vee\!\!\!\vee}$指代排他性析取，用符号$*$指代同义反复或完全肯定陈述$p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$)

此表理应与维特根斯坦的真值表同构，我们可以在图表2中作如下处理：如将上起第一行写作0000;0100;1000和1100，左起第一列写作0000;0010;0001和0011。

不过我们的目的在于揭示逆向和互反之间的关系，或一般层面上，组成前述表中16种二元运算的群和网格之间的关系。

在这一层面上，应当指出这个表的如下属性：

(1) 每种运算都是加法(∨)的结果，因而对应于项的“上限”[“会合”(meet)]，即矩阵的最上一行和最左一列。例如：

$$(p \,W\, q)=(p\cdot\bar{q})(\bar{p}\cdot q) \quad 或 \quad (p\cdot q)=(p\cdot q)\vee o$$

(2) 每种运算都是乘法(·)的结果，因而对应于项的“下限”[“加入”(join)]，即矩阵的最右一列和最下一行。例如：

$$(p \,W\, q)=(p\vee q)\cdot(p|q) \quad 或 \quad (p\vee q)=(p\vee q)\cdot(p*q)$$

(3) 以矩阵中心(+)为轴的对称关系彼此逆向(N 否命题)：例如

$$(p \,W\, q)和(p=q) \quad 或 \quad (p\cdot\bar{q})和(p\supset q)$$

(4) 以对角线/为轴的对称关系彼此互反(R 逆命题)：例如

$$(p\supset q)和(q\supset p) \quad 或 \quad (p|q)和(p\vee q)$$

(5) 以对角线/为轴的对称关系彼此互为逆反(C 逆反命题)：例如

$$(p\cdot q)和(p\vee q) \quad 或 \quad (\bar{p}\cdot\bar{q})和(p|q)$$

(6) 从属于对角线/的运算呈现出 R=N 和 C=I 的特征。例如 $p[q]$ 的 R 逆命题是 $\bar{p}[q]$，$p[q]$ 的 N 否命题也是 $\bar{p}[q]$；因而它的逆否命题是 $p[q]$ 它本身。

(7) 从属于对角线/的运算呈现出 R=I 和 C=N 的特征。例如 $p=q$ 的 R 逆命题也是 $p=q$ 本身，逆否命题则和否命题一样，是 $p \,W\, q$。

(8) 当一种运算 z 是其他两种(x 和 y)的结合，亦即 z 构成 x 和 y 的上限，那么 z 的逆命题 $\bar{z}$ 构成了 x 的逆向和 y 的逆向乘法结果(即，下限)，即：

若 $x\vee y=z$，那么 $\bar{x}\cdot\bar{y}=\bar{z}$

例如：倘若 $\bar{p}[q]\vee(p\cdot\bar{q})=p|q$，那么 $p[q]\cdot(p\supset q)=(p\cdot q)$

此处存在 INRC 群法则的某种应用，因为 $\bar{x}\cdot\bar{y}$ 是 $x\vee y$ 的逆向(N 否命题)，同时存在网格法则的某种运用，因为 $\bar{x}\cdot\bar{y}$ 是下限 $x\cdot y$(对应上限 $x\vee y$)的互反 Ra，同时构成了逆否命题 Ca(从 $a=\vee$ 的角度来看)。

现在让我们考虑三种命题 $p\cdot q$ 和 r。对应图表 2，我们从 q 和 r 得出 16 种可能性。让我们把这些可能性与 p 和 $\bar{p}$ 相乘，将会得到如下两种序列：

0；$p\cdot(q\cdot r)$；　$p\cdot(q\cdot\bar{r})$；　$p\cdot(\bar{q}\cdot r)$；　$p\cdot(\bar{q}\cdot\bar{r})$；　$p\cdot q[r]$；

$p\cdot r\cdot[q]$；　$p\cdot(q=r)$；　$p\cdot(q \,W\, r)$；　$p\cdot\bar{r}[q]$；　$p\cdot\bar{q}[r]$；

$p\cdot(q\vee r)$；　$p\cdot(r\supset q)$；　$p\cdot(q\supset r)$；　$p\cdot(q/r)$；　$p\cdot(q*r)$

和　0；$\bar{p}\cdot(\bar{q}\cdot\bar{r})$；　$\bar{p}\cdot(\bar{q}\cdot r)$；　$\bar{p}\cdot(q\cdot\bar{r})$；　$\bar{p}\cdot(q\cdot r)$；　$\bar{p}\cdot q[r]$；

$p\cdot r[q]$；　$p\cdot(q=r)$；　$p\cdot(q \,W\, r)$；　$\bar{p}\cdot r[q]$；　$\bar{p}\cdot q[r]$；

$\bar{p}\cdot(q/r)$；　$\bar{p}\cdot(q\supset r)$；　$\bar{p}\cdot(r\supset q)$；　$\bar{p}\cdot(q\vee r)$；　$\bar{p}\cdot(q*r)$

我们注意到第二序列的排序，每一项都构成对应第一序列项的 R 互反命题。将第一序列置于双项表最上一行，将第二序列安置在表的最左一列(0 在矩阵左上角)，根据图表 2 同样的加法法则便可以得到 16×16=256 种三元运算表。

如果有四个命题，则将命题 q,r,s 的 256 种三元运算与 p 和 $\bar{p}$ 相乘，得到双项表 $256\times256=65536$ 种四元运算，也呈现出相同特征，以此类推。

这些分析结果表明，在命题二元逻辑中，群和格的法则，以及同样地，逆向结构和互反结构都错综复杂地混在一起。的确，一方面，INRC 的基本群同时包含了互反和逆向。另一方面，格（∨）和（·）的上下限之间的关系本身构成了群，这是由于，倘若（∨）$=a$ 并且（·）$=\mathrm{C}a$，我们得到 $\mathrm{R}a=\mathrm{N}a\mathrm{C}a$，$\mathrm{R}a\mathrm{C}a=\mathrm{N}a$，$\mathrm{R}a\mathrm{C}a\mathrm{N}a=a$；即是说，格（∨）和（·）都从本质上涉及了相关（corrélativités）和互反，从而也包括了逆向（$\mathrm{C}a=\mathrm{N}a\mathrm{R}a$）。

为了在互反和逆向之间廓清关系——它们在思维基本运算机制中发挥着重要的作用——我们不能停留于静态的分析，应该尝试考察整体结构的连续性。我们说结构 B 接续在结构 A 之后，这是因为结构 B 包含了全部的结构 A，同时还包括了更多其他运算。从这个意义上，我们只能说 INRC 群先于格（∨）和（·），而不是与此相反，这是因为每一个格都包含有 INRC 群的某些运算，并且运用其特有的运算机制补足了运算。

不过，在群和格中存在更为基本的逻辑结构。倘若我们参考更早先（§1）描述过的、涉及具体运算（它们在心理发展过程中位于形式运算之前）的结构，我们会发现如下运算系统，例如基本类别化，序列以及从乘法得来的双项表格（参见 $B_1\times B_2$ 的事实例子）。

再有，这些基本结构值得我们关注。数学家和物理学家有足够理由将其忽视，因为自前苏格拉底学派或亚里士多德以来，这些结构就不再出现在他们的学科当中。但要注意描述生物学和系统生物学并不会放弃使用这些结构：动物学和植物学的类别化，以及比较解剖学的序列和双项表格都包括了类似的结构。

进而，我们把这些结构称作“群集”（groupement），它同时包含了不完全的格和不完整的群，因而也同时先于群与格两种结构。从格角度来看，我们立刻就能发现，简单的类别化“群集”不过是一个半完成的格，这是因为它缺少彼此嵌套的 A'，B'，C' 之间所形成的封闭性结构：这个格包含一些上限（B，C，D，以此类推），然而同级类别化的一切下限都是空集（$A\times A'=O$；$B\times B'=O$；以此类推）。从群的角度来看，这一系统包含顺运算（$A+A'=B$）和逆运算（从 $B-A'=A$ 得到 $-A-A'=-B$，等等）。既然所有元素都是等幂的①，我们便不能将重言式 $A+A=A$ 和逆运算 $A-A=O$ 以完全关联的方式来构成：$A+(A-A)=A$ 和 $(A+A)-A=O$。将重言化过程（tautification）$A+A=A$ 抽离出来，仅保留析取类别加法（完全不相交类别的叠加），于是，我们得到了布尔-伯恩斯坦（Boole-Bernstein）群。不过这种群仅在以下情况成立，即从最初的嵌套中解除基本类别 A，A'，B 之间的关联，同时，在类别化群集中，系统的变化同时受到两方面的限制，一是重言化过程 $A+A=A$ 的限制，二是逐渐趋于完整构成的必然性[临近性

① 等幂意味着所有的元素都处于同一个运算阶层，即在同一个群集内不同时包含处于一阶运算和二阶运算的元素。——译者注

(contiguïté)]的限制，故而 $A'+E'$ 无法形成某种确定的类别（如鲤鱼与家兔），只能够以 $A'+E'=F-A-B'-C'-D'$ 的形式组合在一起(composable)。

再有，从我们在此讨论的观点出发，亦即从逆向和互反的最原始的，或曰基本的特征出发，类别化群集和关系群集呈现出某种旨趣(intérêt)，即在这两种情况下，均采用必然的分离状态，呈现思维的基本运算机制，因而类别化群集的逆运算$(-A)$就是精确的可逆性：$+A-A=O$（O 是空集）。相反地，序列性群集（传递性非对称关系）的逆运算实际依赖于互反：倘若 A 与 B 之间存在差异 a'，顺运算会加上这一差异$(+\overset{a'}{\rightarrow})$，逆运算则会做差异的减法$(-\overset{a'}{\rightarrow}$，与$+\overset{a'}{\leftarrow}$等价)。两者的结果不是逆运算导致的无类别化，而是无差异化，即等式：

$$(A\overset{a'}{\rightarrow}B)+(B\overset{a'}{\leftarrow}A)=(A\overset{o}{\Leftrightarrow}A) \quad \text{或} \quad (B\overset{a'}{\leftarrow}A)+(A\overset{a'}{\rightarrow}B)=(B\overset{o}{\Leftrightarrow}B)$$

这里出现的是互反，而不是精确的可逆性。一般来说，可逆性界定了类别化群集的特征，在这些群集中的逆运算会抵消某些项或某些嵌套，互反性则界定了关系群集的特征，在这些群集中逆运算构成了转换关系（即通过逆向构成差异 $A\rightarrow B$ 或等价 $A_1\Leftrightarrow A_2$ 关系）。需要指出的是，命题间运算也存在同样性质，逆运算抵消了为了满足互补而形成的结合（例如，为了满足 $p\cdot\bar{q}$ 的 $p\supset q$），而互反，在运算构成了序列关系的情况下，正如蕴涵一样，扭转了次序，故而互反的结果是形成了新的等价关系：$(p\supset q)\cdot(q\supset p)=(p=q)$ 或 $(\bar{p}\supset q)\cdot(q\supset\bar{p})=(\bar{p}=q)$（即 $p\vee q\cdot p|q=p\ \mathbb{W}\ q$）；等等。

故而，逆向和互反两者都是基础运算。分析表明，逻辑最为普通(simples)的整体性结构是“群集”，由于上述两种基础运算的机制彼此分离，所以群集可以强调其真实本质，即两种运算在各自的领域彼此一一对应，逆运算针对的是某些项（个体的或者类别的），互反运算针对这些项对应的关系（例如下述包含关系：

$$A<B\rightarrow B<C \quad \text{得出} \quad A<B\rightarrow B<A)$$

这最终意味着前者涉及的是概念的外延或量化的描述，后者涉及次序、定性的描述与概念的内涵。

据此，我们应该关注的是，如何将“群集”——其中的逆向与互反是彼此分离甚至是平行的前提下——过渡到建立在序列之上的格（或半序列化系统），这种过渡是基于互反运算；以及过渡到群，而这种过渡基于逆运算。我们早先（参见 §1）已经阐述了如何从乘法群集（类别或关系）过渡到它们的“部分的整体”的构成。我们要再次明确，“部分的整体”可以被视为“类别化”(classification)的一般化：基于所有彼此区分的类别化的整体，我们可以操纵 n 种元素（若有 4 种元素 $A_1A_2A'_1A'_2$，我们将得到：1 个空类，4 个 A_1 到 A_n 的类别，6 个 B 型类别，4 个 C 型类别和 1 个 D 型类别）。从这个角度来看，倘若类别和关系的基本群集“先于”部分的整体的结构，且与命题结构同构，那么群集的组合法则也将作用于部分的整体，从而作用于命题二价逻辑，我们已经另外证明了将命题二价逻辑归约为单一群集的可能性，（因此，命题二价逻辑）同样遵从类别和关系群集的

组合法则。再有,单一群集自身融合了所有适用于不同基本群集的运算机制,故而形成了一个完整的格(集结所有可能的类别,同仅由简单类别构成的半格相对,且同时包含INRC群,即多种元素彼此间的转换)。由此互反和逆向之间的联结更加紧密,这是因为互反内在于格,构成了INRC群中的两种转换(相对于I的R和相对于N的C),逆向则定义了格的(第一类与第二类)互补部分,以及INRC群的另外两种转换(相对于I的N和相对于R的C)。

接下来理应从相同角度分析多价逻辑,其中逆向发生了重大的改变,但这已经超出了我们定义的领域,实际上属于智慧最为基础的运算范畴。

不过即使限定在领域内部,我们仍能观察到运算方法对心智(esprit)分析起到的作用。这种研究或许并不构成严格意义上的逻辑,而是构成了——倘若我们愿意承认——具备心理学用途的逻辑(每门特殊学科伴随其发展都会愈发产生这样的需求)。再有,从我们上文已经讨论过的角度来看,数理逻辑的运算技术比公理方法更富于指导意义(enseignements):倘若运算分析尚不足以建构某种纯粹逻辑,至少它可以在认识论基础领域,继而在心理学领域和逻辑学领域更加深入向前。

Ⅲ 认识论的角度

我们可以从两方面来理解认识论,一种是经典的或者说哲学式的,另一种则将客体还原为某种同质化的方法,诸如作为解释的科学。

第一种方法是静态的,即把知识视为一种状态,以知识自身来反思知识。类似的问题立场最可能导致形而上学的实在主义,一次性地决定了主体和客体的意义;又或者走向一种实证主义,但是这样会受到基础二元论的威胁,一方面是重言式句法,另一方面是事实真值,接下来这两者之间的协调也是很困难的。

第二种方法是发生性的,并不立刻反思知识为何物,而是首先反思知识自身如何增殖,亦即我们如何从常识或科学知识的一个领域过渡到另一个,从低端知识过渡到被主体自身(儿童,成年社会人,相关领域专家)认定为增殖了的或高端的知识。发生认知论方法因而成为了历史批评分析①和发生心理学分析的重要方法。

继而,不可否认的是,公理方法或运算方法在很大程度上受到相对于前两种立场的认识论偏好的牵引,公理学派的取向是某种静态的实在主义(réalisme),运算学派则被导向于关注持续发展认识活动。公理的起点总是相对于难以定义的概念以及难以证明的命题,这使得公理学派迟早可能,或者在不同程度上有意无意地,幻想能够把握某种绝对性,这表现为思维的先验(a priori)法则,以及作为整体句法之中某个单一句法的

① 参见我们的《发生认识论》,巴黎,1956,Ⅰ,引言部分。

共相(universaux)映射的法则。人为地将公理与其运算的亚结构分离,可能面临一种风险,即可能将公理导向一种排除了结构观念的实在主义。相反,运算主义则被导向与我们的活动相关联的、关于物与他者的知识观念,这是一种连续结构的知识。

那么两者孰真?这里并不会给出定论。我们不打算反对,也没有办法来反对绝对性假设,关于这种假设我们所知不多,相关的知识也不多。我们只是注意到,绝对性的多元化和多样性,它涉及认识论的最初形式,这一场面在我们看来并没那么激动人心,反而迫使我们去寻找一种能够将预置假设(présuppositions)最小化(minimum)的方法。我们同样坚持在公理的纯粹形式和技术领域给出两种意见,这也让我们更审慎地对待认识论。第一种意见出于业余逻辑学家(即我们)在真正的专家身边试图搜集资料时的惊异:业余的逻辑学家察觉到最为"纯粹"的观点总有一种倾向,即在更为纯粹的作者眼中,这些观点缺乏严密性,故而业余逻辑学家希望建立一种标准(concile),或至少建立一种受到公理派制约的学术规范,这样的标准可以每隔半年宣布哪些观点值得继续相信,哪些观点可以首次得到认可,哪些观点从此不再得到承认。第二种意见赋予第一种意见更为客观的基础:令人惊讶的是,当代伟大的逻辑学人严谨又热情的灵魂在相当数量的认识论领域内具有基础性重要意义的问题上尚且不能达成一致,譬如逻辑类别基数的化约①或是归纳推理的本质,等等。这些主题中,哪些还保留了弗雷格和罗素提出的简单解决方案?倘若我们不能用"全"或"无"作答,公理学派又何以在当代数理逻辑最初理想方面与我们渐行渐远?

简言之,倘使公理构成了一个解析的不可替换的过程,那么一旦涉及真值形式标准的分析,公理化过程便不足以解决认识论问题的整体。当今的认识论首先宣告了一种能够确保与思辨(spéculation)相对立的方法,这一方法可以同时满足两种有时难以调和的要求:不以寻常的名义排除任何信息,同时尽可能地减少预判成见。进而,不排除任何东西标志着公理方法的出现,而公理方法的出现更新了数学、逻辑学和一部分的物理学。同时,尽可能少地产生成见则排除了对绝对开端的要求,并作为结果,在我们称之为"公理矩"(moment axiomatique)的语境中强制要求了义务——"公理矩"出现在某些知识发展的过程中②。再有,即使公理化过程标志着较长一段历史时期中某一项(该项永远是相对的)能够达到平衡状态,我们仍应通观这一历史时期来判定是否仅能通过公理方法来达到这一状态。

继而,在知识发展的历程中,一旦达到了某个位置,无论多么有限,发生心理学分析都有必要介入其间。即便如此,历经几个世纪的演变,当下运用的公理呈现给我们一种普遍性价值取向的真值,能够被所有人最终接纳,但是,仍然有一些问题需要用心理发

---

① 这一点参见罗素-吉尔伯特的发散论或维特根斯坦等相关著作。

② 关于这一主题参看 F. 贡塞斯(F. Gonseth)的著作与我们在《辩证法》(*Dialectica*)中关于收敛与发散的讨论。

生学来解释，即从转变状态到持久平衡状态的过渡，而放弃了这种解释的认识论仍处于未完成状态。实际上，如果不依靠智慧工具，绝对不可能通过运用在现实机制形成关于客体的知识，人们可能会受到集体错觉（或者，简单地说，称为一般性错觉）的蒙蔽（abri），所以必须在此之前运用这一现实机制认识客体、避免蒙蔽。更何况知识层面始终具有相对性——在进一步广泛考察之前，所有观点都只是假说，并应维持现状——这也需要心理发生学的分析。

再有，运算方法的特殊优势确切来说就在于确认智慧的心理学（认识论不需要这方面的考虑）与公理研究（这其中也不能排除认识论的影响）之间的联系。心理学不能像公理研究那样触及一般性规范，但公理也不能仅凭一己之力趋近一般性规范：由此及彼的路径需要由运算分析来保证，运算分析一方面延展了心理学得到的结果，这些结果或早或晚可以被公理化；另一方面，运算分析也包含了逻辑学和认识论的真值，而无论其形式化达到了何种水平。

在整篇文章中，我们分析了公理方法和运算方法之间的矛盾，经过如上的分析之后，我们要对两者做出调和，即使这一调和是有条件的。而调和的条件，就是接纳历史学的、心理学的真值，我们相信，这一假设对于逻辑学亦有其价值：即形式化不是静止状态，而是处在某种动态过程之中，或许是无休止的完善过程。如果情况是这样，运算方法在与事实科学（即心理学）相遇时，就能够达成形式化的第一阶段，在这一阶段以心理学观察或实验事实的名义描述的运算机制已经部分地得以形式化。而第一阶段之后必然接续着第二阶段，亦即严格意义上的公理化阶段。运算方法也因此在心理学和公理研究的矛盾（如果称不上绝境）之中扮演了调和者的角色。而这一调和过程正是认识论，至少是发生认识论所期许的模式。

逻辑学与心理学

〔瑞士〕让·皮亚杰 著
曹宁宁 译
李其维 王云强 审校

逻辑学与心理学

英文版 *Logic and Psychology*, Manchester, UK: Manchester University Press, 1953.

作 者 Jean Piaget

曹宁宁 译自英文

李其维 王云强 审校

内容提要

将逻辑学引入心理学的研究，是皮亚杰的开创之举，对研究人类智能的发展提供了重要的方法依据。《逻辑学与心理学》是皮亚杰将符号逻辑学的技术应用到儿童智能行为研究的方法学。本书主要包括梅斯和皮亚杰对于这一方法学的简介。研究逻辑学的目的是研究逻辑技术在心理学现象自身中的应用，运用逻辑技术研究不同认知发展阶段的儿童实际发生的思维结构。逻辑学的定性特征便利了对智能运算实际内在结构的分析，皮亚杰引入逻辑代数帮助心理学家对思维的运算机制进行分析，提供了一个更加精确、具体地表征思维结构的方法体系。

梅斯的简介主要列举了皮亚杰所整理的逻辑学重要概念，介绍了可供心理学家使用的符号逻辑的简约系统。在皮亚杰的简介中，第一章论述了将逻辑学进入心理学的历史、原因和意义，作者批驳了将逻辑学与心理学彻底割裂的观点，论述了引入逻辑学的意义和可行性；第二章从心理学的角度描述了运算结构；第三章用逻辑代数的方式分析了儿童实际的运算结构；第四章阐述了两个系统间的关联以及逻辑结构可以如何运用于心理学的解释。

本书为我们简述了用于智能发展过程研究的逻辑学方法体系，是后续运用这些方法进行儿童思维过程实验研究的基础。

曹宁宁

目　　录

前言/263
皮亚杰逻辑学简介/265
作者简介/271
第一章　问题的起源和现状/273
第二章　运算的心理发展/277
第三章　逻辑的代数的运算结构/284
第四章　结论:逻辑结构的心理学意义/292

前　言

此书的基础是1952年10月在曼彻斯特大学进行的三场演讲。我要感谢波兰尼教授整理了这些演讲,梅斯博士和怀特海博士进行了翻译,感谢曼彻斯特大学师生们的聆听。在曼彻斯特,这个仍然记得杰文斯这个名字的地方,联结逻辑学和心理学的尝试,受到了尤其令人振奋的回应。

让·皮亚杰

1953年

皮亚杰逻辑学简介

梅斯(W. Mays)

大约从1939年起,皮亚杰在日内瓦开始将符号逻辑学的技术应用到儿童智能行为的研究中,以尝试透析儿童逻辑、数学和物理概念的形成过程。在他的《逻辑通论》(Traité de logique)(Colin,1949)一书中,系统列举了这些研究中所使用的逻辑原理。由于此书的逻辑学方法主要基于这些研究,它对其中一些重要概念进行了简要的介绍。

这些重要概念包括五个方面:(1)符号逻辑的元素在逻辑运算的概念下进行整体简洁地处理;(2)使用运算的分类解释和分类系统进行处理;(3)针对任何两个命题间的命题解释和逻辑关系;(4)由于命题系统类似一个群集,某些解释揭示了数学群集的本质;(5)采用格进行处理,来自于现代逻辑学的基础布尔代数,在其数学处理上可归为群集格理论。

皮亚杰宣称心理学家可以把符号逻辑作为一个方法,就像统计方法一样有用。符号逻辑已经应用于不同的领域,语言、逻辑和数学计算机的设计、生物和神经网络。皮亚杰已经展示了它能如何高效地运用于儿童智力活动的分析之中。

(一) 元　素

在符号逻辑中,我们使用代数学采用的相似变量(也就是 x,y,z),但不是指数字,而是仅指逻辑计算中的命题,比如"太阳在闪耀","玛丽在唱歌"。我们用字母 p,q,r,s 等代表它们。正如我们在代数学中使用+,-,×,÷这样的运算,在符号逻辑中,我们使用相似的符号指代命题间的关系。

它们是

(1) 否(否定)　　—

(2) 和(合取)　　·

(3) 或者[析取(二选一或两者皆可)]　　∨

(4) 如果……然后(蕴涵)　　⊃

任何的逻辑运算都能通过·及否定或者∨及否定进行表达。

从这一点我们可以建立其他的关系,比如等值=($p=q$)或者不相容性|[①]($p|q$),举

① 原文是/,根据上下文判断疑为|的笔误,翻译时更正为|。——译者注

例来说:"下雨了(p)和人行道是干的(q)不会同时出现。"更进一步,普通代数学的+与×和符号逻辑运算的∨与·之间存在相似之处。乔治·布尔首次在他的逻辑代数学中发现了这一相似性;$p \vee q$ 和 $p \cdot q$ 有时候被称为逻辑和与逻辑乘积,运算∨和·被称为逻辑加法和逻辑乘法。布尔代数事实上是1和0的代数,因为在此体系中,命题仅有两个值:是和否。

(二) 类

我们可以给逻辑的抽象代数一些解释。此处我们分别独立考虑命题的解释和类的解释。在类演算中,我们始于对象分类的概念。类可以定义为所有拥有某种属性的实体,例如,所有男人的类,或者所有老虎的类。我们可开始于类 C,用 A,B 表示 C 的子集。因此 C 可能是方形的,A,B 是在 C 中不同区域点的子集(图1)。在数学运算中,类的概念被称为一个集合。

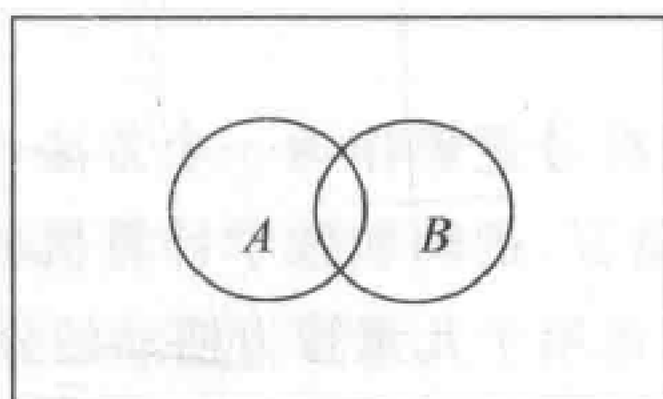
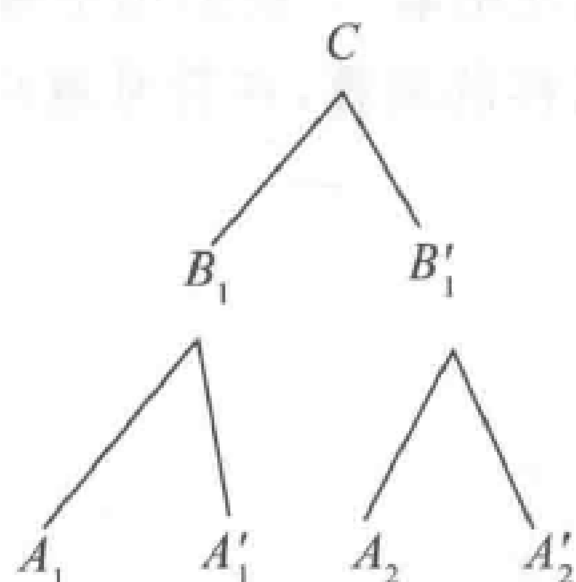


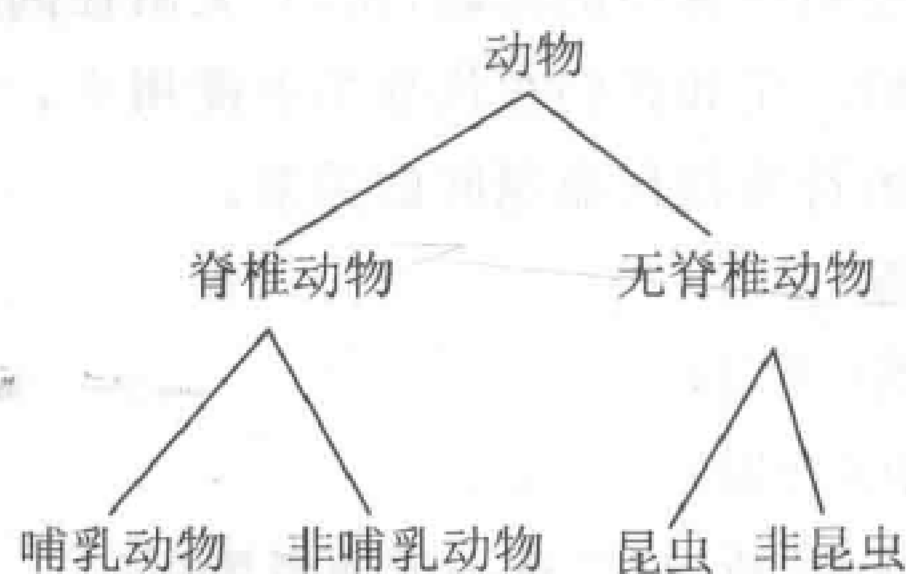
图 1

类之间与命题之间有着相似的关系,但为了避免混淆,使用不同的符号。皮亚杰使用算术和与积的符号+,×。

类 C 的分类可以按下表所示:

表格(a) 例如:





考虑另一种分类方法。假设 B_1 和 B_2 是两个不同分类,因此,B_1 所有的个体都是 B_2 的部分,反之亦然。

令 B_1 表示动物,A_1 表示脊椎动物,A'_1 表示非脊椎动物。令 B_2 表示根据动物的栖息地来分类,A_2 表示陆地生物,A'_2 表示水生动物。因此我们能得到四种不同的组合:

表格(b)

A_1A_2	$A_1'A_2$
A_1A_2'	$A_1'A_2'$

陆地脊椎动物(A_1A_2)

水生脊椎动物(A_1A_2')

陆地非脊椎动物($A_1'A_2$)

水生非脊椎动物($A_1'A_2'$)

因此,乘法 $B_1\times B_2$ 根据陆生或者水生并且脊椎或非脊椎对动物进行分类。正如皮亚杰所表达的:

$$B_1\times B_2=A_1A_2+A_1A_2'+A_1'A_2+A_1'A_2'$$

类型(a)是根据植物学和动物学分类中常见的叉状分枝来进行分类的。当皮亚杰谈到类的加法集合时,他脑海里就是这样的系统。

类型(b)是双向分类系统,表达了定性的对应关系,如上述在动物学中使用。这样的系统形成了皮亚杰类的乘法集合。

(三)命　　题

在(b)中,皮亚杰指出类的乘法和命题的合取间有一种对应关系,对于任何两种命题 p 和 q,每种的值或是或否。

同时组合这两个命题,我们得到

$$p\cdot q\vee p\cdot \bar{q}\vee \bar{p}\cdot q\vee \bar{p}\cdot \bar{q},$$

可以从下述图 2 中读出:

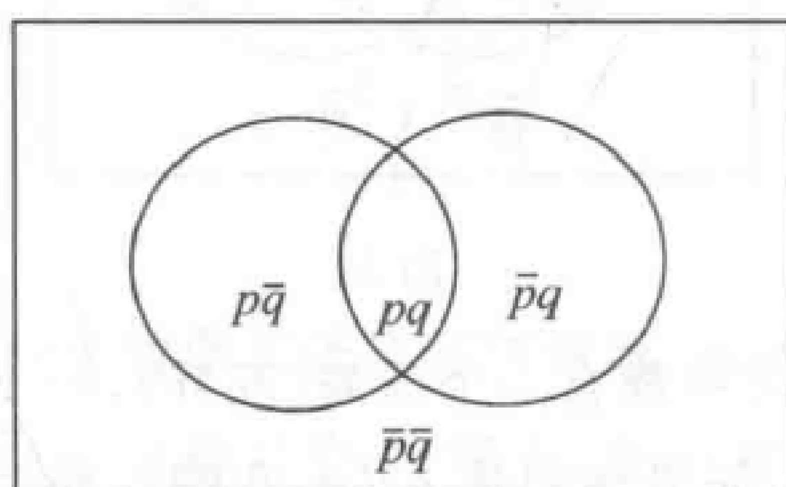


图 2

因为这些配对中的每个都或是或否,我们得到 16 种可能的配置。命题间每种类型的关系可以根据这些配置中的某个来表达。

例如:　$p\vee q=p\cdot q\vee p\cdot \bar{q}\vee \bar{p}\cdot q$　[$\bar{p}\cdot \bar{q}$ 非真]

$p\cdot q=p\cdot q$　[$p\cdot \bar{q}\vee \bar{p}\cdot q\vee \bar{p}\cdot \bar{q}$ 非真]

$p\supset q=p\cdot q\vee \bar{p}\cdot q\vee \bar{p}\cdot \bar{q}$　[$p\cdot \bar{q}$ 非真]

下述图中的阴影表示否定的结果,因此我们有:

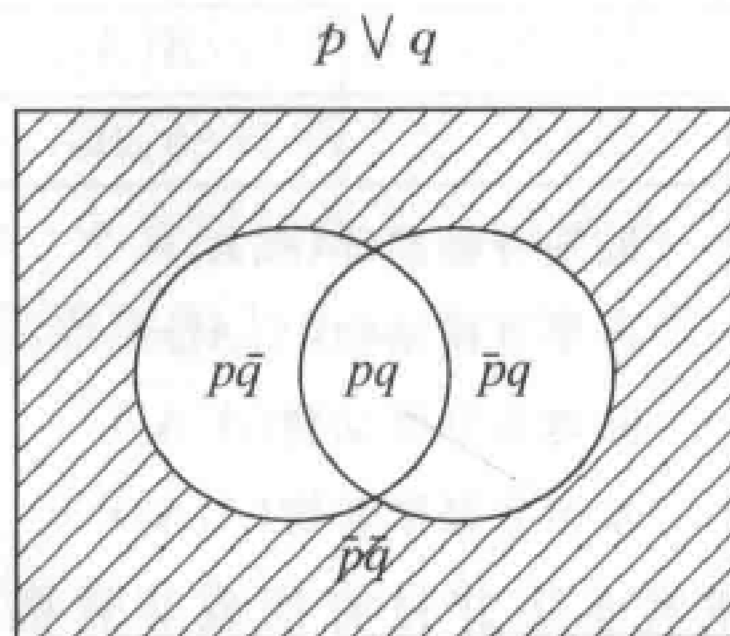


图 3

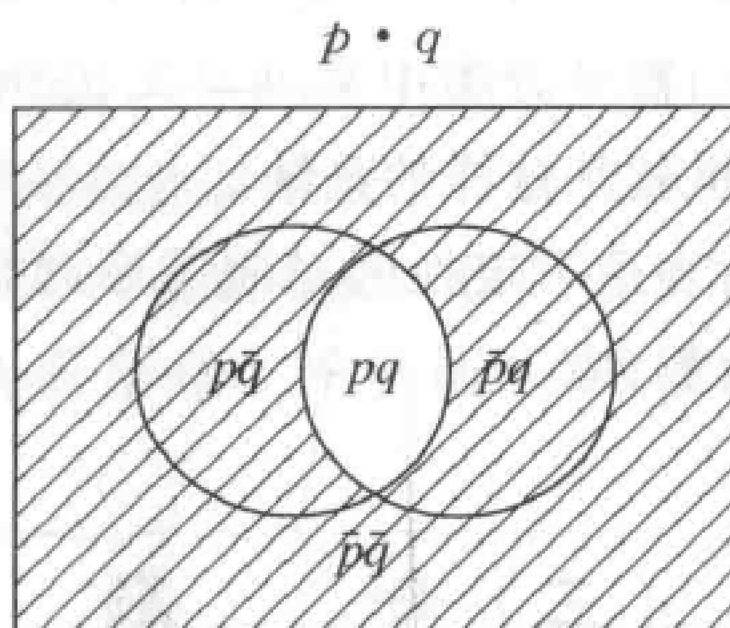


图 4

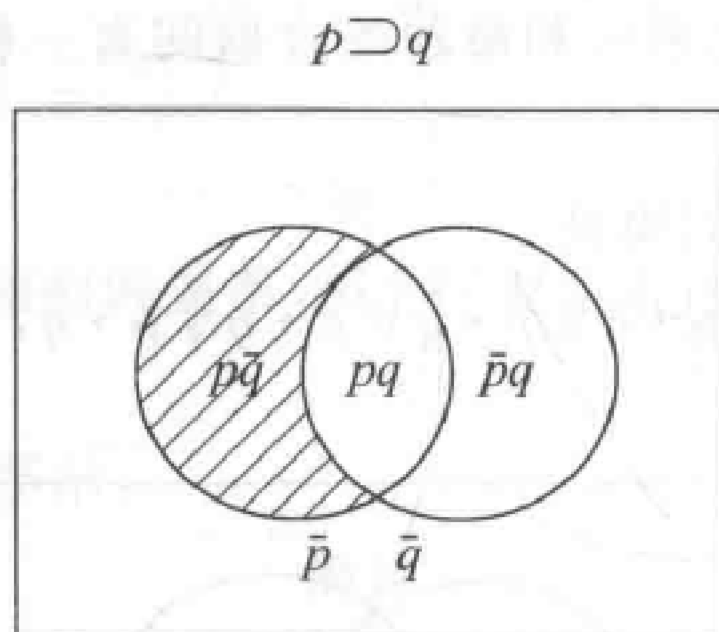


图 5

皮亚杰表明每个这样的关系都有一个反演（互补），一个互反和一个相关。

1. 反演（N）。举例来说，如果命题是 $p \vee q$，它的互补是 $\bar{p} \cdot \bar{q}$（如果我们否定 $\bar{p} \cdot \bar{q}$，得到 $\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$，我们就回到了 $p \vee q$）。

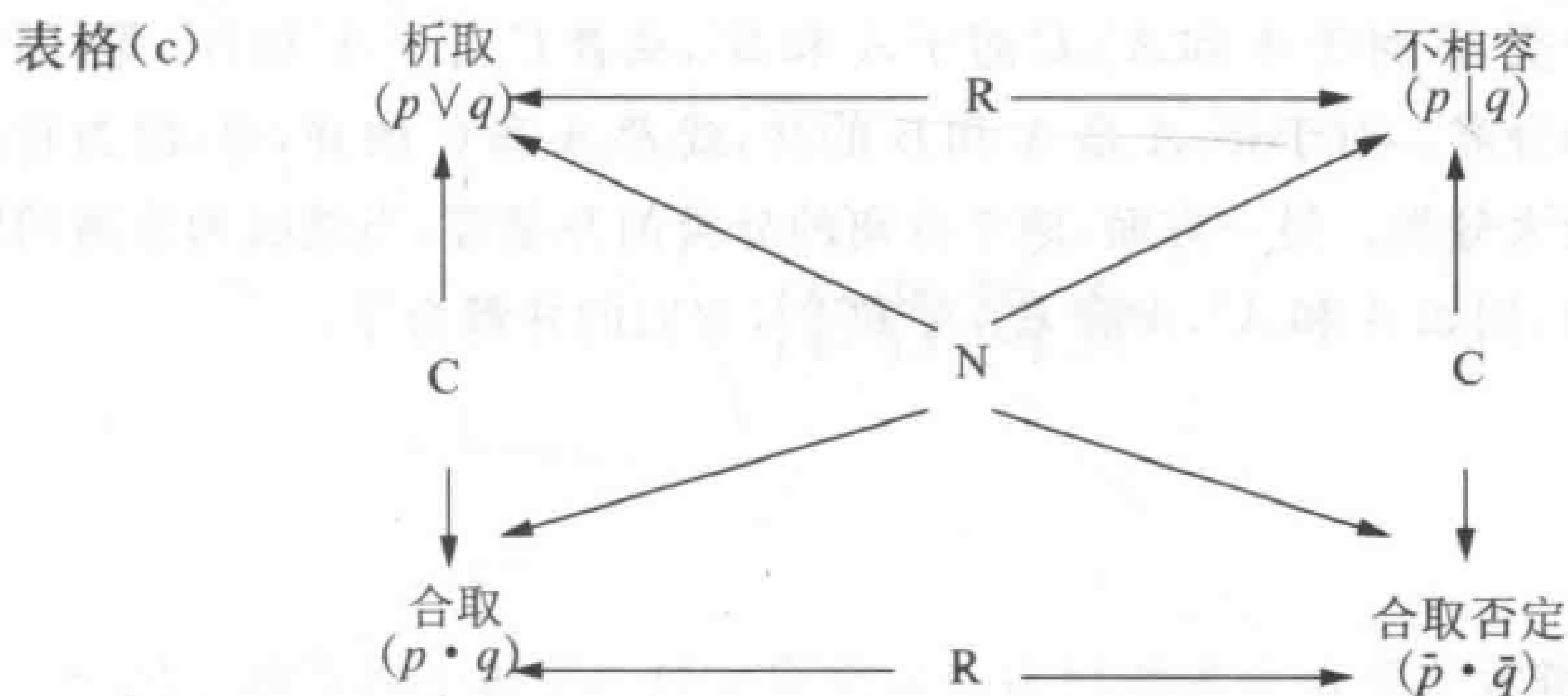
2. $p \vee q$ 的互反（R）是相同的命题但加有否定的标志，也就是 $\bar{p} \vee \bar{q}$。

3. 相关（C）是每当 · 出现时，我们用 ∨ 代替而得到的命题，且反之亦然。因此 $p \cdot q$ 变成了 $p \vee q$，且 $p \vee q$ 变成了 $p \cdot q$。

4. 同一性运算符（I）是当作用于任何命题时都保持它不变的运算。

下述表格（c），《逻辑通论》第 271 页，呈现了前三种运算是如何联系起来的。

表格(c)



（四）群

上述一套转换 N,R,C 和 I 组成了一个抽象群。群(《逻辑通论》第 92 页)的一个例子是以运算 $+n$ 为特征的正数和负数的系统(整数的加法)。

它遵循四个条件：

1. 系统的两种运算合成一种新的系统运算 $+1+1=2$。

2. 系统的每一种运算都能被一个反运算 $+2-2=0$ 所取消。

3. 存在一个且唯一一个恒等运算符(0),是每种运算与其反演的结果,因此当运用于任何运算时,不会改变原运算：

$$+1-1=0 \quad 和 \quad 1\pm 0=1$$

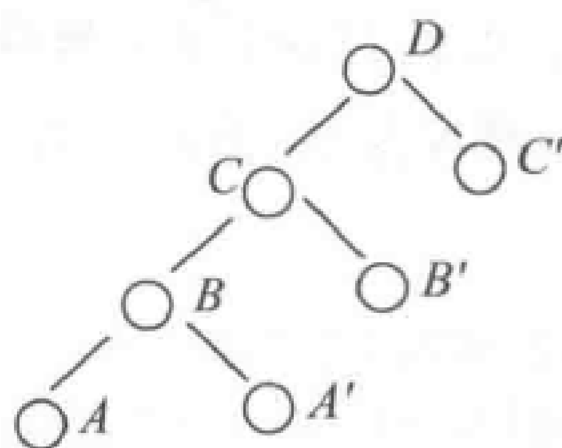
4. 运算是联合的 $(4+2)-3=4+(2-3)$。

（五）格

布尔代数可被视为某种抽象数学系统的特殊情况,称为格。格有一定的限制条件：交(join)和并(meet)。对于任意两种分类 X 和 Y,相交是同时包含 X 和 Y 的最小分类,相并是同时包含 X 和 Y 的最大分类。

下述分类系统[表格(d)]是皮亚杰在其《逻辑通论》第 95 页呈现的,可以视为一个半格。从一个元素引向另一个元素的分支意味着前者包含后者。

表格(d)



每对分类拥有一个交，B 对于 A 和 A'，C 对于 A 和 B'，或者 C 对于 A' 和 B'，等，因为它是包含两者的最小分类。对于并，A 是 A 和 B 的并，或者 A 和 C 的并，等，因为它是包含于两者之中的最大分类。另一方面，两个分离的分类的并是零，当然因为分离的定义（即它们互相排斥），例如 A 和 A'，A 和 B'，A' 和 B'，它们的并都为零。

作者简介

本书的目的不在于揭示心理学原理如何运用逻辑学给予形式化①,而是去研究逻辑技术在心理学现象自身中的应用,尤其是在不同认知发展水平中发现的思维结构。

这个问题与理论和实践都有关。

在理论上,很重要的一个问题是,逻辑描述的结构与心理学所研究的现实的思维过程之间存在哪种类型的对应关系。逻辑结构和运算是否与我们实际想的一切都能对应?实际的思维过程是否遵从逻辑规律?这些问题都没有确定的答案。

在实践上,逻辑学是如何推动心理学研究的,去探索这个问题非常重要。我们认为,逻辑学的主要价值并不在于其公理化的心理学原理,在这些理论的相对不够精确与逻辑系统演绎的严谨性之间仍然存在巨大的鸿沟。另一方面,逻辑符号可以帮助我们具体明确心理结构,并且将那些运算和结构以运算形式表达出来,这对我们的实际思维过程而言非常重要。心理学家毫不犹豫地运用数学方法来计算相关系数,比如因素分析等。现在,逻辑代数是广义数学领域的一个分支子系统,叫作"抽象代数"。它关注定性结构的特征与其数学属性毫无二致;现代数学家们越来越重视这些结构的重要性。从心理学家的角度而言,他们欢迎逻辑学的定性特征,因为它便利了对智能运算实际内在结构的分析,不同于对行为结果的定量分析。很多智力"测验"测量后者,而我们的真正问题是去揭示控制这些行为的内在的实际的运算机制,而非仅仅测量它。因此,逻辑代数能够帮助心理学家,当对思维的运算机制进行分析时,提供给他们一个精确的能够具体表征这些结构的方法。

这里举一个具体的例子:心理学家已经发现12岁的孩子可以发现基本的组合运算(通过2组合2,通过3组合3,或者通过4组合4,随机从彩色计数器中抽取,例如,从一个袋子里)②。孩子发现这些,当然不是因为他们掌握了其中涉及的数学范式,而是通过找到了一种完成组合的系统的方法,这些组合与其智能的发展处于相同的水平,在这个阶段他们开始使用命题运算(像 $p \supset q$,也就是,"如果,那么",或者 pq,$p|q$,等等)。然后,我们的疑问在于为什么这两种运算,虽然起初仿佛毫不相干,却在儿童的行为上同时出现。逻辑代数立即说明了这个问题:命题运算基于一个组合的系统,不包含比如

① 菲奇(F. B. Fitch)和赫尔(C. L. Hull)是致力于该形式化研究的最著名学者。

② 参见皮亚杰和英海尔德:《儿童概率概念的起源》,巴黎,1951(法兰西大学出版社),第七章。

类和关系等元素结构，这些结构是平均起来 7－12 岁的儿童所使用的。通过把运算结构转为逻辑分析，我们就可以很容易地解释为什么这些不同类型的行为同时出现。就这样，逻辑代数可以经常对心理学家的研究有所帮助。

然而，当前逻辑学家和心理学家之间的合作寥寥无几。确实，相互缺乏信任让合作困难重重。一个简要的历史性考察可以解释这一切是如何发生的。

第一章 问题的起源和现状

在19世纪，在布尔(Boole)、德·摩根(de Morgan)、杰文斯(Jevons)等人发展逻辑代数之前，在实验心理学成为一门科学之前，逻辑学和心理学之间不存在这样的冲突。经典逻辑学相信揭示思维过程的实际结构是可能的，并且外在世界内在的普遍结构同样是心理的标准规律。经典的哲学心理学认为，逻辑法则和伦理法则在每个正常个体的精神功能上也是内隐存在的。这样一来，这两类法则就不存在可以被质疑的空间。

但是，随着年轻的实验心理学的发展，逻辑因素被排除在外，智能主要被感觉、想象、联想和其他机制所解释。逻辑方法的实践并不成功，例如，思维心理学的符兹堡学派的一些成员曾经引入逻辑关系来完成判断过程中各种心理因素影响下的个体行为。

因此，逻辑学过去曾用于心理现象自身的因果关系解释。在心理学中对逻辑学的不合理的使用，被冠以“逻辑主义”的称呼，并且，心理学家普遍不信任逻辑学，主要归咎于他们害怕陷入这种倾向中。大多数当今的心理学家试图在不借助逻辑原理的情况下解释人类智能。

在心理学家努力将他们的科学与逻辑学划清界限的这段时期，现代逻辑学或“符号逻辑”的奠基者们也因为相似的原因要求与心理学划清界限。布尔代数的发明人布尔始终相信他描述的是“思维的法则”，但是这是因为他认为思维在本质上是代数学的。随着逻辑系统推演精确性和形式特征的增强，之后的逻辑学家其主要任务之一就是减少逻辑领域对直觉的任何依赖，也就是要减少任何种类的心理学因素。在逻辑学领域，当存在这些心理学因素的资源时，这种不合理性被称为“心理主义”。逻辑学家使用这个名词，专指不能被充分形式化的逻辑理论，就像心理学家用“逻辑主义”专指不能被经验充分检验的心理学理论。

如今大多数逻辑学家已经不再关注逻辑的法则和解释是否与心理结构之间存在任何类型的关联。20世纪初法国的伯特兰·罗素(Bertrand Russell)定律甚至宣称“运算”的概念在本质上是神人同形同性论，并且逻辑运算事实上仅仅是形式运算，与心理运算没有任何相似之处。因为逻辑学爱好严格的形式，逻辑学家已经不再对实际思维过程的研究发生兴趣。例如，伯奈斯(Bernays)所认为的，这些逻辑关系仅能严格应用于数学的演绎过程，因为任何其他形式的思维过程仅仅具有近似的特征。从完全形式化的公理逻辑的角度来看，毫无疑问他是无可置疑的。

当我们致力去揭示这些逻辑结构所反映的实体时，我们发现逻辑的更趋形式化基

于四种可能的解答，这些解答必须经过在心理学意义上的检验。

首先是柏拉图主义(platonism)。这种观点可以在罗素和怀特海早年的著作中窥见，后续影响了谢尔兹的工作，无论公认与否，这种观点是相当多的逻辑学家一直保留的理想主义。这种逻辑观认为宇宙是一种与主观体验无关的系统存在，逻辑的起源是非心理的。然而，我们还需要去解释，人类的心理又是如何发现这一宇宙的。柏拉图式的假设仅仅把这一问题搁置一旁，而没有帮我们在解决问题的方向上有所推进。

其次是约定论(conventionalism)的解释。这种观点认为逻辑实体的存在及其法则全靠一种约定，这一约定的系统通常为人们所接受。这一解释同样为我们留下未决的问题：为什么这些约定在其运用时会如此成功和惊人地有效？

再次是形式良好的语言(a well-formed language)的解释。约定的概念为这种说法留有余地。这种解释是维也纳学派首先提出来的，对逻辑经验论具有强烈影响。它把经验真理或非重言关系与纯粹句法关系或重言关系加以区分，借助于适当的语义学来表述经验真理。在这里是第一次，一个具有心理学意义的理论能够被经验检验。然而在心理学方面，它面临很多困难。

一方面，我们不能离开逻辑关系谈论什么纯经验或“经验真理”。换言之，经验不可能离开逻辑和概念的工具抽象地加以解释，也正是这些工具才使这种解释成为可能。在我们与英海尔德合作的实验中①，要求年幼的儿童回答倾斜玻璃试管的水平面是否是水平的，我们发现儿童在有能力建构一个空间参照系之前，不能理解水平的意义。为了建立这样的参照系，他们需要几何学的运算，在这些运算的建构过程中，逻辑运算是必须要用到的。

另一方面，在发展的整个时期，逻辑关系从来不是作为一个简单的语言或符号系统出现的；当它达于成熟之际，它实际上包含着一个运算的系统②。

例如，给5－8岁的儿童呈现一个放了20个木质珠子的打开的盒子(整体20个形成的类，用B表示)。大多数珠子是棕色的(形成分类A)，但是有些是白色的(分类A'，因此$B=A+A'$)。儿童需要回答一个简单的问题：“这个盒子里的棕色珠子还是木质珠子多？”按照日内瓦学派的规则，其答案会是这是一个经验的事实，即便最小的孩子也能够掌握。这个事实基于命题：“所有的珠子都是木质的，但是它们不都是棕色的”(事实是儿童会立即同意这两个判断)。我们还拥有一个逻辑关系的系统，通过这个系统这个“经验的事实”可以用精炼的象征主义的方式来表达，这种情况呈现了两个类之间简单的蕴涵关系，$A<B$，也就是说：“部分A小于整体B。”

现在，心理实验清楚地呈现了5—7岁的孩子不能建构这个$A<B$的蕴涵关系。他们根据自己对于事实的解释引导他得出(再次证明了对知觉信息的解释需要以先前的

① 皮亚杰和英海尔德：《儿童的空间概念》，巴黎(P.U.F.)。

② 在被试达到成年之后，这一点仍是对的。

逻辑考量为前提)因为 $A>A'$ 所以 $A>B$ 的结论。他的答案是:"棕色珠子(A)比木珠子多因为只有两三个白色珠子(A')。"这个答案实际的意思是:或者这个问题说的是总类(B),那么所有的珠子都是木质的,或者它说的是一个部分(A);但是如果总体被分成了它的部分,那么我们就不再有整体了。在这种情况下,总体就被还原为其他部分(A'),因此 $A>B$ 因为 $B=A'$。换句话说,儿童发现同时对总体和部分进行分析是困难的。如果他们考虑了总体,他们就忘记了部分,反之亦然。① 建构 $A<B$ 的蕴涵关系,平均 7 岁和 8 岁的儿童可以做到,这个年纪的儿童不仅仅能够对知觉信息进行口头的或者象征的转换,而且能进行运算的组合或去组合②:$B=A+A'$,因此 $A=B-A'$ 或 $A'=B-A$,因此 $A<B$。因此,逻辑关系不仅仅是传递物体经验特征的语言表达,它是构成性和结构性的可逆动作的产物,其中包含了对物体的成组和分组的实际操作。

我们不能接受逻辑仅仅是语言还源于第三个困难。如果这个假设是正确的,逻辑应该是儿童智能成长的必要因素。于是,我们会期待,一方面,对知觉事实有一种简单的解释;另一方面,同时期待对这些与语言本身同样基本的知觉事实有一种简单的语言的转译。但是如果说知觉需要一种包含逻辑关系的概念解释为前提,如果这些关系又要以动作和组织好的运算为前提,那么在知觉和运算之间就有一种相互作用,它是要花相当长的时间才能建立起来。因此,逻辑在思维中出现得相对晚些(与类有关的第一个运算平均出现在 7—8 岁;命题运算则要到 11—12 岁),这就显然与"逻辑与语言同样基本"的假设不符。例如,8—9 岁的儿童会表达铜棒 A 与另一个棒 B 重量相同,并且后者的重量与铅球 C 的相同,即 $A=B$,$B=C$。但是,他否认结论 $A=C$,因为根据过去的经验他预测结论为 $A<C$,并表达"B 当然与球 C 的重量相同,但是跟 A 比是不一样的"。因此,传递性仍然缺失在画面中(也就是说,这里没有复制形式模式),并且,只要重量关系一直未被初步的运算群(系列化等)所建构,这种状态就会延续下去。

这一点带给我们第四个也是最后一个逻辑关系的解释:运算主义(operationalism)。美国的布里奇曼(Bridgman)最初倡导,至今在很多国家有延续[例如,意大利的运算主义者运动,切卡托(Ceccato)等人为其成员]。运算主义解释不同于前述几种解释之处,在于它提供了逻辑与心理学真正结合的可能性。运算对于逻辑来说,具有不可或缺的作用,因为逻辑是建立在抽象代数基础之上,它由符号的运算所构成;另一方面,运算又是实际的思维活动,全部有效的知识都是建立在这种运算基础上的。

为了确定逻辑和心理学之间的关系,我们需要,(1)构造一个心理学的理论去进一

---

① 参见皮亚杰:《儿童的数概念》(劳特利奇 & 凯根·保罗),第七章。

② 对于集合的数学原理,成组运算指,比如,两个元素 A,A' 产生一个新的集合 B。相反地,分组运算指,当运用于集合 B,将它分成两个组成元素 A,A'。——译者注

步考察它的发生和结构；(2)通过把逻辑运算作为一种代数演算和结构化的整体①(structured wholes)来对待，以检测逻辑运算；(3)比较上述两点的结果。

① 对于结构化的整体(a structured whole)，"structure d'ensemble"皮亚杰指由一套普遍的规则所定义的元素的系统，就像定义群或格的规则。例如，一个逻辑群(见第26－28页)由一套五个运算的规则定义，在这个意义上，就形成了"structure d'ensemble"(因为规则将系统作为一个整体来定义)，因此也区别于个体的运算。——译者注

第二章 运算的心理发展

在心理学上，运算是可内化的、可逆的，与系统相协调的动作，其特征是系统整体所遵从的法则。它们是一组动作，因为它们在被加工为符号之前，是作用在物体上的。它们是可内化的，因为它们也可以不失动作本原特征地在思维层次进行操作。它们是可逆的，而简单的动作是不可逆的。比如，组合运算可以立即反转为分离运算，然而，在没有习得新习惯之前，从左到右的书写行为不能反转为从右到左的书写行为。最后，运算不是独立存在的，它们以结构化整体的形式相互连接在一起。因此，类的建构意味着一个分类系统和非对称传递关系的建构，一个序列关系的系统等。数字系统的建构同样是以对数值连续性的理解为先决条件：$n+1$。

从心理学的角度来看，这一运算系统出现的标准是恒定变量或守恒概念的建构。棕色珠子在木珠大类里，在此类包涵 $A<B$ 的情境（见 pp. 4－6）中，运算 $A+A'=B$ 和 $A=B-A'$ 的出现是以整个 B 的守恒为前提的。在运算形成阶段之前，一旦把 B 分为部分 A 和 A' 时，B 就被破坏了，因此会把守恒理解为运算可逆性的结果。

在运算建构的过程中有四个重要的阶段，从出生一直延续到成熟期。

1. 感知运动阶段（The sensori-motor period）（0－2 岁）。在儿童会说话之前，他们只会执行运动动作，没有思维活动，但是这些动作显示出一些智能的特征，正如我们通常理解的一样。例如，儿童会向着自己的方向抽掉一个被单，以便获取一个放在它上面的物体。

感知运动智能的特征不是运算性的，因为儿童的动作还没有以表征（思维）的形式被内化。在实践中，即便这种类型的智能也显示了一定的可逆性倾向，这已是在建构恒定变量的证据。

最重要的是，这些恒定变量是恒常客体建构的一部分。当一个客体被认为是超越感知觉的局限而持续存在，当它不再能被知觉到，被看见，或听到时，我们可以说这个客体获得了恒常性。最初，客体并不被认为是恒常的：当把物体隐藏或置于一个屏幕下方，婴儿就放弃寻找它们的任何企图。例如，用手帕盖住一块手表，儿童不是掀开手帕，而是撤回他的手。当儿童开始向屏幕后面看时，起初他不会注意到客体位置的连续变化。例如，如果儿童重新发现物体时物体在 A 处，他将一直在 A 处寻找，即便在物体已

经被移到 B 处之后。只有在第一年快结束时，客体在周围的空间域中才是恒常的。①

客体的恒常特性起因于空间域的组织，来源于儿童运动的协调性。这些协调性假定儿童能够返回到他的起始点（可逆性），并且改变运动的方向（结合性），因此它们倾向于“群”的形式。这种第一个恒定变量的建构，就是最早期的可逆性的成果。在感知运动空间的发展过程中，通过这样“位移群”的组织而获得平衡，亨利・庞加莱假定它为起源，但是实际上，是它最终的平衡形式②。因此，恒常客体就是被这样的群建构的恒定变量；在感知运动阶段，人们可以观察到智能可逆性和守恒的双重趋势。

2. 前运算思维阶段（Pre-operational thought）（2—7 岁）。接近 1 岁 6 个月到 2 岁，“符号化的功能”开始出现：语言、象征游戏（小说式虚构的开始）、延迟模仿和能够引起心理想象的内化模仿。作为符号功能的结果，“表象形成”也就是说从动作到思维的内化成为可能。智能起作用的领域大大扩大了。发生在儿童空间环境里的动作，是对过去已有动作的增加（像讲故事所引起的），而其他，比如在较远的空间里，物体的心理分化和集合物件分成部分一样等。感知运动阶段操作性的可逆性已经不再能满足所有问题的解决需求，因为其中的大多数现在需要明确心理运算的介入。

然而，儿童不能立刻建构起这样的运算，仍旧需要几年的准备和组织。实际上，在思维中正确地再生一个动作比在行为上实施要难得多。例如，2 岁的儿童，能够将其从一个地方到另一个地方的动作（当他在房间或者花园里走来走去）协调到一个群，当他来回转移物体时，他的动作也一样可以。但是，要他能够在思维中精确地表示它们，还需要漫长的时间；心理上再生的过程，例如，根据有关物体的记忆，一个房间或花园的布局，或者通过在思维中转动布局来转动物体的位置。

从 2 岁到 7 岁，一般来说，缺少可逆运算，并且守恒概念没有出现比感知运动阶段更高的水平。例如，当一个 4—6 岁的儿童把液体或珠子从一个玻璃瓶倒到另一个不同形状的瓶子里时，他仍旧相信后面瓶子里的实际数量在这个过程中增加或者减少了。如果它们的端点重合，他相信两根棍子长度相等；但如果我们把其中一根棍子推到另一根前面一点，他会认为这根棍子被延长了。如果把第三个物体放在两个物体之间，他相信两个物体间的距离改变了。当把相同部分从两个相同的整体数据中拿走时，如果其知觉特征是不同的，他拒绝相信剩余的是相同的。③ 在包含连续或离散数量的所有区域里，都有一个相同现象：当最基本的形式守恒缺失时，必然不存在运算的可逆性。知觉特征和逻辑之间一有冲突，这一点立即变得很明显。因此，儿童对量的判断缺少系统传递性。如果呈现两个数量 A 和 B，之后再呈现 B 和 C，他们认为每一对都是相等的

① 见皮亚杰：《儿童“现实”的建构》（德拉乔斯和尼特），第 1 章。

② 见皮亚杰：《儿童“现实”的建构》（德拉乔斯和尼特），第 2 章。

③ 完整解释见皮亚杰，《儿童的数概念》（劳特利奇 & 凯根・保罗），皮亚杰、英海尔德、斯泽明斯卡，《儿童的几何学概念》，巴黎（P. U. F.）。

($A=B$ 和 $B=C$),但没有认识到第一个量 A 和最后一个量 C 相等。

我们曾把这个阶段看作"前逻辑阶段"。艾萨克斯夫人、黑兹利特小姐和许多其他学者恰当地批评了这个观点,因为我们一些早期的证据在特性上太语言化了。所有的逻辑问题最初都起源于对物体的操作,从这个基本条件开始,我们现在可以说这个阶段是前运算阶段。如果我们考虑逻辑从根本上基于运算,我们的立场和他们完全相同;然而附加条件是,最初的运算平均在 7—8 岁间出现,以具体的形式(即它们在客体上实施),然而语言或命题运算在接近 11 和 12 岁才出现。

3. 具体运算阶段(Concrete operations)(7—11 岁)。前一阶段所出现的思维活动的各种类型,最终达到了"可移动的"平衡状态,也就是说,他们习得了可逆性的特征(能够返回到他们的初始状态或者起始点)。就这样,逻辑运算起源于组合、分离、排序动作的协调和对应关系的设立,然后习得可逆系统的形式。

我们仍旧只处理实施在客体自身的运算。这些具体运算属于类和关系的逻辑,但没有考虑到类和关系的全部可能转换(也就是它们组合的可能性)。因此有必要仔细分析这一运算,以便挖掘出它们的积极特征和局限性。

最重要的运算系统之一是分类或彼此间类的包涵:例如,麻雀(A)$<$鸟(B)$<$动物(C)$<$生物(D);或者我们可能会采取其他相似的类包涵系统。这样的系统(参见 285 页)允许下列运算:

$A+A'=B$, $B+B'=C$,等。(这里 $A\times A'=0$,$B\times B'=0$,等。)

$B-A'=A$, $C-B'=B$,等。

我们已经看到了为什么这些运算对于建构包含关系是必要的。

第二个同样重要的运算系统是系列化,或是把不对称传递关系连接成一个系统。例如,给儿童一定数量不相同的棒 $A,B,C,D,\cdots$ 要求按照长度的增加排序。如果棒是明显不相等的,就不存在逻辑问题,他可能仅靠观察建构一个系列。但如果长度上的变化很细微,在他们把棒排成这样的系列之前,他们需要一次比较两根棒,以下是我们观察到的表现。在 7 岁之前,一般来说,儿童无系统地比较着 B 和 D,A 和 E,C 和 G,等,然后不断改正结果。从 7 岁开始,儿童使用系统分析的方法:他寻找元素中最小的,然后是余下的最小的,以此类推,用这样的方法很容易地构造了系列。① 这种方式需要以协调两个相反关系的能力为先决条件:$E>D,C,B,A$ 和 $E<F,G,H$,等。如果我们用 a 代表 A,B 间的不同,用 b 代表 A,C 间的不同,用 c 代表 A,D 间的不同,等等,且用 a' 代表 B,C 间的不同,b' 代表 C,D 间的不同,c' 代表 D,E 间的不同,等等,我们有以下运算:

$$a+a'=b,\quad b+b'=c,\text{等等}$$
$$b-a'=a,\quad c-b'=b,\text{等等}$$

---

① 皮亚杰:《儿童的数概念》,第六章。

该阶段出现的其他系统有乘法的特性。例如，儿童能同时考虑两种特性来把同一客体进行分类，方的(A_1)或者非方的(A_1')，红色的(A_2)和非红色的(A_2')。由此我们可以构造一个双元列表或矩阵。下面是从乘法得出的四个单元格：

$$B_1 \times B_2 = A_1 A_2 + A_1 A_2' + A_1' A_2 + A_1' A_2'$$

用相同的方式，儿童通过使用不同类型的列表、对应关系而习得了乘法关系的能力。

这些不同的逻辑运算系统对于建构数的概念、时间的概念和运动的概念有着特别的重要性；在建构不同的几何关系（拓扑的、投影的和欧几里得几何学的）中也是如此。① 在这方面，特别有意思的是，分析正负整数系统和线性测量系统的建构是如何与类和关系的运算紧密联系的，但是所依据的方法有时完全不同于逻辑学家的方式。然而，对于我们当前的目标，没必要再赘述该建构过程的细节。

另一方面需要重点强调的是，相比于后一个阶段，在具体运算阶段使用逻辑技术所需要的所有条件，受限于两个重要方面。

第一个限制源于这个水平的运算缺乏形式化的特性。形式运算尚未完全脱离于它们所应用的具体数据。换句话说，运算在各个领域割裂地发展，导致了这些领域渐进发展的结构化过程，而没有获得完整的普遍性。

例如，当我们向儿童展示两个相似大小和重量的塑形黏土球，将其中一个塑形，看起来像香肠或煎饼，三种守恒问题出现了：(ⅰ)改变的球仍然包含着与未变的球相同的物质数量吗？(ⅱ)它们仍旧重量相同吗？(ⅲ)按照测量排除水量的方式测量体积，这个球仍有相同的体积吗？

第一阶段时儿童因为知觉特征的变化而否认物质守恒（通过这样的解释，正如“比之前有了更多的黏土，因为它更长了”，和“更少了因为它更细了”，等等），从 7－8 岁开始，物质守恒被认为是逻辑必然的，下面三个观点支持了这个看法：(a)物体仅仅是被拉长（或者缩短）了，而且很容易恢复到它原来的形状（简单的可逆性）；(b)物体被延长了，但它在长度上增加的就是在厚度上减少的（可逆成分的成分关系）；(c)并没有增加或者拿走什么（同一性运算把我们带回到了最初的状态，顺运算和逆运算的结果）。但是相同的这批儿童否认重量守恒，其理由和 7 岁以下儿童否认物质守恒的理由相似：它更长，或更细，等等。9－10 岁时他们承认重量守恒，也是通过证明以上(a)、(b)、(c)三个观点，论证方法和以前完全一样！然而，我们发现，相同的这批儿童在这个年龄否认体积的守恒，原因和他们之前否认物质守恒、重量守恒的原因完全相同。最终，当他们到 11－12 岁时，他们再一次用相同的三个观点来宣称体积守恒！②

---

① 皮亚杰：《儿童时间概念的形式》和《儿童的运动和速度概念》，巴黎(P. U. F.)。皮亚杰和英海尔德：《儿童的空间概念》，巴黎(P. U. F.)。

② 全面阐述参见皮亚杰和英海尔德：《儿童数量的发展》（德拉绍和尼斯特莱），1940。

如果我们用其他技术研究物质守恒、重量守恒和体积守恒，会得到相同的结果，①例如，通过在水里溶解一块糖或在水里浸泡爆米花。非常奇怪的是，对于所有的运算，我们发现都同样缺少对应关系。例如，7—8岁以后的儿童能够按照长度或尺寸把物体进行序列排序，但一般来说直到9—10岁，孩子们才可能按照重量进行序列排序(参见比奈-西蒙智力量表中重量的排序)。对于长度，7—8岁的孩子就开始掌握相等的传递特征，但对于重量，仅有9—10岁的孩子能够掌握，对于体积，11—12岁的孩子才能掌握。

总之，每种经验领域(外形和尺寸、重量等)依次通过具体运算群获得一个结构，并且按照这个次序建构起恒定变量(或守恒的概念)。但是这些运算和恒定变量不能同时在所有领域内被推广；这导致了在实际事件上的递进式建构过程，不同领域或内容主体之间出现了几年的时间间隔。因此，具体运算未能构成形式逻辑；它们是不完全的形式化，因为形式还未完全从内容中分离出来。

这个阶段运算系统局限性还体现在另一个方面——它们是断断续续的。在具体运算的帮助下，我们能够在客体间分类、序列排序、形成对等性或建立对应关系等，这些运算没有组合成一个单一的结构化的整体。这一事实也阻止了具体运算构成一个纯粹的形式逻辑。从心理学的角度来看，这意味着运算还未完全地达到平衡，且这将发生在接下来的阶段。

4. 命题或形式运算阶段(Propositional or formal operations)(从11—12到14—15岁)。运算发展的最后阶段大约始于11—12岁，在14—15岁达到平衡，一直延续到成人的逻辑。

第四阶段的典型特征是有能力通过假设进行推论。在言语思维中，这样的假设演绎推理是典型的，尤其是假设任意数据的可能性并由此进行正确的推理。例如，当儿童朗读巴拉德荒谬语句测验中的下列句子时："我很高兴我不吃洋葱，因为如果我喜欢洋葱我将会经常吃，我讨厌吃让人不愉快的东西"，具体阶段的被试会批评"洋葱也不是令人不愉快的"，"不喜欢洋葱是错误的"等这些信息。而这个阶段的被试不用讨论就接受这些信息，仅仅指出"如果我喜欢洋葱"和"洋葱是令人不愉快的"之间的矛盾。

被试不仅仅在语言层面应用假设推理。在实验室实验中，这个新增的能力对他的行为呈现出了非常显著的影响。在我的同事英海尔德女士用于研究物理推理的实验设置中，②命题阶段的被试跟具体阶段的被试表现得完全不同。例如，当给他们一个单摆，允许改变长度、摆幅、重量和起始点时，8—12岁的被试仅是无计划地改变这些要素，在得到的结果间进行分类、序列排序、建立对应关系。另一方面，12—15岁的被试

① 全面阐述参见皮亚杰和英海尔德：《儿童数量的发展》(德拉绍和尼斯特莱)，1940，第4、9章。

② B.英海尔德，《青少年的实验推理》。第13届国际心理学大会论文，斯德哥尔摩，1951，第153页。

经过几次试验后致力于明确表达所有影响因素的可能假设，接下来依照这些因素的功能安排他们的实验。

这个新的态度有如下结果。首先，思维不再遵从从实际到理论的路线，而是从理论开始以便建构或证实事物间的事实关系。不是仅仅协调真实世界的事实，假设演绎推理催生了可能命题的蕴涵关系，因此带来了可能性和必要性的独特综合。

然后，目前被试的逻辑不仅考虑客体还考虑命题。一个群集的命题运算，比如蕴涵 $p \supset q$（如果……然后），析取 $p \vee q$，不相合性 $p|q$，等等，就是这样构造的。必须强调的是这不仅仅是一个新的语言的表达形式，在具体运算阶段已经知晓了客体间的关系。这些新的运算，特别是这些涉及证明机制的，已经改变了整个实验的态度。例如，英海尔德女士已经呈现了一次只改变一个因素，其余因素保持不变的差异法，这个方法只出现在 12－15 岁间。① 很容易就能证明这个方法意味着命题运算，因为它假定一个组合系统，来自于其他的而非简单具体对应关系的建构。

命题逻辑尤为重要，因为它使得我们发现一些新种类的恒定变量，超出了经验论证的范畴。例如，在研究同一水平面上不同重量和质量的球的运动时，一些青少年能够按照阻力因素或静止因素来陈述问题。如果 q, r, s，等，分别代表摩擦力，空气阻力，等，p 代表球已经静止的事实，那么他们的推理如下，

$$p \supset (q \vee r \vee s \vee \cdots)$$

从$(\bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \bar{s} \cdot \cdots) \supset \bar{p}$（它的逆否命题）

因此这个推论（蕴涵的逆否命题）引导他们相信不存在造成球静止的因素介入[通过 $(\bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \bar{s} \cdot \cdots)$ 表达不存在它们]，这个运动将无期限地延续下去$(\bar{p})$，这是惯性原则的变形形式。

命题运算的建构不是第四阶段的唯一特性。这个阶段发生的最有趣的心理问题是运算或运算"格式"的新的群集出现了，表面上与命题逻辑没有明显关系，且其真实本质不是一开始就明朗的。

这些运算格式最初处理普遍性的组合运算（组合，排列，聚合）。在介绍 12 岁被试的能力时已经提到过，从袋子里随机取出筹码的实验中建构了所有可能的组合。还可以举出许多其他的例子。尤其是 12－14 岁被试以 $n \times n$ 所有可能的方式来搭配五种无色无味的不同化学液体，其中三种得到了有颜色的结果，而第四种能褪掉颜色，第五种是中性的。当低阶段的被试随机地混合这些液体时，年龄大些的被试能够进行系统尝试，并且严格地控制着实验的过程。

第二个运算格式是比例。我们已经从大量不同类型的实验（处理运动，几何关系问题，概率作为大量数据规律的函数，天平两边重量和臂长间的比例，等等）中得出 8－10

---

① B.英海尔德，《青少年的实验推理》。第 13 届国际心理学大会论文，斯德哥尔摩，1951，第 154 页。

岁的被试尚不能发现其中所包含的比例性。平均来说从 11—12 岁起，被试就能够建构出比例的定性格式，能够很快将其引到测量比例，经常并不是在学校里学到的。但为什么在这个阶段能够理解比例而不是更早呢？

另一个运算格式是力的平衡，我们可以很好地分析其建构过程，包括作用力和反作用力之间的相等。在连通器的系统中，活塞可以向水面施加压力，被试仅能通过区别四个过程来理解水平面的改变，准备好了运用运算来描述这个过程。(a)顺运算——即系统中压力增加是由增加活塞重量造成的；(b)逆运算——即压力减少是由移去活塞造成的；(c)互反运算——即增加液体的阻力，比如通过增加密度；(d)互反的反演——即减少液体的阻力。然而 14—15 岁的被试可以很容易地辨别出这四种运算并且正确地协调它们，年纪小的儿童不明白液体的压力，就像连通器水平所呈现的，与活塞的压力作用方向相反。

我们还需要提到另一个运算格式，跟概率、相关、乘法补偿等有关。刚刚提到的例子表明了它们如何被转化为逻辑运算。

因此，第四阶段包含了两个重要的获得。首先是命题的逻辑，它既是独立于内容之外的形式结构，也是将各种逻辑运算协调到单一系统的一般结构。其次是一系列的运算格式之间没有明显的联系，与命题逻辑之间也没有明显的联系。

第三章 逻辑的代数的运算结构

现在我们将去探究通过使用逻辑学提供给我们的运算技术,我们可以发现(或用逻辑学的方法建构)这些结构,而这些结构是否能与心理层面的运算结构对应起来。

然而,试图去比较这种心理结构和现代逻辑结构,我们所面临的困难好比于我们试图去比较儿童(或非专家的成人)的直观几何学和希尔伯特(Hilbert)的公理法几何学时所遇到的困难。尽管它们是有关联的,我们仍需要引入一个中介系统来辨别形式化不同的阶段以便厘清关系。

考虑到形式化,可以从两个不同的角度认识逻辑:(1)把逻辑视为一种运算代数(operational algebra),具备计算的程序及其结构等;(2)把公理的逻辑(axiomatic logic)视为真实条件的科学,或形式化自身的理论(我们称之为纯逻辑或者形式化逻辑)。

对于我们特定的研究目标来说,公理的逻辑是无用的。如果我们想要形式化心理学理论(theories),这可能是唯一适用的方法,但我们目前的目标是要解开心理的或内心的事实(facts)的逻辑结构。由于下述三个基本的困难,我们无法使用公理的或者形式化的逻辑。

第一个困难本身就足够了。它来自于即使是成年人的日常思维也是非形式化的。我们同意伯奈斯(Bernays)关于只有发展最成熟的数学思维才会允许公理逻辑的现代理论,充分识别其形式化过程。更不必说成人或者幼儿的思维是非形式化的。

第二个困难是公理系统的内在顺序在一些方面颠倒了运算建构的基因顺序。例如,从公理的角度看,类的逻辑是由命题得出的,从基因的观点来看,命题运算来源于类和关系的逻辑。同时,为了形式化,公理优于代数运算,从基因角度看,公理是意识本能或反射的结果,处于运算机制内在的第一位位置。

第三个困难在于公理逻辑的特性是原子的,并且其呈现的顺序必然是线性的。一个形式化的理论起始于原子元素(命题,类,运算,独立公理系统,概念模糊,等等),结束于基于这些原子元素所建构的封闭或完整系统。然而,运算机制有一种心理的存在性,且由结构化的整体组成,其元素联结到了一个周期性系统,不能消减为线性的推理。实际上,我们这里所讨论的,更加类似于一个涉及生物组织的系统,而不是线性的呈现序列。因此,我们对于精神生活的调查研究,必须从运算结构本身开始。

这三个困难促使我们在心理学和公理逻辑之间引入了一个中介物(a tertium quid),"心理逻辑(psycho-logic)"或者"逻辑心理学(logico-psychology)",与这些的关

联，就如同数理物理学与纯数学和实验物理学的关系一样。

物理学主要是研究物质世界的实验科学，它的真理标准与经验事实一致。另一方面，数学不是基于实验，也不是参考物理事实来说明的；数学是一种形式科学，其真理的唯一标准是符合严格演绎系统的内部一致性。物理本身需要解释就催生了数学在物理中的运用，也因此形成了数理物理学，数理物理学为其客体建构解释实验数据的演绎理论。

两条平行线并没有相隔太远，也不必隐藏心理学落后物理学几个世纪的事实，我们可以说，心理学，像物理学一样，也是一门实验科学，但也包括对于精神生活的研究，同时它的真理检验标准也要求与经验事实一致。另一方面，基于公理方法的逻辑是一门形式科学，它检验真理的唯一标准是演绎的严格性。

心理学中解释格式的需求促使我们把公理逻辑运用到心理学本身，用这种方法构造了心理逻辑。① 然而，它的任务并不是基于心理学的逻辑，而在于用逻辑代数学的方法构造一个演绎理论去解释心理学的一些实验数据。②

不用牵涉形式化逻辑的公理要求，现在我们将尝试去建构逻辑或代数格式，仅应用以下两个标准：(1)这些格式在逻辑上应该是有效的；(2)应该充分应用它们研究实验心理学的调查结果。

为了建构这样的格式，我们需要从最基础(elementary)的结构(不要与最普遍的混淆)开始，并展示通过哪些种类的运算可以从其中发展出更高级的结构。我们将从儿童智能发展过程中出现的第一个运算结构开始(阶段 3：具体运算)，并试着去解开相应的代数结构；然后继续到命题运算，最终返回到前运算结构。

基本群集(elementary groupements)。如果与格，或与命题运算特征的群集，或与其最普遍形式的类和关系运算相比较(布尔代数，等等)，阶段(3)类和关系的运算对应于我们称之为“基本群集”的简单结构，且被明确地限制在范围内。

简单分类(simple classification)(B 包括 A，C 包括 B，等等)。例如，基于由下面五种运算规定的系统：

(1) $A+A'=B$，$B+B'=C$，等等(其中 $A\times A'=0$，$B\times B'=0$，等)[组合(composition)]

(2) $-A-A'=-B$，等等，从 $A=B-A'$ 和 $A'=B-A$ 之中。[反演(inversion)]

(3) $A-A=0$。[同一性(identity)]

(4) $A+A=A$，从 $A+B=B$ 之中。[重言式(tautology)]

---

① 艾萨克斯(N. Isaacs)先生在他对我的《逻辑通论》，英国心理学通讯(1951)，第 185－188 页的评论中提出术语“心理逻辑”并解释它的意思。我认为这是对的，但遗憾的是，在写作时，我没有充分意识到对这三个学科的需求。

② 见皮亚杰：《公理逻辑或纯粹逻辑、运算逻辑或心理逻辑及其对应的现实》，方法论(米兰)第四卷，1952，第 72－84 页。

(5) $A+(A'+B')=(A+A')+B'$，但是 $A+(A-A)\neq(A+A)-A$。[结合性(associativity)]

我们看到元素的这种组合成类只能连续地(contiguously)实施，也就是说，通过连续的类包含，作为 A'、B' 的部分互补，等等。举个例子：

$$A'+C'=D-A-B'$$

同样地，在动物学分类中(遵循相同的格式)，类"麻雀"和类"蜗牛"加起来不等于任何基本的类，因为它们是互相排斥的。它唯一的意思就是："脊椎动物类不计除了鸟类的所有动物和不计除了麻雀的所有鸟类"+"无脊椎动物类不计除了软体动物的所有类和不计除了蜗牛的所有软体动物"。

这个"基本群集"的结构仅是一个半格(semi-lattice)，与同类中的同等级部分的并(meet)是零：$A\times A'=0$，$B\times B'=0$，等等。

因为它的结合性不是完整的，它形成了一个不完美的群，受限于赘余重复运算

$$A+A=A。$$

非对称传递关系的序列性(seriation)(或序列排列系统)呈现了一个类似的结构。如果我们用 a,b,c 等来代表各个项目的顺序和第一个项目(A 或 0)之间的差值，用 a'，b'，c' 等来代表每个项目与其直接后继项目的差值(即在每一对项目之间)。因此，$a+a'=b$，$b+b'=c$，等等，$b-a'=a$，$a-a=0$，等等。

在乘法群集中，比如类的一对一的乘法，通过以下运算来定义系统：

(1) $A_1\times A_2=A_1A_2$，$B_1\times B_2=A_1A_2+A_1A_2'+A_1'A_2+A_1'A_2'$，等等。[组合]

(2) $B_1B_2:B_2=B_1$(此处"$:B_2$"意味着"消除 B_2")。[反演]

(3) $B_1:B_1=Z$(Z 是通过消除包含内容 B_1 得到的系统中最普遍的类)。[同一性]

(4) $B_1B_2\times A_1A_2=A_1A_2$。[重言式]

(5) 运算(4)限制了结合性。

这里是交(join)(组成的类之间)，它不是普遍的，这里再一次缺少格的完整结构。

因此，我们能构造四个类的群集和四个关系的群集，这些呈现了具体运算心理水平的全部运算。我们不需要详细地提及它们，①但是需要指出的是，这些群集呈现了两种非常明显的可逆性形式。

(a) 反演，包括否定一个类($-A$)或一个类包含($:A$)。因此，一个运算与其反演的结果，或是零($A-A=0$)，或是最普遍的系统的类($A:A=Z$ 因为 A 是 Z 的细分，且如果这个细分被消除，我们返回到 Z)。

(b) 互反性，包括消除，不是一个类或类包含(再细分)，而是一个差异。一个运算与其互反的结果不是给我们一个零或一个普遍类，而是一个等价关系：$(A<B)+(A>B)=(A=B)$。我们已经用反演的语言表达过互反性，通过用 $a-a=0$ 的方式对它进

① 见《逻辑通论》，巴黎(科林)。

行形式化(对于序列)。

但如果 a 代表一个差异(例如 $A<B$),那么 0 代表零差异,就是说,我们再次得到相等值。

反演是与类的运算有关的可逆性的形式,而互反性是与关系的运算有关的形式。具体运算阶段不存在把这两种可逆性组合到一个单一系统的集合。从心理发展的角度来看,反演(否定或消除)和互反性(对称性)组成了两种可逆性,它们的开端在发展水平较低的阶段就能看到。在具体运算阶段,它们出现在两种明显的运算结构形式中(类的群集和关系的群集),且最终在命题运算阶段组成一个唯一的系统。

(一)从类和关系的"基本群集"到命题结构的过渡

类的乘法群集,举例来说,$A_1 \times A_2 = A_1A_2$,$B_1 \times B_2 = A_1A_2 + A_1A_2' + A_1'A_2 + A_1'A_2'$,等等,是由两个简单分类的乘法引起的。如果我们令命题 p 对应 A_1,命题 q 对应 A_2,命题 $\bar{p}$ 对应 A_1',命题 $\bar{q}$ 对应 A_2',那么乘法 $B_1 \times B_2$ 相当于:

类:$(A_1 + A_1') \times (A_2 + A_2') = A_1A_2 + A_1A_2' + A_1'A_2 + A_1'A_2'$

命题:$(p \vee \bar{p}) \cdot (q \vee \bar{q}) = (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$

结果编号: 1 2 3 4

命题运算就是这样通过 $n \times n$ 的组合建构了四种基本的合取。因此,两因素命题逻辑的二元运算构成了 16 种组合如下:

0; 1; 2; 3; 4; 12; 13; 14; 23; 24; 34; 123; 124; 134; 234 和 1234。

基本群集与形成命题运算系统的更高级群集的区别是,后者是基于组合系统的。基本群集还不具备一个完整的组合特性。例如,类或关系的乘法群集仅基于元素的乘法 2×2 或 3×3 等等,但不是在结果乘积的组合上(1 到 4 或者 1 到 9,等等),如同上述由 1 到 4 乘积形成的 16 种二元命题运算。另一种表明两种结构间根本区别的方式是基本群集仅基于单一项(包含的类 $A<B<C$,等等)或乘积项(乘法类 A_1A_2,A_1A_2',等等),而命题结构是基于集合论所谓的一套子集的全集(a set of all sub-sets),乘积 $n \times n$ 间的组合。

当然,我们可以很容易地建构这样一个组合系统,因此一套子集的全集仅使用分类的方式。然而,在具体阶段的心理运算,不会产生这样的建构;这就是为什么组合运算没有包含在基本群集中。

因此,我们会问什么样的运算产生这些组合,使得基本群集可能过渡到一套子集的全集,具备命题运算的特性。如果致力于建构跟心理结构同形的代数结构,我们不能仅仅遮遮掩掩地提出一个新运算。我们需要用前面运算的函数来解释它。

现在,组合系统仅是分类的普通化,用于 1,2,3 和 4 的乘积结果。在分类 $A_1 + A_1'$

$=B$ 中，我们可以用类 A_2 来取代互补类 A_1'（如果 A_1' 不是零），用类 A_2' 来取代 A_2 互补类 A_1，得到（如果 $<$ 代表类包含）：

$$A_1+A_1'=A_2+A_2'=B \text{ 在这之中 } A_2<A_1' \text{ 且 } A_1<A_2'。$$

这个运算，我们称为互相替换（vicariance），带来了在具体运算阶段就出现了的群集。例如，“（法国人＋非法国人）＝（中国人＋非中国人）＝（全部人类）”。把乘积 $p\cdot q$，$p\cdot\bar{q}$，$\bar{p}\cdot q$ 和 $\bar{p}\cdot\bar{q}$ 按照所有可能的方式分类，使用互相替换运算，我们获得一个 $n\times n$ 组合系统和一套子集的全集。

因此我们可以说，命题运算的典型组合结构形成了第二阶的群集，包括将互相替换所概括的分类应用到一套乘法群集的集合中。换句话说，基本群集是第一阶的群集：包含(a)简单的分类，(b)分类中的互相替换或互反代换和(c)两个或 n 个类的乘法。另一方面，将运算(a)和(b)应用于(c)的命题运算的组合结构，是第二阶的群集，因此，具备更一般的形式，对应于后期的心理结构。

（二）命题结构

与半格结构和不完整群的基本群集相比，命题运算所基于的“所有子集的全集”具有（完整）格和群的双重结构。格和群结构合称为一个遵循群集规律的单一系统，因为它是第二阶的群集，没有上述提到的限制（邻近关系，等等）。

没有必要再强调这一结构形成了一个交是 $(p\vee q)$、并是 $(p\cdot q)$ 的格。

与之相对的是，命题运算结构的“群”通常被忽视。现在这个结构遵从一个四种转换群（四组）的规律，从运算机制的角度来看，这个结构是非常重要的。

一个运算比如 $(p\vee q)$ 有一个与之不同的反演 N，即 $(\bar{p}\cdot\bar{q})$，集合 $(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$ 是其补集。它也有一个互反 R（不同的或者不是的），互反与否定命题相同的运算。在 $p\vee q$ 的情况下，互反 R 是不同的，是 $\bar{p}\vee\bar{q}$，也就是 $p|q$。最终，它形成了一个对射 C（不同的或者不是的），通过相应标准形式中（$\vee$）和（$\cdot$）置换产生的，这种情况下的对射是 $(p\cdot q)$。在这三个转换中增加同一性转换(I)，它们形成了一个交换的群：

(1) CR＝N，RN＝C，NC＝R 和(2) NRC＝I。

其他的例子是：如果 $\mathrm{I}=(p\supset q)$，那么 $\mathrm{N}=(p\cdot\bar{q})$，$\mathrm{R}=(q\supset p)$，$\mathrm{C}=(\bar{p}\cdot q)$。

如果 $\mathrm{I}=(p=q)$，那么 $\mathrm{N}=(p\ \mathrm{W}\ q)$，$\mathrm{R}=(\bar{p}=\bar{q})=(p=q)$，$\mathrm{C}=(\bar{p}\ \mathrm{W}\ \bar{q})=(p\ \mathrm{W}\ q)$，等等。

（此处 W 代表互反排斥运算 $p=\bar{q}$ 和 $\bar{p}=q$）。

因此，虽然我们发现可逆性的两种形式反演：(N)和互反性(R)组合在同一系统中，然而它们在基本群集领域是相互独立的。

为了显现命题运算格和群之间的紧密关系，我们可以把这些运算安排在一个表格中。该表格中的元素（从最上端左边，水平向右开始编号）是由四个一元运算组成。

$$q\cdot\bar{q}(=0),\ q,\ \bar{q},\ q\vee\bar{q}$$

乘以 p 或乘以 $\bar{q}$：

1(0)	2 $(p\cdot q)$	3 $(p\cdot\bar{q})$	4 $p\cdot(q\vee\bar{q})$
5$(\bar{p}\cdot\bar{q})$	8 $(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$	11$(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$	14$(q\supset p)$
6$(\bar{p}\cdot q)$	9 $(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)$	12$(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$	15$(p\vee q)$
7$\bar{p}\cdot(q\vee\bar{q})$	10$(p\supset q)$	13$(p\mid q)$	16$(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})$ $\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$

我们观察到：

（1）元素 8 到 16 每个都是同列最顶端元素和同行最左边元素的逻辑和（∨）。例如：8$(p=q)=2(p\cdot q)\vee 5(\bar{p}\cdot\bar{q})$。

（2）元素 1 到 3；5，8 和 11；6，9 和 12 是同行最右边元素和同列最底部元素的逻辑积（·）。例如：8$(p=q)=14(q\supset p)\cdot 10(p\supset q)$。

（3）每个元素与其反演 N 相对于表格中心位置对称：例如：2$(p\cdot q)$和 13$(p\mid q)$，或者 14$(q\supset p)$和 6$(\bar{p}\cdot q)$。

（4）每个元素与其互反 R 相对于对角线↘位置对称：例如：14$(q\supset p)$和 10$(p\supset q)$。

（5）每个元素与其对射 C 相对于对角线↗位置对称：例如：2$(p\cdot q)$和 15$(p\vee q)$。

（6）对角线↘上的元素（因此为 1，8，12 和 16）呈现了特征 I＝R 和 C＝N。例如：8 的 R 是 8，8 的 N 是 12，也是它的 C。

（7）对角线↗上的元素（因此为 7，9，11 和 4）呈现了特征 I＝C 和 R＝N。例如：9 的 N 是 11，也是它的 R，9 的 C 是 9。

我们可以构造一个相似的表格，包括同样的七种特征（一些其他的除外），256 种三元运算，65 536 种四元运算，等等①。

现在，我们可以从 INRC 群中演绎出一个逻辑比例系统（把我们自身限制于群转换中，且没有引入重复运算 $p\cdot p=p$ 或 $p\vee p=p$）。

在如下情况下，我们可以说这四种运算 α,β,γ 和 δ 是比例项：

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\quad \text{如果}(1)\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma\ \text{和}(2)\alpha\vee\delta=\beta\vee\gamma$$

并且如果在这两个方程式中，我们可以通过把$(\vee x)$转变到$(\cdot\bar{x})$或者把$(\cdot x)$转变到$(\vee\bar{x})$，以从一边转置到另一边。

因此，我们可以从(2)得出特征(3－6)，从(1)得出特征(7－10)：

---

① 参见《论逻辑运算的转换：256 个二值命题逻辑的三元运算》，巴黎，1952(P. U. F.)。

(3) $\alpha\cdot\bar{\beta}=\gamma\cdot\bar{\delta}$　(5) $\bar{\alpha}\cdot\beta=\bar{\gamma}\cdot\delta$　(7) $\alpha\vee\bar{\beta}=\gamma\vee\bar{\delta}$　(9) $\bar{\alpha}\vee\beta=\bar{\gamma}\vee\delta$

(4) $\alpha\cdot\bar{\gamma}=\beta\cdot\bar{\delta}$　(6) $\bar{\alpha}\cdot\gamma=\bar{\beta}\cdot\delta$　(8) $\alpha\vee\bar{\gamma}=\beta\vee\bar{\delta}$　(10) $\bar{\alpha}\vee\gamma=\bar{\beta}\vee\delta$

然后，我们观察到，在关系 I，N，R 和 C 中可以发现四种运算，它们总是要满足如下条件：①

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{N}}，例如\frac{p\vee q}{p|q}=\frac{p\cdot q}{\bar{p}\cdot\bar{q}}$$

因为(1)　$(p\vee q)\cdot(\bar{p}\cdot\bar{q})=(p|q)\cdot(p\cdot q)=0$

(3)　$(p\vee q)\cdot(\overline{p|q})=(p\cdot q)\cdot(\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}})=(p\cdot q)$等。

在被试不能用关系 I，N，R，C 进行群转化的情况下，比例性可以扩展到其中的元素中。例如，如果我们增加$(\cdot\bar{x})$到δ，那么我们能增加$(\vee x)$到α，但仅仅在x和α没有公共部分的情况下。同样地，如果$(\cdot\bar{x})$在δ中被消除，$(\vee x)$可能在α中被消除，条件是x整体是α的一部分。

从$\dfrac{p\vee q}{p\cdot q}=\dfrac{\bar{p}\vee\bar{q}}{\bar{p}\cdot\bar{q}}$中，通过在$\alpha$中消除$(\vee q)$，在$\delta$中消除$(\cdot\bar{q})$，并且通过在$\gamma$中消除$(\vee\bar{p})$，在$\beta$中消除$(\cdot p)$，我们能推断出$\dfrac{p}{q}=\dfrac{\bar{q}}{\bar{p}}$。

同样地，可能从前面的条件推断出互反比例系统：

$$\frac{\alpha}{\beta}=\mathrm{R}\,\frac{\gamma}{\delta}，如果(1)\alpha\cdot\delta=\mathrm{R}(\beta\cdot\gamma)；\quad(3)\alpha\cdot\mathrm{C}\beta=\mathrm{R}(\gamma\cdot\mathrm{C}\delta)；等等。$$

$$(2)\alpha\vee\delta=\mathrm{R}(\beta\vee\gamma)；$$

例如，$\dfrac{p}{q}=\mathrm{R}\,\dfrac{\bar{p}}{\bar{q}}$，因为$p\cdot\bar{q}=\mathrm{R}(\bar{p}\cdot q)$和$p\cdot q=\mathrm{R}(\bar{p}\cdot\bar{q})$，等等。

应该注意的是这些一元比例对应于数值比例：

$$\frac{p}{q}=\frac{\bar{q}}{\bar{p}}相当于\frac{nx}{ny}=\frac{n:y}{n:x}，并且\frac{p}{q}=\mathrm{R}\,\frac{\bar{p}}{\bar{q}}相当于\frac{nx}{ny}=\frac{x:n}{y:n}。$$

最终，在前述转换和推演的基础上，我们应该注意到从比例$\dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{C}}=\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{N}}$中，我们很容易就得到了下述众所周知的格理论的比例：

$$\frac{x\cdot y}{x}=\frac{y}{x\vee y}，例如，\frac{p\cdot q}{p}=\frac{q}{p\vee q}$$

以上的比例展现了与比例$\dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{C}}=\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{N}}$相同的特性，但其自然而然地遵从于所表明的情况，

---

① 翻译者的注释：举两个例子：

(1) $[\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma]\mathrm{I}\cdot\mathrm{N}=\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}$。举例来说$(p\vee q)\cdot(\bar{p}\cdot\bar{q})=(p|q)\cdot(p\cdot q)$。

(3) $[\alpha\cdot\bar{\beta}=\gamma\cdot\bar{\delta}]\mathrm{I}\cdot\overline{\mathrm{R}}=\mathrm{C}\cdot\overline{\mathrm{N}}$。举例来说$(p\vee q)\cdot(\overline{p|q})=(p\cdot q)\cdot(\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}})$。

$$p=(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\quad 和\quad q=(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)$$

我们可以很容易地列举出这个组合群和格结构的许多其他特性，特别是在256种三元运算的情况下，包含许多其他种类的转换。但是对于解释第二章所描述的心理运算，以上的阐述应该是足以说明问题了。

（三）英译者的注释

(1) 逻辑群集。不同于数学群（参见第268－269页），一个逻辑群集是通过五种运算来定义的[参见原理(1)－(5)，第285－286页]且包括赘余重复[原理(4)]的限制条件。在代数中，一个单元加上它自己会得到一个新的数 $1+1=2$，但重复一个逻辑元素仅会得到一个赘余重复 $A+A=A$。

(2) 16种命题运算的表格（第289页）。这和两个命题的真值表格是同形的，在这个表格中，所有可能的乘积都被列出。上述表格（一套INRC转换）中元素之间的关系组成一个交换群。

(3) 逻辑比例。这类似于斯皮尔曼的原理"相关的引出"[参见 Piaget，*Classes, Relations et Nombres*, pp. 97-99(Vrin, 1942)]。我们通过在两对代数比例（比如：$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$）模型上建构关系进行，如此一来，第一对中存在的关系会在第二对时循环发生，因此决定了第四项的选择。

第四章 结论:逻辑结构的心理学意义

我们已经在第二章从心理学的角度描述了运算结构,在第三章用逻辑代数的方式分析了一些结构,但是我们仍然需要表明两个系统间的关联,并且阐明代数结构可以如何运用于心理学的解释。为此,先阐述高级结构再回归到简单的结构会更方便。

(一)命题结构

为了完整阐述这些结构,我们需要呈现在12—15岁青少年的直觉思维中,两因素命题逻辑的16种二元运算是存在的。但此处已不必再举例,因为我们已经展示了青少年事实上确实运用了这些16种二元运算,也运用了一些三元运算或者更高级的运算。

此外,极其重要的是,被试可以从这些运算中的任何一个转换到其他运算。另一方面,当7—11岁的儿童面对物理归纳问题时,就像英海尔德女士的问题,会把自己局限在原始实验数据中。他会分类,把数据按顺序排列,建立它们之间的对应关系等等,但并不孤立所涉及的因素,也未开始系统的实验。然而,青少年经过几次初步尝试,致力于去发现所有可能的组合,选择正确的和丢弃错误的。在这一选择性活动的过程中,他直观地构造了一个组合系统。正是由于这个原因,他不断地从一个命题运算转换到另一个命题运算。每个实际问题情境的解决方法,就是从一整套可能的组合项里选出真正的组合项。

命题运算不会以不相关的离散运算出现在青少年的思维中,它们会形成一个系统或者结构化的整体。我们需要发现的是,被试是以什么方式获得这种结构的。

正如我们已经看到的,命题逻辑从可能的(即理论上的)到实际的,并组成真实的选项,这些形成了关于命题运算系统心理意义的非常简单的假设,从而进入到结构化整体的发展路径,如格或INRC群,这些运算特征会出现在孩子的心理活动中。

如果这个假设不被接受,我们可以给出什么样的其他解释?第一个假设,它们可能会被视为过去经验累积的产物。但这一说法似乎是不可能的,因为它们完全是无意识的。青少年对这种命题运算系统是没有意识的。他无疑会使用这些运算,但使用时并没有列举出来,也没有对它们或它们之间的关系做反应,他只是淡淡地怀疑它们形成了这么一个系统。对此没有意识,就像他在唱歌或者吹口哨的时候并不懂得音律。无意

识结构源自习得经验积累的这一观点,是完全不被接受的。

第二个假设是把这些结构视为思维的先验(priori)形式;对于这样的形式,如果它们存在,就能保持无意识,然而仍然影响着思维的发展。但如果我们真的认为是一种先验的形式,为什么会在这么晚的阶段才出现呢?

第三个假设将其视为某些神经连接后期成熟的产物(据我们所知,例如,把命题运算运用到神经网络是有可能的)。[①] 但如果逻辑的结构化的整体在神经系统中留下痕迹,那么在思考的时候,它们应该全部出现。这一点恰恰不是事实:只有这一结构的特定部分是实现的,其余的继续保持在可能转换的形式。

第四个也是最后一个假设,前文已经提过,格和 INRC 群可视为属于思维活动达到平衡的简单形式结构。起初,这些结构在心理上以一些具体运算的形式出现,但更重要的是,它们提供了一个可能转换的领域。

应该记住的是,一个平衡状态中所有潜在的转换与系统相互补偿的关系相兼容。从心理学的角度来看,逻辑结构恰恰对应于这个模型。一方面,这些结构出现在一整套潜在转换的形式中,包括所有可能实行的运算,少数已经开始实际运行的运算。另一方面,这些结构本质上是可逆的,也就是说,它们所允许的潜在转换通常是自我补偿的,是反演和互反的结果。

就这样,我们可以解释为何被试受此结构的影响却完全没有意识到它们。当从一个实际实施的命题运算开始,或尽力用这种运算去表达一个给定情景的特性,他不能随心所欲地进行。实际上,他发现自己处在一个由平衡定律支配的领域,进行转换或运算不仅取决于过去刚刚发生的,而是遵守涵盖过去的整体运算领域的规则,形成了一个部分。

我们现在可以理解运算格式(如组合、比例、机械平衡的格式)和命题运算同时出现的两难困境,被试察觉不到这种关联,心理学家因为忽视代数结构,也无法理解它们的关系。因此,运算格式被认为是实现了的结构,在命题运算的平衡形式中,暗示着结构化的整体所内隐的多种可能性。

数学组合运算是从一开始就系统形成的,不论具体的情况或问题是何时需要它。因为当被试整合实验数据时,尤其是当他选出所有可能适合这一数据特定排列的命题运算时,都与隐含的组合系统有关。命题运算的格所隐含的组合系统,是从运算建构中通过抽象抽取出来的,被试可以直观地获悉。因此,这个系统与命题逻辑出现在智能发展的同一水平,是不能归于偶然的。

机械平衡的概念也是只有在同一个时期才会被理解,除非所有数据都同时呈现在一个直观简单的系统中。我们在第二章中已经知道,被试难以区分这四个转换:动作的增加和减弱,反作用的增加和减弱。年幼的儿童不能理解反作用(例如对于活塞的压力

---

① 麦卡洛克和皮茨:《数学生物物理学通报》,第 5 卷(1943),第 115—133 页。

而言，液体的阻力），发生作用的方向与动作相反（阻力），但是一种施加在后者上的作用力（液体密度越大，活塞上升得越高）。为了能解决这一问题，儿童必须协调反演（增强或减弱作用力和反作用力）和互反性。事实上，反作用力被认为是等同于作用力的，但其发生方向相反，这就是一个典型的互反关系的例子。那么，我们可以很自然地假设，把这些反演和互反性协调到一个系统中的能力要基于对反演（CN）和互反性（R）逻辑关系的理解，因此有了 INRC 群。事实上，互反可以与反演有着相同的结果，没有必要再混淆；互反的反演（C）也能有与同一性转换（I）相同的结果。以上的假设，较低阶段的被试无法完成，这个阶段（12－15 岁）的被试，有大量数据支持其能够在不同的问题中协调四种转换 INRC。比如相对运动，要求预测一个在运动参考系中运动的物体，相对固定系统的位移大小（如在移动木板上蜗牛的位置变化）。① 如果掌握了命题逻辑，理解了 INRC 群，这一切似乎都会发生，当然不是仅仅抽象的（in abstracto）理解，而是能应用于各种问题。

正如我们所看到的，逻辑比例格式是这个"群"逻辑的重要应用。再次引人注目的是，这个格式就出现在儿童开始理解数学比例的这个发展阶段。因为数学比例在两个关系中是相等的，它们比命题比例更简单，可以不依赖它独立建构的说法毫无疑问将被否定。但以下两个事实需要注意。首先，如果儿童可以在没有命题运算系统的帮助下直接理解数学概念，那么有理由认为在具体运算阶段这些数学概念应该已经内隐地存在其思维中，因为分数的概念是从类包含中衍生的，两个分数的相等仅仅呈现了一种额外的微不足道的困难。

其次，在我们研究过的所有领域中，只有命题运算阶段的被试才能理解比例格式。而且，所有这些比例系统都是学校没有教过的，是儿童通过逻辑定性格式自己发现的。儿童首先注意的是一些补偿或对等关系。例如，天平上的重物可能增加同时到支点的距离却保持不变，或者距离增加但重量却不变。他随后就能够协调反演与互反，从而形成比例的定性陈述，他用测量进行验证，最终发现测量比例。

因此，此处需要解释的是这个预期的定性格式，这就是为什么我们相信，从心理学上来说，比例性起始于逻辑格式$\frac{p}{q}=\frac{\bar{q}}{\bar{p}}$或者$\frac{p}{q}=\mathrm{R}\ \frac{\bar{p}}{\bar{q}}$，它是基于 INRC 群的。

以上阐述通过事实验证将更加可信，在许多领域中，12－14 岁的被试不使用测量或其他的定量方式，得到了"乘法补偿"的定性格式，与比例格式非常相似。例如，在物体形状改变的任务中，为什么体积守恒只能在近 12 岁时才会被认知为普遍形式呢？原因在于，根据隐含比例性的乘法系统，一个维度的增加可以被另外两个维度中相应的减少所补偿。再次说明了推理是依赖于预期格式的，它与先前的格式的关联是相当明显的。

---

① 皮亚杰：《儿童的运动和速度概念》，巴黎（P. U. F.）。

还可以给出一些其他的例子，比如组合概率（假设通过这样的组合，同时带来可能性和事实），相关性（基于四种合取 $p \cdot q, p \cdot \bar{q}, \bar{p} \cdot q$ 和 $\bar{p} \cdot \bar{q}$ 的量化），等等。但是此处我们不必再深究细节。

上文证明了以下结论：命题运算的建构伴随着被试执行运算能力的系列变化。我们已经证明他所习得的不同格式不是仅仅意味着孤立的命题运算，同时也意味着命题运算所特有的结构化的整体本身（格和 INRC 群）。结构化的整体，被视为被试运算行为的平衡形式，因此在心理上是至关重要的，这就是为什么这种结构的逻辑（代数）分析为心理学家提供了必不可少的解释和预测的手段。

（二）具体运算结构和前运算结构

然而，代数逻辑的应用不限于命题运算水平心理活动的分析。具体运算阶段建构的八个类和关系的群集，对于更早期阶段的行为研究有着同等的价值。这个阶段的心理学议题是建构这种思维模式中所有可能运算的目录，其中格结构所隐含的组合系统还是不相容的；并解释为什么这种思维模式无法实现独立于其内容的普遍化形式化机制。八个群集的系统回答了这两个问题。首先，它提供了一个详尽的具体运算目录，其数量不是任意的，而是由如下方式计算出来：类和关系（2），加法和乘法（2），对称和不对称（2），因此 2×2×2＝8。其次，我们有了八个相互依赖的系统，而不是一个统一的系统，使得我们需要从一个运算跳转到另一个，这一点解释了普遍化形式化机制的缺失。

在具体阶段（7－11 岁），基本群集，如命题运算的群与格结构，弥补了运算行为中的平衡形式，但这个平衡缺少稳定性，覆盖的领域缺少扩展性。因此我们需要找到这个平衡是如何形成的。尽管我们知道在前运算阶段（2－7 岁）最终平衡已经得到了准备和部分地组织，我们仍然需要呈现前运算水平的什么机制是未来运算的前兆。

我把这些机制叫作“规则”。它们被理解为部分补偿或部分返回到起始点，伴随着最初活动方向改变的补偿性调整。在感知运动领域（知觉，等等）可以发现这些规则，它们越来越多地控制着操作运算水平的表征。例如，当我们拉长一个香肠造型的黏土模型时，儿童认为材料的数量有增加。最后变得很薄时，他就会得到这样的印象，解释为材料的数量已经减少了。

这些适用于知觉和表征领域的规则还可以用逻辑代数给予形式化。我们需要做的就是采用群集的方式去表达转换，视不同情况通过增加“非补偿转换”$+P$ 或 $-P$ 把不相等的逻辑结果转换到相等。

这种形式化的特定优势是它呈现了知觉或表征所发生的变化（不可逆或不完全可逆的）和运算典型的可逆转换之间的差异。例如，我们已经在知觉的分析中使用了这个方法，尽管缺少了加法组成和逻辑一致性，这是这个阶段经验的特征。7－8 岁水平所

具有的具体运算,可以被视为当他们实现平衡状态时这些规则的结果,在这个点,平衡达到了完整的补偿。换句话说,在实现完全可逆性时,"规则的表征"事实上转化为了运算。因此,这是规则平衡的最终形式,类似于在伺服机构中,只要存在不平衡,就会自动进行反馈(规则性)操作,并且一旦达到平衡,就会呈现出群的形式。

因此,即便在这些逻辑没有规范地发挥作用的领域中,也存在逻辑结构的前兆轮廓结构(outline structures),并可以用逻辑代数的方式给予形式化。从比较的角度来看,这些轮廓结构是非常有意义的。不难理解,普遍化的理论结构将在未来某日出现,这将允许我们去比较的分析带有不同发展水平特征的结构。这将把低水平的轮廓结构与发展到高水平的逻辑结构关联起来。逻辑代数应用于神经网络的描述,还应用于控制论模型,这些都表明了这样一个项目并不是不可能的。

虽然上述讨论只关注于智能发展特定阶段的儿童和青少年,但是如果它可被视为对此类研究有所贡献,我会倍感欣慰。

儿童早期逻辑的发展

——分类和系列化

〔瑞士〕巴蓓尔·英海尔德　〔瑞士〕让·皮亚杰　著

陆有铨　译

儿童早期逻辑的发展——分类和系列化

法文版 *La Genèse des Structures Logiques Élémentaires: Classifications et Seriations*, Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, 1959.

作　者 Bärbel Inhelder, Jean Piaget

英文版 *The Early Growth of Logic in the Child: Classification and Seriation*, London, UK: Routledge & Kegan Paul, 1964.

英译者 E. A. Lunzer

陆有铨　译自英文

本书中文版曾由山东教育出版社出版(1987年),现按原中文版本收录于本文集,有改动。

内容提要

本书主要研究处于感知运动阶段、前运算阶段和具体运算阶段的儿童动作思维和运算思维的特征，并以某些数学模型，如群集结构，加以形式化。本书对感知运动阶段的逻辑发展予以细致地刻画，区分出从反射动作到新方法的顿悟等一系列发展的亚阶段，特别是提出了关于稳定性客体的概念，以及与此相应的位移群的解释模型。

关于前运算阶段的行为特征，皮亚杰指出它因为缺少可逆性而呈现出“半逻辑”的性质，即所谓单向思维的特点。

本书的主要贡献还体现在对从动作向运算的过渡条件，指出运算必然具备的四个特征，即：运算是一种在心理上进行的内化的动作；这种内化动作而且是可逆的；一个运算总须以某种守恒性存在为前提；运算总是成结构或系统的。

对具体运算思维的刻画，皮亚杰主要采用了类与序列这两大系统作为它心理逻辑的过程，并以思维可逆性作为编制具体运算心理逻辑的工具。以可逆性为指标和维度，来刻画早期儿童逻辑思维的特点以及实现从动作思维向运算思维的过渡指标，是皮亚杰整个心理逻辑学中最重要的贡献之一。

本书综合了皮亚杰和斯泽明斯卡合作的研究工作，得之于 2159 名儿童的实验结果，其中第一至第八章研究分类，第九至第十章研究序列。为了阐明分类和序列的运算逻辑机制，作者考察了这些结构的起源和变化，以及引起变化的原因，以期进一步阐明这些结构的发展和演变过程。

根据本书英译者的序言，阅读本书时，关注这样几个关键词将有助于对全书内容的理解：分类与推理；协调；两种推理水平。最后，本书的一个写作特点值得读者关注：作者对中心论题的陈述是简要的，其余部分则是作为参考材料而不是作为中心论题的引申而设计的，所以，建议读者先看结论。如果读者想要寻找证明论点的理由，则可以返回查阅正文。

李其维　蒋　柯

目　　录

著者前言/305

英译者导言/307

Ⅰ. 分类和推理/307

Ⅱ. 协调/311

Ⅲ. 两种推理水平/314

著者导言/319

1. 语言/320
2. 成熟/322
3. 感知的因素/322
4. 感知-运动格式/327

第一章　图形的集合/331

1. 问题的初步陈述/331
2. 用平面几何图形实验所得到的一般结果/334
3. 图形集合和分类之间的连接:利用几何图形的进一步的说明性材料/341
4. 将小玩具加以分组过程中的“相似”和“附属”/347
5. 结论:图形的集合乃是综合内涵和外延的最初尝试/354

第二章　非图形的集合/357

1. 问题的陈述:附加分类结构的标准/357
2. 几何模型构成的非图形集合/360
3. 描述性物体构成的非图形集合/365

第三章　“所有的”和“有些”:类包含的条件/368

1. 运用于形状和颜色的“所有的”和“有些”/369
2. 运用于排除试验的“所有的”和“有些”/382
3. “有些”的绝对用法和相对用法/396
4. 结论:“有些”和“所有的”,包含以及内涵与外延之间的关系/404

第四章　类包含和等级的分类/406

1. 对于(混杂于其他一些物体的)花的分类/407

2. 对于动物的分类/415
第五章 补充类别/423
1. 实际背景下的单类/424
2. 分类和类别的相对规模/429
3. 在被迫的两分法中的"辅助"类别/432
4. 否定/439
5. 补充种类的包含和两重性原则/444
6. 空类/447
7. 结论/450
第六章 倍增的分类(矩阵)/452
1. 问题的陈述/452
2. 矩阵测验,Ⅰ:结果/455
3. 矩阵测验(标准化的过程)/459
4. 自发的交叉分类/464
5. 自发交叉分类的继续/470
6. 简单的倍增(或相交)/474
7. 附加和倍增/482
8. 倍增类别的数量关系/485
9. 结论/491
第七章 事后认识和事前预见的机动性/493
1. 由增加新成分而引起的重新分类/494
2. 标准的变化要求对既存分类作重新安排/503
3. 不完全的自发分类中标准的预见、实施和变化/511
第八章 通过触觉而觉察到的成分的分类/525
1. 实验的过程/525
2. 阶段Ⅰ:已知成分的选择和图形的集合;无事前预见和无完全的分类/527
3. 阶段Ⅱ:非图形集合;首先通过尝试与错误,然后通过预见而发现的单一标准;发现其他标准的困难/530
4. 阶段Ⅲ:两种或三种标准的预见;结论/534
第九章 序列/538
1. 问题的陈述/538
2. 序列和对于用看见的成分构造序列的预见/540
3. 触觉序列及其在绘画中的预见/549
第十章 倍增的序列/557
1. 实验的过程/557

2. 阶段Ⅰ:没有真正的序列/558
3. 阶段Ⅱ:基于一个或两个特征的自发的序列,但不能对二者加以倍增的综合/559
4. 阶段Ⅲ:成功的倍增/561
结论/566

著者前言

或许应该感到抱歉，因为我们又把另一本书强加给耐心的读者。然而，在某种意义上说，这乃是一本早就该写的书。当我们在别处讨论儿童关于数、量和空间诸方面关系的思维的发展，论及或然性概念和归纳推理时，我们就已经谈到过基本的逻辑运算的形成了。不过，这些结构本身的发展应该加以单独的研究，而且，从逻辑的观点来看，我们也应该从这种研究开始。不过，在研究刚开始时就出现的那些问题，往往需要延迟到较晚的阶段才能得到解决。

请读者原谅的第二件事是，人们常常指责我们仅在10个或20个事例的基础上著书或提出一些理论。这本书是个例外，它包含了一些详细的统计表格并准确地指出了受试者的数目。

应该强调的第三点是，我们对于中心论题的陈述是简要的，其余部分是作为参考材料而不是作为中心论题的引申而设计的。所以，我们建议读者先看结论。如果读者想要发现证明这个或那个论点的理由，则可以查阅本书的正文。最后（不过，只有当读者感到必须要阅读全书时），可以翻阅著者导言，以便发现我们之所以选择这些问题的原因。事实上，我们是试图从结论开始，而把导言作为附录。不过，我们可能会受到这样的指责——在收集和分析作为论据的事实之前，头脑中就已经有了结论，实际上这些结论乃是八年实验工作的成果。

英译者导言

《儿童早期逻辑的发展》与该书作者最近发行的许多用英文纂写的著作是不同的。在这本著作中，实际的实验同现实生活情境思维发展的联系，非专业工作者可能认为并不太明显。但是，人们只要稍微仔细地考虑一下就会发现，本书对于儿童思维的研究实际上有着极其重大的贡献。而且，它的心理学含义和教育含义也是相当深远的。

I. 分类和推理

本书的副标题是"分类和序列"。它的目的是详细地检查一下这两种分类的起源和发展。心理学认识到基于统一标准的分类和范畴的重要性至少已有三十年了，本书作者在做出结论的那一章中也提到了许多有关的研究。维纳克(Vinacke)①也很好地考察了大多数的这些研究。但相对说来，有关儿童分类行为起源方面的研究还是比较少的。即使是现在，诸如黑兹利特(Hazlitt)②、汤普森(Thompson)③和安尼特(Annett)④等许多研究者也只是局限于从经验上来确定儿童在不同年龄能够进行分类或交叉分类的程度。与此相对照，本书的作者所企求的是比较深刻地揭示在许多情境之下作为分类行为发展之基础的那种心理机制。换言之，许多这方面的著作所涉及的主要是对于儿童行为的描述，而本书则首次试图以发展的观点来对这种行为作彻底的解释。与此同时，英海尔德和皮亚杰尤其注意确定儿童的分类和作为儿童分类基础的那些推理类型之间的精确关系。

为了正确地评价根据推理所做的明确分类，人们或许一开始就要考虑这么一个判断，即一把椅子能够漂浮或烧毁，因为它是用木头制成的。[参见下面一个从苏珊·艾

---

① W. E. 维纳克：《思维心理学》，麦克格罗-希尔出版社，1952，第七章。

② V. 黑兹利特(1930)：《儿童的思维》，《英国心理学杂志》第20卷，第354—361页。

③ J. 汤普森(1941)：《不同年级儿童在分类测验中概括的能力》，《心理学杂志》第11卷，第119—126页。

④ M. 安尼特(1959)：《儿童和成人对于四个普通类概念的分类》，《英国教育心理事杂志》第29卷。

萨克斯(Susan Isaacs)①的记录中引来的推理事例,“弗兰克(5 岁 7 个月)的一把剪刀从阳台上掉到楼下,他说道,‘它不会跌碎的——它是金属的’。”]这样一个论据,可能体现了一种从给定“用物”的一个特性——木头——中所做的对于物体的抽象,人们可以据此来期待“所有木制物体”都共同具有这些特性,而不管它们外形是否一样。一个必然的结果是,一把金属的椅子将会下沉,尽管它作为经验的功能成分的直观形状同一把木制椅子的联系要比同一把剪刀的联系密切得多。不过情况并非一定如此。儿童可能作这样的推理:木制物体会漂浮,椅子是木头的,椅子会漂浮,金属椅子(还没有充分地把它同其他的椅子区别开来)同样也会漂浮。证据表明,他们并未作这样的推理。不过儿童可能会继而作如下证明:“所有的椅子都会漂浮,只有某些椅子不会漂浮”。下面的几章,尤其是第四章,大量地描述了在年幼儿童的思维中,对于“所有的”这个词的使用是如何始终存在着另外的例子。

某种类型的分类,乃是内含于许多的动作以及所有的判断之中的。例如,如果一个儿童走进放着一把椅子的房间并称之为“椅子”,或者他做出某种动作(坐在它上面)以暗示他认识到这是一把椅子,那么,作为观察者,我们就有理由做出如下推论——在一定意义上说,他已经把这个物体归入椅子这一类别中去了。但是这种类型的“前分类”,乃是发展中的动作的一个发展着的部分,皮亚杰称之为“识别的同化”。由于同样的原因,儿童可能会把椅子作为一种支垫物而站到上面并由此而爬上阁板。但是,作为一种可以坐在上面或站在上面的物体,这把椅子所独有的特性将按照这个时刻的需要而加以指定。作为同一物体特性的这两种性能(用途)决不会在同时都认识到。由于同样的原因,对于儿童来说,这把椅子与其他一些椅子的相似性是不明显的;在那些连续的、涉及一些虽不相同但较相似物体的场合下,观察者能够看到儿童行为的相似性,但只有对于这位观察者来说,它才是明显的。之所以如此,是因为当观察者在回忆这些场景时,他也就是在把它们合并到一个单纯的注意到的行动的范围之内。而对于儿童来说,它是不明显的,因为这几个动作是连续发生的。

稍微过一会儿我们就可以发现,儿童将认识到,椅子是一件家具,而且可以从家具店里买到。这里的分类比较明显些,而且它也从作为一个整体的动作(如看商店橱窗的动作)中稍微分离开来了一些。然而,单单这个判断本身就包含有一些对于从直接实践经验过程中逐渐形成的“椅子”这个概念的抽象。

我们可能还会附带地注意到下列两点。第一点是人们可能在很早的时候就认识到,事物可以归类于一些具有比较广泛概括性的范畴(如椅子归类于家具,苹果归类于水果等等)。事实上,布朗(Brown)②曾经非常合理地表明过,人们总是教儿童用一个单词来称呼一件物体,这种把物体归类于人们给予儿童的第一个单词的概括程度,乃是

---

① S. 艾萨克斯:《年幼儿童的智慧发展》,第 146 页。

② R. G. 布朗:《如何称呼一件东西》,《心理学评论》第 65 卷,1958,第 14—21 页。

随着人们要求儿童或期望儿童具体鉴别一种类型物体的程度而变化的。例如，如果把狗从猫或其他物体中辨认出来是重要的，那么，他很可能就去学“狗”而不是“动物”这个单词；同样地，他将学“钱”这个单词，而不是学各种硬币的名称；由于“费多”和“㹴”①比“狗”的概括性差些，故这些词汇（和类别）一般将在晚些时候学到。

第二点是，事物可能同时属于两个范畴，其中一个的概括性广泛些，而另一个则较狭窄（例如，一样东西既是梨，又是水果），上述认识肯定表示了纯粹识别同化（我们将在最后一节中考虑它）方面的进步。然而，这种分类判断本身并不足以保证成为正确推理的基础。要使这种分类能够为正确的推理和辩论提供一个基础，那就要满足这一条件，即对于一些特性要作适当的抽象。由于有了这种抽象，一个类别的成分也就归属于另一个具有较高概括性的类别，而不是颠倒过来。

相对说来，年幼儿童的推理很少有明显的分类，而且就分类而论，成人的日常推理也是如此。这种类推（它有时不甚确切，有时则比较精当）指导着我们的思维，但它本身乃是一种分类的（或前分类的）活动。如果我们想再次参考一下苏珊·艾萨克斯关于儿童偶然推理的描述，我们就可以引用下面几个例子：

当艾萨克斯夫人和儿童们用小刀削铅笔时，丹（4 岁 11 个月）说道：“我们为什么不能把铅笔削得像它们原来那样又圆又光滑呢？”过了一会儿以后——“我知道了，这是因为铅笔不是用小刀削成的，它们是旋出来的。”②

还有这样的例子：

孩子们看着一幅图画（画中有一艘捕鲸船，在这艘船舷侧的上方，悬着一些比较小的小艇），其中的一个孩子说：“这些是救生艇。”保尔（4 岁整）说：“不，救生艇不在船的舷侧上，它们是挂在大仓库里的。”③

在第一个事例中，通过类推，削铅笔的动作被同化到一个被设想为最初制造铅笔的类似的动作中去了，而且这就造成了令人不满意的结果。在这里，类推的部分不适当性便突出了起来。在第二个事例中，救生艇几乎是明确无误地归类于挂在大仓库中的东西，因而否认了对于船台上的“救生艇”的描述。

艾萨克斯的理由是，儿童和成人一样，都是从经验中学习的。艾萨克斯认为，从经验中学习几乎是毋庸置疑的，但人们可以提出的一个有关的问题是，儿童以怎样的方式从经验中学习，他们做出什么类型的概括以及对于错误的经验能够做出什么样的提炼和纠正。经验与期待相抵触，便造成了同化概括或类推方面的变化，而这种变化的程度则决定于对这种经验所做的分析。这是一件用精确的鉴别来代替不精确的同化的事情。但精确鉴别的条件是要具有对于最初的同化概括加以“转变”，以及对那些激发它

① “费多”是一条狗的名字，㹴是一种小猎狗。——译者注

② S. 艾萨克斯：《年幼儿童的智慧发展》，第 147 页。

③ S. 艾萨克斯：《年幼儿童的智慧发展》，第 151 页。

的标准加以检查的能力。

即使明显的分类体现了某种在或大或小程度上的人为的情境，但这些情境的作用是这些分类同“转变一个格式”、抽象概括标准的能力事实上有着内在的联系的。

那些最简单的分类——把除颜色外其余各方面都相类似的一些卡片分成红色、黄色和蓝色的分类——即使在没有这种抽象，即未对分类标准的认识作深思的情况下也可以进行，这是确定无疑的。但这种实验只是一种特例，而且它同日常智力行为的关系几乎是没有实际联系的。事实上，我们始终在根据先前的经验来对新的情境做出解释；说到底，这就意味着是在相同的标题下对这些形形色色的情境加以组合或分类。完全清楚地知道这种组合的决定因素或标准的情况，如果说有的话，那也是很少的。极为经常的情况是，将新东西同化到熟悉东西中去的倾向将导致错误的类推，而且，在这些类推的基础上所做出的预见或解释将不符合事实。于是这就引起一个问题，即我们能否发觉错误，而且，为了发觉错误，我们需要认识到决定这种类推的那些最初的标准。为此，必须回顾一下我们的步骤以追溯我们的推理。

下面几页非常清楚地表明，要获得这样做的能力，需要经历一个缓慢、渐进的发展过程。毫无疑问，年幼儿童总是努力按照一种样式来组织他们的经验，而且他们也非常愿意以同样的方式将某种组织强加给一系列的物体。但首先，他们不能以任何一种连贯的方式来进行这件工作，因为他们一次只处理一个物体，他们被自己行为的基础所困惑，不能转变自己的活动，也不能抽取任何一个始终如一的标准来决定整个的结果。如果那些物体仅仅在一个特征方面相异，那么他们或许能处理这种情境，但如果物体的特征有着多方面差异，那么他们就不能这么做了。

因此，如果说分类的问题同一般的推理问题有着某种联系，那是因为分类要依赖于对清楚而明确的标准的抽取和保持。如果对这种限制不加注意的话，那么，分类实验的结果就很容易使人误解。第六章中有一个极好的可以导致正确解决办法的“前分类”行为的例子。要求儿童从一系列的可以作多重选择的成分中完成一个类似于拉文的马特里克斯(Matrices)那样的有四个空格的矩阵。在某些项目中，许多比较年幼的儿童显然取得了成功。但他们本身却不明白选择了正确成分的原因，而且，当问到他们是否可以选另一个成分时，他们很容易改变想法。

我们可以把前面所讲的作如下总结：虽然不明显的和明显的分类都在推理中发挥了重要的作用，但只有在满足下列两个条件的情况下，这种作用才能发挥：(1)受试者能够明确地做出这些分类；(2) 能够清楚地认识到他自己分类的标准，即知道这些分类在哪些方面是不能含糊的。换言之，与推理特别有着密切关系的分类的行为，乃是一种涉及抽取分类标准的活动。本书的论述同其他大多数心理学家著作的不同之处，正在于对此有清晰的认识。

Ⅱ. 协　调

到目前为止的论点是，只有当清楚地认识到分类的标准时，这种分类才符合逻辑。我们已经把这称为一种抽象的活动。然而，为了正确评价皮亚杰所做分析的新颖之处和作用，我们就得鉴别一下存在着的两种抽象。"抽象"一词之最普通的含意是指，将内在于不同物体和事件之中的共同特征和关系集中到一起。这里的抽象乃是一种对于体验到的客体或情境所做的抽象。对于分类标准所做的抽象包含有一种与此不同的抽象，它是一种对于组合和重新组合动作的"转变"，而且，由此产生的逻辑推理要依赖于对主体动作的抽象。我们将在第三节中对这第一种抽象作进一步的叙述。但是，我们必须首先明白，皮亚杰在对推理进行分析时强调了主体动作的抽象，而这正是他比他的前辈更高明之处。在皮亚杰看来，正是这种动作的协调才使我们所做的推论得到了必然的成分。他表明，逻辑本身并不是思维的一个内在的特征，它也不单纯是经验世界强加给我们的一种组织样式，它是我们通过对自己的动作加以协调并对动作之间的关系加以抽象而构造成的东西。举例来说，作者在本书的第四章中显示了一个6岁或7岁的儿童是如何固执地拒绝承认下面这个事实的——一个包括有四枝报春花和二至四枝其他花的花束所拥有的花肯定比报春花多，因为所有的报春花都是花，而所有的花并不都是报春花。对7岁或8岁的儿童来说，这是不言而喻的事实。年幼儿童的回答清楚地表明，只要儿童开始把花看作是报春花和其他的花，他们就不能把束(或类)这个概念作为一个整体。因此，他们的回答都毫无例外地表明是在将一个部分与另一个部分，而不是将一个部分与整体作比较。这并非因为他们不理解诸如"报春花"、"玫瑰花"、"花"等名词的含义，他们的回答非常清楚地表明他们是理解的。这是因为，要求他们做出的这些判断符合于他们能够进行的动作。他们能够进行两种类型的动作。一个是拿取若干报春花，并增加一小束各式各样的花以产生一个大的花的集合。这是一种增加或"合并"。另一个是从花束中拿取报春花，仅仅让其他各种花"剩下"。两者都是他们实际上能够进行的动作，而且也都是他们能够像实际的动作那样在头脑中进行的动作。但是，这种增加和减去并没有互相协调起来。从花中拿走一部分所造成的结果破坏了原先的统一的整体。如果在实际上做出了这种动作，就会出现这种情况，而且当这种实际的动作在"儿童的头脑中"进行时，情况仍然如此。为了能够使部分与整体相比较，受试者必须在思想上进行减去的同时，在头脑中进行增加或"合并"。与其说这是以不同的方式做相同的事情，还不如说这是在同一时刻做着两种事情。此外，还有两个方面的差别：首先，重新合并的可能性绝没有丧失，这样，"增加"和"减去"便互相影响；其次，增加的动作乃是减去的动作的逆过程，这是一个至关重要的差别。仅仅认识到人们能够进行另一个动作并因此而回复到出发点上来这一事实是不够的，它的含义是，主体认识到这

另一个动作必定会使他回到出发点上来，因为这个动作乃是另一个动作的逆过程。

因此，如果 7 岁或 8 岁的儿童毫不怀疑地认识到整体必定大于(或等于)它的任何一个部分，那么，这种给予他的推理以逻辑特性的系统，就从他认识到自己动作的关系这个事实中得到。

许多读者将看到，这个关于报春花和花的实验使人回想起一个类似的使用棕色和白色珠子来做的实验。这是皮亚杰很久以前做过的一个实验，这个实验记录在《儿童的数概念》一书中。同样，本书描述的那些有关序列的实验也会使人想起记录在那本书中的工作。皮亚杰的论题的一个方面是，正确理解分类的关系对于一个适当的数的概念来说是必不可少的。这样，我们可以把正整数看作是一个等级的分类，在这种分类中，每一个相继的数都构成了一个包含着它前面所有数的类。于是，5 这个数便包含了 4、3、2、1；4 则包含了 3、2、1，等等。同样，如果考虑到序列关系的有规则的次序，那么，也可以认为这些数构成了一个序列，这个序列中的任何一项都大于它前面的任何一项，并小于它后面的任何一项。对于数的这两个特征感兴趣的远不止于逻辑学家。任何教师都意识到，如果儿童认识到从数目小的实物中减去数目大的实物是不可能的，那么他就理解了这些结论，而且教师也知道，要让儿童认识到什么时候数目大些或小些，有时是相当困难的(完全撇开更为困难的与十进记数法相联合的用法不谈)。

确实，后来的研究倾向于表明，在儿童充分掌握类包含的含义之前，他们对于数及其重要性可能具有一种不完全的理解。例如，许多 6 岁的儿童都确信，不管一排物体(如一排蛋杯)在排列方面有什么变化(如通过减小或扩大杯子的间距使这排蛋杯的长度缩短或延长)，它的数目总是不变的，或"守恒"的。同样这些儿童可能到了一年以后才能将报春花和花，或棕色珠子和珠子相比较。不过，这仅仅意味着，所有这些涉及运算性理解或数的关系的协调乃是一个渐进的过程。这与皮亚杰的下列论点——对于数的适当的理解必须涉及对于类包含的理解——并无抵触之处。

但是，即使是在运算的或必然的守恒方面所暗示的不完全理解，同本书所研究的那些类型的协调也是有着密切关系的。

如果一个物体集合的外表使人感到物体的数量似乎比原来多些或少些，那么，为了使儿童承认这些物体数量的不变性，他就必须要抵制这些感觉的暗示以便于抽取一个新的标准。如果故意把一排物体(如蛋杯)与另一排物体(如蛋)一一对应地排列着，那么，虽然后来移动了杯子，但儿童还是坚持认为，这两排东西的数目是相等的。因此，他的判断的基础是他最初做出的那种一一对应排列的动作，尤其是他的下列理解，即不管使用什么动作来破坏这种一一对应，它们都可以通过做出一些逆反的动作来加以消除。换言之，他选择了一个固定的标准，而不是受到一个不确定标准的影响。这个固定的标准之所以恒定，恰恰是因为它受到了他能够控制的动作的调节。显然，儿童之所以能拒绝一种标准而赞成另一种标准，是因为他认识到了他所使用的标准，并在他做出判断的整个过程中始终保持着他所选择的标准。

《儿童早期逻辑的发展》包含了对于儿童逐渐认识他们自己动作标准这个进程的详细研究，因为在类的定义中，分类同保持明确的标准有着内在的密切联系。但是，明确的定义标准的选择和使用乃是所有动作发展的基础，而本书作者在他们先前工作的过程中曾对这些动作的发展作过研究。例如，数的守恒依赖于对数的标准的坚持，其基础为一次拿一个，而且一次仅拿一个地对物体加以点数，并由此而在那个数过的集合和所有其他数目相同的集合之间建立一一对应关系。同样，长度的守恒要依赖于对长度标准的坚持，而长度标准的基础是在两个端点之间建立间隔关系的动作。重量的守恒则要求一个以(最初)平衡为基础的标准。这些标准中的每一个标准都要求有主体做出的一些动作，而且，标准的选择则归咎于下面这个事实，即这些动作互相之间能够系统地加以联系，以至使人可以预见这些动作的效果。于是，在运算的概念系统和它们的运算定义之间便存在着一种内在的关系。只有那些能够从运算方面参照一套准确的动作加以定义的概念才能形成系统，才能够可逆，正因为这些动作是系统化的，所以它们才可以用来定义相对不变的稳定的概念。

应该补充说明，这种作为同主体动作有关的(心理的)动作的运算概念，便构成了皮亚杰的学习观点①同所有其他"学习理论"，普遍所持观点之间的可能是最重要的差别。在这些"学习理论"中，每一种理论都以其自己的方式来阐述行为的逐渐适应。它们首先显示一个具体的动作是如何(通过"效果律"、"接近律"或"需要降低原理"等等的作用)加以改变的，然后便把此扩大为这些动作次序的协调[如巴甫洛夫的"动力定型"，或霍尔(Hall)的"习惯族系等级系统"②]。不过，虽然通过这些动作与另一些动作的互相联合("前摄动作"和"倒摄动作")而使单个的动作有所改变，但这些动作还是依然如故：对环境的作用和对环境的反作用。在所有这些理论中，没有一个理论在概念学习这个难题的研究方面取得显著的成功。正因为皮亚杰的"运算"概念完全背离了这种方法③，所以他的实验研究才在这个方面取得了较大的成功，尽管这些研究同明确的系统的理论阐述还稍有距离。

对于构成这种发展的心理机制特别感兴趣的读者(我们得设想这样的读者是大多数)将尤其得益于第七章。在本书的一些主要章节中，作者始终在努力显示儿童对每一个阶段的每一个实验所做反映的特征。这些差别经常是很微妙的，以致读者不难想象

---

① 见J.皮亚杰：《动作与知识》，《发生认识论文集》第十卷(1959)，第159—188页。

② 巴甫洛夫刻板地强调"动力定型"，而霍尔却采用"习惯族系等级系统"来说明行为的可塑性。一个适当的理论陈述要对这两类行为都做出说明。霍尔的说明比较接近于所谓"智慧"行为这一事实同他使用"零星的预期反应"(见下一个注解)有着密切的关系。

③ 霍尔的"零星的预期反应"和密尔(Miller)、摩勒(Mowrer)和奥斯古德(Osgood)的"中介反应"虽然可以看作是达到一个类似概念的方法(因为这些反应将作为进一步反应的刺激)，但仍然存有本质的差异，这些进一步的动作同任何其他的反应一样还是对于环境的动作，而"运算"则主要是同其他动作有关的动作，其次才是对环境的动作。

某一个阶段的特征是如何在另一个阶段逐渐消失的。这乃是我们可以期望的一种论述方法,因为这是作者先前撰写的所有著作的特色。不过,本书的显著特征或许是对于事后认识和事前预见的细致的研究。事后认识或"倒摄动作",是主体根据随后的动作对前面的动作加以修改的过程:回复到先前动作上去,或者纠正他的错误。先见或"预见",乃是直到最后阶段才能实际做出的在内部进行的动作过程,主体将据此而修改他目前事实上已经完成了的动作。主体做出的实际判断或他们对材料的安排与事后认识和预见并不是同样的东西,后者乃是心理学家从这些外显的动作中推断出来的潜在过程。如果人们仅仅考虑主体的判断和动作,及其所意指的主体对于情境的理解,那么人们就会推断出一个不相连续的阶段次序,每一个阶段都对应于一个不同程度的逻辑组织。但是,如果我们转而考虑引起这种外显行为的机制,那么就会发现有完整的连续性。单方向的前摄动作(已经完成的动作影响后继的动作)不知不觉地过渡到倒摄动作,而后者又过渡到预见。可见,皮亚杰的"阶段"的不连续性只是相对的,它是这个画面的一个部分。同作者先前已经被翻译出来的任何一本著作相比,本书,尤其是第七章将比较充分地论述造成这些阶段之过程的潜在的连续性。

Ⅲ. 两种推理水平

为了强调与《逻辑思维的发展》的联系,我们特意把这本书的英译本叫作《儿童早期逻辑的发展》,它仅仅处理逻辑的一个部分(分类和序列)和推理的一个部分(与分类和序列有关的推理)。前面的工作所处理的实际上是后面的推理的发展,系统假设的形成以及通过假设含义的演绎而对假设所做的证明,它同逻辑的另一个分支命题逻辑是有关的。

皮亚杰的论题的一个本质部分是,与分类和序列有关的逻辑推理的发展先于上一节所提到的那种类型的推理的发展。为了表明这两者之间的差别,并同时阐明分类推理本身的重要性,我只想提及在《逻辑思维的发展》中所记录的一个实验。这个实验是,鼓励不同年龄的儿童尽可能多地揭示阿基米德的定律。实验的器具有几个装着水的桶(几个大些、几个小些),还有各种杂物,包括一只玩具鸭、一只玩具小船、一大块木头、一些石头、一枚钉子、一块蜂蜡、一只金属罐等等。首先要求儿童说出哪些东西能浮在水上,哪些东西要沉下去,以此来对各种物体加以分类。要求儿童说出为什么这些东西会浮在水上或沉下去,然后就鼓励他把这些东西放到水里去试一试,以便发现他的判断是否正确。如果判断错了,就要求他说出原因,并鼓励他改变想法,如果有可能,就让他再试一试。

只有很少的4岁或5岁的儿童能够证明他们的预言:他们有时提到有关的经验(如一个儿童回答说,他曾经看见过一小块木头浮在水上),但更为经常的是,他们只是说一

件物体将浮在水面上并且“游动”,而另一个物体将沉到底下去。如果结果证明他的预言是不正确的,那么他们或者简单地接受这个事实,或者试图把一个物体压到底下去,或者把物体托在水面上。一年以后,他们便开始为他们的预言提出较多的理由,其中有些理由是相当总括地借助于经验或意图(例如,鸭子将浮在水上,因为鸭子能够游),而另一些理由则毫不系统。后者有一种矛盾的倾向(例如,一枚钉子将下沉,因为它小,但一块木头将上浮,也是因为它小),存在着小和轻、大和重的混淆,而且这两个范畴都可能同强和弱相混淆。

到了7岁或8岁的时候,这些矛盾开始消失,其结果是,儿童能够发现大的物体也可能是轻的等等。由于这个原因,他们现在便开始使用密度这个基本概念来解释漂浮和下沉:开始时,在“轻”和“重”这些词汇的绝对用法或相对用法之间可能存在着一些动摇(例如,儿童可能会说一枚钉子下沉,因为它重。然后,如果要求他将这枚钉子同一块木头相比较,他将提及这一事实,即钉子下沉的原因是制钉子的材料,铁下沉),到了9岁或10岁时,儿童便能直接地、明确地谈到这一事实——物体的质量同大小的关系决定于制成这个物体的材料。不过,虽然这能够使他们对于哪些物体将上浮、哪些物体将下沉做出比较准确或不太准确的预言,但是,这些物体之所以如此的原因却仍然没有解决。儿童们经常把它归诸水,例如他们对于有些物体下沉所做的解释是,因为这些物体布满了孔,这样水就灌进去了。不过这类解释(其基础是他们对于从空瓶子灌进水而下沉的事例中所观察到的现象作的不适当的概括)使他们陷入矛盾之中,因为他们也想到了一种其密度如“布满了”孔的物质。所以他们不能系统地阐述一个普遍的法则以解释沉浸于液体之中的物体的上浮或下沉的原因,即使别人对此向他们作了解释,他们也不能掌握这个原理,因为他们还不能根据一个假想容积的水的质量来思考。

大约13岁的时候,他们开始把物体的质量与同样容积的水的质量相比较(而不再仅仅是谈到浴盆里的水强得足以支撑一个物体或弱得不能支撑一个物体)。到了14岁或15岁,他们便可能通过使用一个单位量器来确定一种物质的质量(这个单位量器乃是一个中空的立方体,在这个立方体内或者注满这种物质本身,或灌满水,并称出它的质量)。

这个实验的结果有两个重要的特征。第一个特征是,正因为7—9岁儿童能够根据物体的大小、质量、质料来把它们分组(因为他能够明确地根据大些、重些等来整理这些物体),所以他们便学会了避免矛盾,并获得初步的密度概念。他的推理是,不是所有的大东西都下沉,不是所有的轻物体都漂浮等等。而且,因为他知道这些,所以他便发现了一个对物体进行分类的新方法:按它的大小来分成轻的或重的。7岁或8岁的儿童可能还做不到这一点,他们往往更喜欢说物体的质料,这乃是一种早期的分类,因为他已经熟悉了许多物质。与此同时,当他在考虑质料时,他只想到不同物体的相对大小,他已经能够做到这一点,而且这将使他做出下列预见,即如果一枚铁钉同一块木头一样

大，那么铁钉就重些。

《逻辑思维的发展》里面的实验所涉及的几乎都是对现实问题的归纳和证明，而且它们同学校和日常生活中所使用的推理的关系也是直接的、明显的。上面引用的只是一个例子，相反，本书中的，许多实验所涉及的似乎是一些人为的问题，如决定报春花多还是花多。另一方面，那一本书中所讨论的大多集中于推理的后期发展。在它所处理的每一个实验中，分类和序列的作用非常明显。在每一个事例中，这些比较基本的推理形式的发展都对理解有所帮助，尽管它还不足以完全解决这个问题。分类的真正意义乃是下面这个事实，即能够进行分类的儿童就能够通过坚持一些明确的标准而对事物的特征进行逻辑推理。

这个实验的第二个特征是，9 岁或 10 岁的儿童远不能达到对于比重的真正理解，这有两个原因：首先，比重的概念意指将一个物体的质量和同样容积的水的质量相比较。9 岁或 10 岁儿童在把注意力集中于一个物体的相对质量这一概念方面并无困难，而且他们相当清楚地知道确定它的标准。就这个程度来讲，他们的推理活动是有逻辑和有系统的，构成这种推理的心理活动是"运算"。但一个物体的质量仍然保持着那个物体的特性。另一方面，同样容积的水的质量却不是人们能够看见的任何物体的特征，它至多是一个人可以审慎地构造出来的一个物体的特性。但是，如果一个物体已经给定（乃至可以想象），那么明确这个物体的几个特性则完全不同于从其特性中构造一个物体。后者则要求有对于这些特性之完全的、审慎的抽象。

其次，如果一个 14 岁左右的儿童故意往一个给定的容器中填（或想着填）木头，或蜡，或金属，而往另一个完全相同的容器中注水，然后称一称它们以确定其相对密度，那么他就不能仅仅考虑这种质料以及它与质量的关系，他肯定同时也认识到容积将影响质量，而且只有这一点才使他有意识地构成了那两个他希望按他做的那种方法加以比较的物体：在比较那两种物质时保持容积不变。换言之，他不是仅仅在考虑一个含义（即质料影响质量），而是同时在考虑两个含义，并协调它们的影响。这就是作者在早期的著作中所研究过的"命题推理"远比本书所研究的这类推理发展的原因。

关于漂浮体的实验远不能最好地说明"形式"推理或"命题"推理的主要特征。英海尔德关于发现钟摆长度对于频率的特殊作用的研究比这要好得多。我们的导言之所以选择这个实验有两个理由。

第一个理由是，它清楚地说明了早期分类和序列的发展对于推理和学习的实践含义，这是本书所关心的内容。

第二个理由是，它同本书第三章中所记录的一个实验相当接近。给 4—9 岁的儿童一个秤以及一些各种各样的盒子，把秤的大部分隐藏在一个盒子中（只看得见秤盘），而且，实验器材要装配得很好，以致当在秤盘上压上一定的重量时，刻度盘上的指示物便通过一个狭槽伸到这个盒子的一边，这个效果是由位于该指示物终端的一个球状物而

增大的。这些盒子有两种重量、两种大小和两种颜色，于是总共便有八种盒子。要解决的问题是，找出哪些盒子能使这个球状物出现。读者阅读本书以后便会看到有关儿童试图解决这个问题的几种方法以及对于这个问题的回答的详细描述。在这里，我们仅需提及这么一个实验结果——大多数年龄只有 6 岁的儿童不仅能够自己发现他们所需要的是一些分量重的盒子，而且还能够（通过正确地指出分量轻的那些盒子的大小或颜色）证明，并非所有的大的（或红的，或蓝的等等）盒子都是重的。

从表面上看，这个结果与假言演绎推理（我们所说的假言演绎推理是指拟定假设和检验假设）乃是到青春期才能获得的一种思维形式这一论点决然矛盾。因为相当年幼的儿童的确不仅能发现如何使用这些实验器具，而且他们还能反驳那些相当于不正确假设的东西。

然而，这两个实验的并列显示了 7 岁儿童和 12—15 岁儿童之间在检验假设方面的差别是多么的深刻。只要回想一下我们刚刚谈到的有关阿基米德实验的形式推理的两个显著的特征，我们就会发现，在这里，其中的哪一个特征也不具备。

首先，在这个实验中，所有的盒子都放在那里，而且都是现成的。受试者无须对砝码的性质、颜色等进行抽象，也无须从它的关系或属性中构造一个事件或物体，他只需对放在面前的东西加以分类。这与（在想象中）构造一个相等于一个物体体积的水的容量是大不相同的，而且，这更加不同于审慎地构造一个任意的容量单位以比较不同物质的比重。

其次，东西是现成的这个事实的意思是，当受试者检验"所有蓝色的盒子都是重的"等假设时，他只需要记住一个假设。相反，无论在什么时候，只要人们要求他提出自己的假设，并要求他设计一种确实能够（通过"所有其他的东西都是相等的"方法）控制有关变量的方法来审慎地构造和比较事物，那么，这就意味着，在检验一个特定的假设时，他得同时记住许多其他的假设。换言之，形式推理的过程意味着对这些假设要有一种系统的、"运算的"协调。每一个形式推理的过程都意指对于动作的系统的协调，而这些动作乃是按照物体的属性加以分组或分类所必需的。那些构成的假设本身都是"运算的"。这就是形式推理的运算都是第二级运算的原因。

最后，第三章的实验使用了两种重量、两种大小和两种颜色这一事实有利于初步解决这个问题。它无须像第十章的复合序列实验那样同时进行序列和分类。而且，那些对称的和两分的安排也使分类本身比较容易些。这就是刚刚处于（第一级的）运算协调发展开始阶段的儿童能成功地解决问题的原因。

不管怎样，这两个实验都说明了逻辑推理领域中的重要的发展，而逻辑推理乃是作为对于属性作系统分类的一种结果而发生的，他们都是在现实的背景下进行分类推理的例子。推理是系统的，所以也是逻辑的，但它所符合的系统乃是一个分类的系统。因为这种类型的逻辑推理以及那些基于系统整理差异的推理的发展要比假言演绎推理的

发展早几年，所以皮亚杰争辩说，需要有一个整理这些系统的逻辑。这样的逻辑将是一种不完全的系统。因此，命题逻辑乃是一种比较完整的系统，不过，他要以这个不完全的系统为先决条件，而且要容纳这个不完全的系统，正像数学容纳算术一样（或者像数字的“环”容纳加和乘这两个“群”一样）。

E. A. 朗泽（E. A. Lunzer）

1963 年 9 月于曼彻斯特

著者导言

本书综合了得之于2159名儿童的实验结果。导言包括如下内容：将要讨论的问题的概述，若干基本的定义，以及引发本书之撰写的先前研究的梗概。

我们打算研究分类（第一至第八章）和序列（第九至第十章）运算的形成。虽然我们已经知道它们的发展过程中所表现出来的一些阶段，但对于说明这种发展的那些机制却几乎毫无所知。首先对这些机制进行研究的是A.斯泽明斯卡（A. Szeminska），所以这本书乃是她的工作的继续。

本书较多部分所论述的是分类，因为由它所引起的问题是相当复杂的。但我们也不能完全忽视序列的问题。如果仅仅检验这些结构中的一个，我们很可能会由于夸大某些因素的作用、低估另一些因素的作用而导致一些系统的解释方面的错误。语言对于分类的作用似乎比对于序列的作用要大些，而感知的因素则可能在序列方面更重要些。通过对这两种情况的比较，我们便能够发现两者共同的一些机制。我们有理由把这些看作是基本的形成机制。

为了阐明构成一个特定过程之原因的机制，我们必须首先发现它开始的那些结构，然后显示这些结构如何改变，以及为什么会得到改变的原因。所有的发展都要以一个最初的结构为先决条件，发展便存在于这个结构的完成和演变之中。

这种分析究竟要追溯多远，我们不能先验地决定解释的样式。换言之，在弄清事实之前，我们无权决定哪组事实（语言的感知的等等）应该包括在最初的结构之中，以及哪些因素可能在从最初的结构改变为运算结构方面发挥作用。开始时我们所能做的一切，只是拟定一个包含所有这些结构因素的清单。

这一要求使人想起了四个（1－4）供选择的假设，它们是由三个（Ⅰ－Ⅲ）相继的两分法所造成的：

（Ⅰ）分类和序列的结构可能仅仅是语言所造成的（1），或者，应该把它们的起源（至少是部分起源）归之于作为语言之基础的运算。在后一种情况（Ⅱ）下，这些结构可能是与环境无关而独自发展起来的协调（2），这里由于（例如）中枢神经系统联系之完成的延迟，要不然它们就是先前存在的那些结构的完善。如果说它们不纯粹是由于成熟（Ⅲ），那么，它们必须发源于感知的结构（3），或者从总体上看是发源于感知-运动系统的分化（4）。其他任何可能的来源（诸如通过意象而预见分类和序列的能力）都可以归

之于它们中的一个。于是归根到底,意象①本身必须或者依赖于感知,或者依赖于比它复杂的感知-运动机制。

我们依次地考虑了这些主要因素中的每一个因素,打算先列举出各种形式或结构,而这些形式或结构是能够为分类和序列的结构提供一个起点的。但它们还缺少我们希望加以解释的那些最后的结构。在这本书的主要部分中,我们将能够研究弥合这种间隙的方法,同时记住从这些最初结构的分析中所发现的任何思想。

1. 语　　言

语言的句法和语义都包含分类和序列的结构。显然,对于分类来说的确如此,所有的名词和形容词都把现实分成了一些类别。就儿童在与成人相同的意义上使用词汇来说,在儿童学习说话时,人们就可以直接把这些词汇传达给他们。总之,词汇不可避免地要迫使儿童开始分类。另一方面,在任何语言中,序列却很少像某些类似于从“曾祖”导向“祖父”、“父亲”、“儿子”、“孙子”等等的序列那样有完整的系统,但是在一种语言中,有时通过比较级和最高级等特殊的语法形式也暗示了一些序列。

一个可能的假设是把分类和序列的形成完全归因于语言,另一种假设是,语言仅仅发挥一种辅助作用(如促进作用)。我们甚至可以说,尽管语言对这些结构的完成是必要的,但它对于这些结构的形成来说却不是充分的。如果这个观点正确,那么,它们的形成就得用运算的机制来加以解释,而这些机制虽然是语言活动的基础,但它们本身却是不受它们的言语表达所支配的。

在确定这些可能性方面,人们可以采用若干种研究方法,这些方法是:(1)对失聪者的研究;(2)对于最初的言语型式(或“前概念”)的分析;(3)对某些出现于日常语言之使用中的运算型式的研究。

我们自己并没有进行过任何对于失聪者的研究。但是,P. 奥莱龙②(Oleron)杰出的工作,还有 M. 文森特③(Vincent)论失聪者智慧发展的那些论文都提出了下列结论[这些结论得到了我们的同事 F. 阿福尔特(F. Affolter)的研究的进一步证实,阿福尔特在我们对正常儿童的研究之后,研究了失聪儿童运算结构的发展]:

(a)序列的发展在失聪者那里无显著的差异;

(b)失聪儿童能够像正常儿童那样进行同样的初步分类,但在处理比较复杂的分类

---

① 我们不能在这里详细说明意象的作用,不过我们在这个问题方面进行了一系列的实验,我们准备随后再写一本书来讨论它。

② P. 奥莱龙:《关于失聪者心理发展的研究》,巴黎,1956。

③ 《儿童》,1951(4),第 222—238 页;1956,第 1—20 页;1957,第 443—464 页。

(如利用同样的成分,但改变分类的标准)方面就要延迟。换言之,失聪儿童肯定显示了我们所理解的运算思维的迹象,而且这可以归因于他们使用符号(如手势语)这一事实。看来,口头语言的社交交流对于运算结构的形成来说似乎并非必不可少,但肯定有所帮助,而且对于完成这些结构的一般形式来说,它虽不是一个充分的条件,但很可能是一个必要的条件。

皮亚杰①在描述最初的言语型式或"前概念"时表明,学习如何谈话并不意指立即就采用了那些体现在他们的母语中的集合分类,语言仅仅促进类别的形成。

儿童把听到的语言同化到他们自己的语义结构中去,这是随着他们的发展水平而变化的。成人的语言可以帮助修改这些结构,从长远的观点和每个特定的时刻来看,成人的语言往往是根据他们的思想来加以解释的。这样,一个词(即一个名词或一个形容词)的概括性对于儿童来说可能是非常弱的,以致作为符号的词更接近于一个表象而不是一个概念,或者说,它可能接近于一个真正的概念的概括性——这中间有着一切可能的细微差别。换言之,儿童把一只猫叫作猫这个事实并不证明他理解猫这个"类",这个名称是从成人的语言中借来的(对于成人来说,它表示猫这个类,它包含在动物、活着的生动等类之中),但对儿童来说,它可能等同于一个表象的图解,它介于个别和一般之间。

例如,一个3—5岁的儿童可能会谈到扇子造成的"风",但不能确定这个"风"与吹动树叶的微风是不是同样的物体,也不能确定它们是不是属于同一类别的两个性质不同的词语。(儿童将摇动树枝的气流说成是"某种气",并在"白气"或透明的空气和"蓝气"——蓝色的天空——之间加以区别!)同样,桌子上的帘子的影子被说成是来自于"树荫"等等。儿童不能在个别(被取代的同样的实体)和一般(同一个现象范畴)之间做出选择,同样,也往往不能确定该说"这个月亮"还是说"月亮"(而且甚至不能确定该说"这个"鼻涕虫还是"一个"鼻涕虫)。

语言从开始起就有助于一系列的同化,而且这些同化乃是意指相似的概念(同样地,一些不成功的同化便造成了不相似的概念)。但在一个长时期内,这些关系不能搞得具体而精确。年幼儿童不能以表现出包含关系(即部分-整体的关系)的方式来安排一组物体,而这种关系对于理解严格意义上的分类来说却是必不可少的。我们必定会得出如下结论:虽然语言在逻辑结构的构造方面是一个重要的因素,但并不是必不可少的因素,即使对于听觉正常的儿童来说也是如此。

在第三章和第四章中,通过分析"所有的"和"有些"这些量词的具体用法,我们对语言的作用作了一个比较严密的研究。这意指包含的数量关系:如果所有的 A 是 B,而且有些,但不是所有的 B 是 A,那么 B 就大于 A。这些研究的主要结果可以陈述如下:成人的语言使运算格式结晶化这一事实,并不意味着运算就与语义的形式一起得到了

---

① J. 皮亚杰:《儿童的游戏、梦与模仿》,海内曼出版社,1951。

同化。在儿童能够理解蕴涵的运算并应用它之前，他们必须要进行构造，甚至要进行许多连续的再构造。这些都要依赖于逻辑的机制。它们并不是被动地由语言所传递的。它们要求主体做出积极的构造。

研究结果证明，语言加快了分类和序列过程的进行，并对其完成有所帮助。我们不打算研究它如何"加快"和"帮助"的细节。首先，语言的重要性乃是老生常谈。其次，我们比较关注的是结构的形成过程而不是它的终结状态。不过，如果看一看它们的终结状态就会发现，序列的发展几乎完全平行于分类的发展，并有一种略为领先于分类发展的倾向。这显示了一个带有结论性的观点，即这些运算的发展在很大程度上是不受语言支配的。因为语言的结构尽管在很大程度上反映了分类的结构，而序列的结构同语言的联系却是很不密切的。

2. 成　熟

如果语言不是运算结构(乃至分类结构)的唯一原因，那么这些机制可能只是神经系统成熟的结果，而神经系统的成熟同环境是无关的。

这个问题同那个仍然是发生心理学中的一个最困难的问题有着密切的联系。虽然心理学在每一个发展水平上都已经使用并滥用了成熟这个概念，但除了生命的最初几个月的变化外，神经病学却很少讲到这个发展的现实。

我们可以非常谨慎地假定，成熟很可能在出现于 7—8 岁时的显著变化方面确实起一定作用，这是仅有的一个事例(在我们的"文明化"的社会中，初等教育的兴起已经使 7—8 岁时的变化不那么显著)。

但事实上，我们对它毫无所知，尤其没有看到任何一个完全由于成熟的缘故而形成的认知结构。我们可以做出若干个否定的陈述，这样，把缺乏某些类型的行为(如 2—4 岁儿童没有假言演绎推理)归因于神经系统方面的不足之处是有些道理的。但从积极的观点来看，成熟的神经系统所能做的只不过是为这个可能的领域的不断扩展创造一些条件。这些可能性的实现不仅需要物理环境(实践和获得的经验)的作用，而且也需要一个有利的社会环境的教育影响。

3. 感知的因素

如果不能把分类和序列的运算结构全部归因于语言和成熟，那么，它们的起源必定在于最基本的认知结构，即感知的和感知-运动的结构。

早在儿童学习将物体加以分类或有规则的排列之前，他们就按照相似或不相似的

关系来感知物体了。这就是试图从这些感知的关系中寻找分类和序列的起源。当今的心理学家们都认为,关系的感知是基本的。感知本身并不限于一些孤立的项目,这些孤立的项目将由一个比较高级的机制(联合、判断等)结合到一起。分类意指同一类别中各个成分的相似关系以及不同类别中各成分之间的不相似关系,而序列则是按次序联结起来的一套不对称转换关系的产物。因此,人们有理由提出这么一个问题,即纯粹的感知关系是如何为这些运算提供一个起点的。

我们提出这个问题并不意味着接受了这种假设,即所有关于客体的知识都来源于感知。事实上可能有两种不同的假设,虽然我们目前无须在它们之间做出决定,但在头脑中记住它们却是必要的。否则,当我们寻求感知结构同分类和序列结构之间可能有的相似之处时,就可能很容易地误入歧途。

这两种假设中的第一种是,感知的知识先于任何其他形式的知识而存在,并且与任何别的东西无关。感知的知识被看作是"基本的"(这并不意指感觉原子论,同样的东西也可以用"完形"来加以表达),于是所有的智慧结构(感知-运动智慧、理性的智慧等等)就是这些最初的感知结构的延伸,或者说,就是扩大它们并使之更具有适应性。我们能够做的另一种选择是,认为这些比较高级的结构形式必须包括一些新的结构,但这些新结构的内容将由感知的材料组成,而且这些材料应该是易于构造的。换言之,我们仍然拒绝承认这一点,即这些结构由于总合为比较高级的结构而发生了实质性的改变。

不过,还存在另一种可供选择的假设。这个假设是:无论在什么水平上,感知都与较高等级的行动格式有着密切的关系,而且,这些较高级的结构能够影响感知的结构。这就意味着人们不能把关于客体的知识看作"起先"是感知的,"后来"是超感知的。所有关于客体的知识都是那些同化客体的行动格式的功能,而且这些格式包括了从最早的反射作用到通过学习而获得的最复杂的意象作用。感知结构从一开始就与比较广泛的结构有着密切的联系。如果采纳这第二种假设,那么,我们可能就要从分析感知结构来开始研究,然而,我们之所以如此,只是因为这些感知结构比较简单,而不是因为它们比较"基本"。

使我们感兴趣的感知结构,乃是其变化同年龄的关系最小而又相对独立于其他因素的那些结构。包括简单的几何图形以及我们称之为"基本的"某些视觉结构——它们之所以是"基本的",是因为只在一个中心领域内运演,而不涉及几个连续的中心的相互作用。这些知觉结构包括与分类和序列的运算有着部分相似之处的某些关系。不过这种相似只是部分的,而且,甚至在假定这些关系乃是感知运演的先导者时,我们仍然没有涉及那整个的问题——它们是如何发展成为完全的、协调的运算格式的。

哪些种类的感知关系同这一研究最相关呢?为了回答这个问题,我们可以首先详尽无遗地列出组织感知的各种方法,然后再挑选我们所需要的那些。不过,如果我们首先对涉及分类和序列的那些最一般的关系加以界说,然后再来寻找它们最接近的感知相似性,就比较省力一些。

A. 分类 类别既可以用它们的"内涵"、也可以用它们的"外延"来加以界说。在直到9—10岁才达到的平衡阶段之前，这个差别并不十分明显。就内涵的方面来说，我们从比奈(Binet)和西蒙(Simon)关于定义的测验中知道，没有达到这个阶段的儿童有一种根据用途而不是根据种和种差来界说的倾向。就外延的方面来说，我们关于"所有的"和"有些"的实验(第三章和第四章)表明，比较年幼的儿童还不能完全掌握有关的数量关系。

所以，我们将把下列几点作为类别运算存在的标准：(1)受试者能够按照一个比较普通的类别以及一个或数个比较具体的差别来界说一个类别的内涵；(2)能够按照包含的结构来处理它们的外延，这表现在他已经掌握了"所有的"、"有些"、"一个"和"没有"这些量词。

我们先要给上述每一个措辞下一个定义：①

定义1. 假定有A,A'和B这一类族，而且$B=A+A'$,$A\times A'=0$(因此A'是A对于B的补偿，因为A和A'是分离的)，类别的"内涵"就是那个类别成员共有的一组特性，以及将它们与另一个类别分别开来的一组差别。

定义2. 我们把"相似的关系"(a为A的成分的特性，b为B的成分的特性)称为一个类别成分共同具有的所有的特性(尽管这个相似关系本身并不明确)。这样，"所有的草(A)是绿的(a)"这一陈述便意指它们相互之间的相似性在于"是绿的"，这样便描述了一个"都是绿的"关系。

定义3. 类别A'的"互补性"a'乃是它的成分和另一个类别A的成分之间差异的总和，其中A和A'由于都是类别B的成员而具有相似性。例如，如果A是一群兄弟，那么作为嫡亲堂兄弟的A'就是同一个祖父的孙子(因而就是B)，虽然他们不具有同一个父亲：即$a'=b$非a。再一个例子是，植物是非动物的生物，其中的差别(非动物)就是互补性。

定义4. 根据种和特有的差别来定义一个类别就是将它的成员的特性表示为：b和a或b和a'。

定义5. 一个类别的"外延"乃是构成这个(按其内涵加以界说的)类别的一组成分(或一个成分)。

定义6. 内涵之数量关系的确定要使用"所有的"、"有些"和"没有"这些量词中的一个或数个，这样，"所有的A是B"这个陈述的意思就是指B比A多，而没有具体说明A和A'之间的关系(其中$A'=B-A$)。

定义7. 如果，而且只有下列两个命题——(1)所有的A是有些B；(2)$A<B$——都成立，"类包含"的条件才能满足(虽然有些受试者同意第一个命题，但他们不能理解第二个命题)。

① 这些定义本身并不包含任何假设，它们只是详细说明这些措辞是怎么用的。

定义 8. “类别成分”(以符号 ε 表示)的关系乃是一个成分 x 和它所从属的类别 A 之间的关系。这个关系可以表示为:$(x)\varepsilon(A)$。我们将这种关系既区别于“分隔的成员”(成分 x 仅仅是某个统一整体的一个空间的部分或一个“部件”——就像鼻子和脸的关系一样),又区别于“格式的成员”(成分 x 完全等同于一个感知的或感知-运动的格式,这乃是认知同化的结果)。

如此加以定义的这些关系在感知中能够平行到什么程度?人们可以发现这些感知的相等物,而且本书作者之一已经将这些称为“不完全的同型性”。① 但是,为了搞清它们的含义,我们还得指出感知的集合或聚合与逻辑的类别之间的本质差别。这个本质的差别是,在逻辑类别的属性或内涵的特性和它的成分的分布之间有着精确的对应,而感知的聚集却不要求在个别成分之可觉察的性质和它的或大或小的组合之间有整齐的对应。其原因在于,一个感知聚合的外延依赖于(视觉和触觉的)空间接近或(听觉的)时间接近,然而一个逻辑类别却不受其成员之接近性的影响。因此我们应该注意下列三点(以视觉感知为例):

1. 感知可以获得分隔的成员关系(但不是类包含关系,定义 8),甚至能将这种关系扩大到那些根据其空间的接近而联合起来的集合或集合对象。这样,在图 a 中,成分 x 之所以是整个集合的部分,仅仅是因为它靠近这个集合,它在整个集合的总构造中填补了一个空缺。如果没有空缺,而且 x 离得更远些,那么 x 就不再被看作是这个集合的部分了(见图 b 中的 x)。

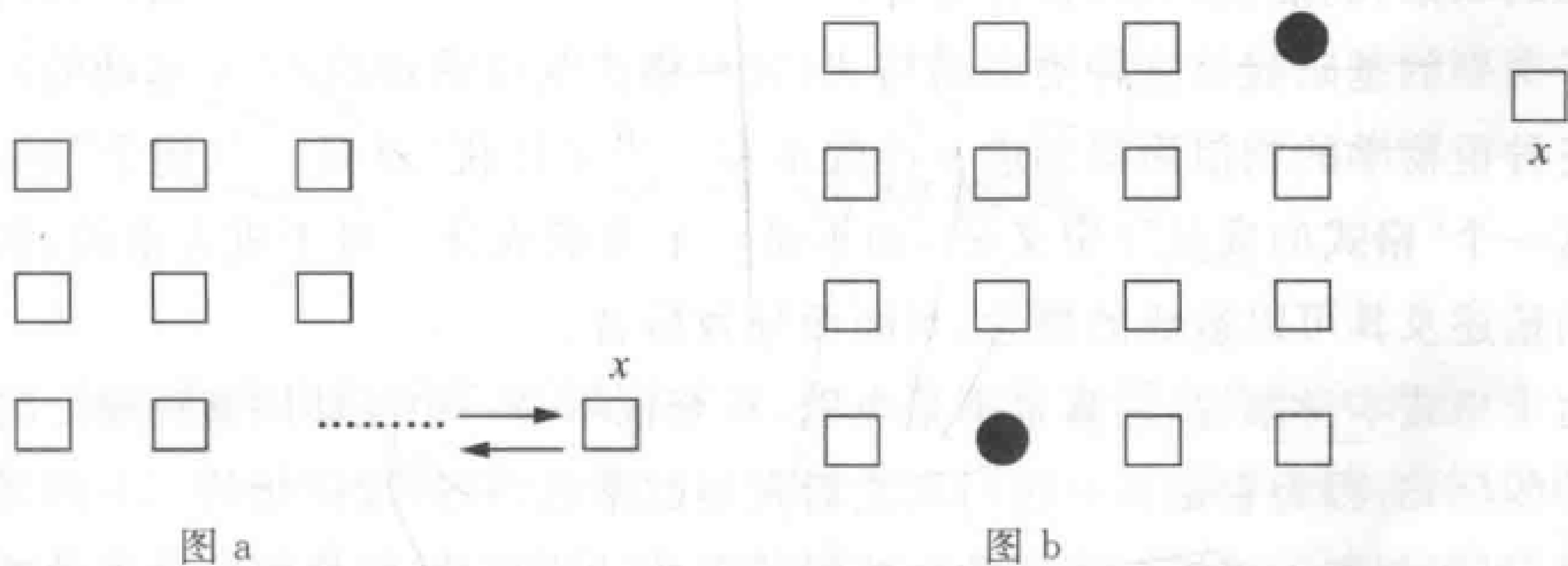


图 a　　　　图 b

2. 感知也可以得到相似的关系,不论是对一个集合之各个部分(如图 b 中的正方形和黑色圆形)同时感知,还是连续同化的感知(如在总的察看之后再看那个物体,或连续几次呈现一个物体,或一般地说,根据先前的感知经验来认出一种形状),情况都是如此。只要在连续看到的物体之间有相似性的感知,那么相似性感知的出现就要涉及感知格式或感知-运动格式的同化(定义 8)。

3. 分隔成员关系和相似性关系并不总是相符的。这样,在图 b 中,虽然黑色圆形同其他的成分不同,但还是被看作是总的集合的一部分,而外面的那个小正方形 x 却不

① 皮亚杰和 A. 莫夫(A. Morf):《逻辑结构和感知结构的不完全的同型性》,见《发生认识论文集》第六卷第二章。

被看作是属于总的集合，尽管它与其他成分相似。

我们可以从 3 中看到，感知并不辨认类包含（定义 7）和类别成分（定义 8）的关系，因为两者都需要内涵和外延特性的协调。因此，谈论“感知的类别”是毫无意义的。

然而，J. 布鲁纳（Bruner）的下列观点并不完全错误。布鲁纳认为，感知乃是一种分类的行为①，即它的基本功能是通过将一个物体归属于一个已知类别来对这个物体加以识别（如“这是一只橘子”）。实际上，他只不过是在强调相似性在连续感知中的作用（见上述第 2 点）。

但这绝不是说类别仅仅通过感知而构成，也不是说主体觉察了这个类别本身（如“所有的橘子”的联合），或是觉察了类别的成员。类别是不能通过感知来构成的，因为它要以一系列的抽象和概括为先决条件，从这些抽象和概括中，类别引申出它的意义或内涵，它与附加的运算一起控制了它的外延关系。类别本身绝不能感知到，因为一般说来它的外延是无限的，而且，即使它的外延加以限定，受试者所察觉的也不是类别本身，而是构成这个类别的那些成分的某种空间构造。当我们看见一个橘子并且说“这是一个橘子”时，并没有直接察觉到这个物体和这个类别之间的连接，我们所做的只是将所看见的这个橘子同化到一个被布鲁斯维克（Brunswick）描述为“经验的格式塔”的感知格式之中。对于这个橘子的感知是，具有熟悉的蛋形的构造，褶皱的皮和赤黄的颜色，这个构造已经获得了作为先前感知经验之结果的它的稳定性，它同许多感知-运动格式有着密切的联系：剥皮、咬、嚼、挤汁等等。

橘子类别的基础就是这种类型的格式（这种格式既是感知的，又是运动的），而且它将由于各种植物学的相似而得到进一步的丰富。当主体说“这是一只橘子”时，他所察觉的是这一个“格式的成员”（定义 8），而不是一个类别成分。对于成人来说，前者将通过词语的描述及其可以造成的概念、判断而导致后者。

就这个格式本身来说，它肯定不是类别，甚至也不是一个能够同某种确定时间有联系的独特的感知，因为它是在一段时间之后发展起来的，是连续同化的一个结果。②

于是，可以归属于接近分类行为之感知的那些结构只是（1）格式成分中的感知的相似性——这里的格式本身不是直接感知的产物；（2）以空间接近为基础的分隔的成员。

这两种结构都不存在内涵和外延之间的协调。格式成员是物体感知方面的内涵的特性，它同作为外延特性的间隔成员是完全分离的。虽然概念的分类是从制约它的感知-运动格式中发展出来的，但它包含内涵和外延的协调，这与感知是不同的。

B. 关系　虽然我们不能直接觉察类别，但的确能够觉察关系。正像上面已经叙述

---

① J. 布鲁纳：《感知的预备过程》，见《发生认识论研究》第六卷第一章。

② 当这种格式完成之后，它能够改变单一的基本感知的组织方式。然后，它的完善涉及一系列的感知。这不是被动觉察的事例，它是主动同化的事例，其基础为感知的活动和一般的感知-运动活动。

过的那样，我们可以直接感知相似性，而它乃是一种对称的关系。我们也可以察觉相异性（如大小的不同），而这些乃是不对称关系。

运算的关系结构和它们在感知中的组织方式之间是否有差别？对于一组物体的序列安排（如将木条按长度渐增的次序加以安排）乃是一种“好的”感知形式。如果成分之间的差相等（$C-B=B-A$，等等。其中 A,B,C 都是这个序列的成分），那就“更好”。因此我们可以问，运算的序列往这种感知的构造上增加了些什么？

差别是三方面的。首先，运算的序列包含有转换性（如果 $B>A$,$C>B$,那么 $C>A$），而感知的序列构造则受表象的限制。表象的转换性乃是一种“前推理”[①]。其次，除非以一种特殊的方式来安排成分，否则就不存在感知的序列。从运算的观点来看，这种图形的安排并不是必要的，它只不过是这个序列的一种象征性的表现。最后，序列的运算是指能够处理不对称转换关系的转换（如果 $a=A<B$;$a'=B<C$ 而 $b=A<C$,那么 $A<B<C$……就意指 $a+a'=b$,等等）[②]，并认识到它们的可逆性（$b-a'=a$,等等）。对于感知来说，只有这些转换的结果才有意义，这些转换本身只是可以看见的成分的置换而已。运算则是包含有各种终止状态和导致一种状态变为另一种状态的那些转换这两者的一个综合的整体。

因此我们将发现，儿童达到基于感知构造的运算序列所需时间接近于他达到运算分类的时间。虽然序列方面感知的预见比较容易些，但对于导致运算的序列来说，这种优越性则比较微弱。

4. 感知-运动格式

显然，在分类和序列所涉及的感知结构和运算结构之间有着很大的差别。事实上，在早期阶段，这种差别还要大些。我们不能设想在开始时的基本感知和结束时的逻辑运算之间存在着一种直线式的演化：基本的感知→感知的活动→感知运动格式→前运算的表现→运算。基本感知方面显示出来的场效应可能不是认知组织的“最简单”的形式。现在肯定还没有任何证据表明它们是演变出比较高级的形式的起点。比较可能的情况是，这些“好的形式”本身乃是比较复杂的感知-运动格式的结果，而感知-运动格式并不局限于感知，更不局限于直接的感知。必须记住我们的第二个假设（见本导言第3节，“感知的因素”）；分类运算和序列运算各有其来源，它们不是来源于单独的感知，而是来源于整个感知-运动格式的发展。于是我们不得不对感知本身作必要的限制。最

---

① J.皮亚杰和 A.莫夫：《前推理的感知》，见《认识论论文集》第六卷第三章，巴黎，1958。

② 这可以读如“……如果 a 是从 A 点到 B 点的增额；a' 是从 B 点到 C 点的增额……”等等。——译者注

高水平的感知乃是一种晚期的发展，而我们得探索那些与比较基本的智慧阶段相对应的比较基本的感知阶段。

我们可以把对正方形的感知作为一个对于“好的形式”的感知的例子。我们发现，将正方形看作四方形状的倾向并不是一成不变的，而是随着年龄增长逐渐精确起来的。对于正方形的初步感知被总合为一个感知活动的格式，这个感知活动的格式不仅涉及立即认出这个正方形是熟悉的形状，而且还包括对于几条边和几个角作对称的比较以看出它是不是正方形。运用这个格式就相当于一些探索活动的变换，而这些变换将为每一个察觉的物体证实那些构成正方形类别之内涵的特性。同时，感知决不能认识到这个类别的外延，因为认识外延意味着要同时出现一套正方形，而正方形的数目却是无穷的。但感知格式和这个类别非常相似，这就涉及更为基本的感知。对于年长儿童和成人来说，这种感知格式能够通过一个以转换和概括为基础的、积极的比较过程来改变基本感知的特征，而这比仅仅的感知要更广泛一些。不同正方形的相似性(其基础为它们各自的边和角均相等)同主体的探索动作有着密切的联系。5 岁至 9 岁或 10 岁之间的儿童之所以在三个方面增加这“好的形式”的稳定性，原因正在于此。

任何一个感觉样式只有在与其他感觉样式的密切联系中才能运演，视觉感知与触觉感知有着密切的联系。目光和抓握动作的协调在 4－5 个月时建立，从那时开始，对于物体的视觉感知便不可分离地与触觉感知联系在一起：在感知中所认识到的意义将随着整个动作系列的变化而变化。感知格式绝不是独立的，从一开始起，感知就附属于动作。结果，从发生的角度来看，感知-运动格式便像基本的感知那样基本。格式并不仅仅是过去和目前的感知的再安排。感知只不过是进入这个格式结构的信号(而且它们包括那些自己接受的信号)，它们是必要的，但不是充分的。格式也不能纯粹根据这些内部反映的和自己接受的信号加以解释。在整个格式的组织方面，产生这些信号的动作本身乃是一个必不可少的因素。换言之，主体对于物体的觉察和他自己的活动不是分离开来的，他是将物体作为改变了的东西而加以觉察的，或者说，他是将物体作为能够被他自己的动作改变的东西而加以觉察的。一个立方体是作为一个能够抓握和翻倒或翻转的东西来觉察的。这些感官觉察不到的部分由于感知同动作结合的方式而仍然在感知中出现(同感知正方形的格式相比较，感知立方体的格式更要随主体的探索动作而变化，它不是基本感知的材料)。让内(Janet)认为，觉察一把安乐椅就是在观察一个人们能够坐在它上面的物体。冯·韦兹沙克(Von Weizsäcker)做出了下列更有力的说明：觉察一座房子并不是看一个刚刚映入眼帘的图像，而是认识一个你能走进其中的坚固的庇护物！

因此，我们便要来看看最后的假设，即分类的起源和序列的起源将在整个的感知运动格式(包括作为这个整体之组成部分的感知格式)中找到。

在 6－8 个月和 18－24 个月之间(早在语言获得之前)，我们发现有许多暗示了分类和序列的行为格式。将一个熟悉的物体交给儿童，他随即识别了它的可能用途，这个

物体被同化到那个习惯的摇、晃、撞、扔下地等格式之中。如果这个物体是他以前从未接触过的，那么他可能连续地运用许多熟悉的格式，似乎他是在通过决定这个物体是否能摇，或能叫，或能磨等等来理解这个陌生物体的性质。在这里，我们看到了一种实践的分类，①这有点使人联想起后来的根据用途来下的定义。但是，这种起码的分类只有在连续的尝试过程中才能看到，而且不会造成若干同时存在的集合。然而，早在儿童将若干相似的物体放到一起或当他们构造复杂对象时，那些同时存在的集合就得到了预兆。我们可以将这两种类型的行为看作是第一章中图形集合的前言语的先兆。

至于序列，我们可以从各种构造中看到某种近似之处。其中的一个例子是用一些盒子堆成的塔。开始时，儿童只是任意地拿取盒子，但后来他就以接近于按照逐渐减少的次序来安排这些盒子。

在感知-运动和前言语的发展阶段，我们可以观察到各种分类和序列的原型，这个事实证明，这些结构的根源同语言是无关的。不过，这些基本的结构同对应的运算结构也相去甚远。虽然由于感知-运动格式导致了智慧和概括，所以它是概念之功能的相等物，但从结构的观点来看，这两者却绝不是完全一样的。感知-运动格式的特性使得它的各种可能的运用不能同时被认识到，所以"外延"和"内涵"便不能通过相互参照而得到协调。

感知-运动格式由稳定的运动格式和认出适当信号的感知成分所组成。如果新的物体或新的情境互相之间有着充分的相似，那么这个格式就能应用于一系列新的物体或新的情境：如摆动悬挂的物体，或通过拉一张纸或一块布来拿到放在它们上面的物体。

下面是对于感知-运动格式之内涵和外延特性所做的分析：

(1) 从内涵的观点来看，存在着一种同等关系的结构，而这些同等关系是决定这个格式处理的各种物体之特性的。儿童认识到，如果一个物体悬挂着，那么物体就能摇摆；如果一个物体放在一个可以移动而他又够得着的东西上，那么他就能够通过拉这个东西而拿到这个物体。

(2) 感知-运动格式的外延是它能够处理的一系列的物体和情境。

但是，从主体的观点来看，在内涵和外延之间仍然不存在系统的对应，因为这个格式处理的那些成分并没有形成一个同时存在的集合。只要有了运算的分类，这个条件便通过一个有限的物体之类别的物质的集合和思想上对于那些以运用符号为基础的开放的类别加以集合而得到满足。上述两个特性可以作如下的进一步分析：

(1a) 作为感觉中的一个物体之内在关系（如悬挂的关系，放在一样东西上面的关系等）的内涵的特性。

(1b) 一个被觉察物体和这个格式过去已经处理过的其他物体之间的相似性关系。

① 参见皮亚杰：《儿童智慧的起源》，1952。

(2a) 将这个被觉察物体的一个部分同整体联系起来的分隔的成员。

(2b) 将那个实际觉察到的物体同感知-运动格式联系起来的格式的成员。

(1a) 是内涵的特性，而(2a)是对应的外延的特性。由于一个物体之潜在的用途将随着它的过去和整体之关系而变化，所以它们两者便被结合在感知-运动格式之中。同样，内涵的特性(1b)对应于外延的特性(2b)。但这两个特性在格式中并不一致，因为在这个水平上不存在表象，所以儿童不能想起这个格式所处理的那套物体。因此，在实际被觉察的那个物体和格式已经处理过的那些物体之间的相似性便不能诱发，虽然潜在的经验决定了认识。于是，格式的成员(2b)不能呈现外延包含的形式。某一特性对于特定物体的归属(这种归属将在物体和由这个属性加以界说的整个类别之间建立外延的关系)仅局限于这个物体，因而仍然是内涵的。至少我们可以说，外延和内涵之间在或大或小的程度上缺乏完全的分化。

感知-运动水平所显示的初步的序列是不稳定的，因而比感知的构造更接近于运算的序列。但它还必须要获得那种产生可逆性的完全的机动性，因为如果没有可逆性，主体便不能通过＞和＜关系的协调来系统地构造序列。

这些感知-运动格式与逻辑思维结构最接近的形式极可能是将格式分化为小格式，结果形成一个等级的组织。在这方面，感知-运动系统预示了未来的运算等级。于是，通过拉一个东西而拿到放在它上面的那个他想要得到的物体这个格式，最终将要分化出分支的格式，而在这个分支的格式中，物体放置其上的那个东西便同一块厚板一模一样：它能够沿着它的中心线移动。于是主体便有一个利用承托物而拿到物体的一般的格式，它再分为两个分支的格式，其中的一个只是拉这个承托物，而另一个则是移动它或使它滑动。但是，分化和等级的结构两者仍然都不明显，无论在实际方面还是原理方面，可以运用这个格式和分支格式的情境都没有认清，所以还是没有严格意义上的分类。

本章的要点是，提出分类和序列之来源可以追溯到语言和符号表象的发展之前。虽然后者对于它们的发展是必要的条件，但却不是充分的条件。尽管对于相似和相异之早期的、初步的认识对于后来的这些系统有着重要的意义，但“外延”却仅局限于单个物体的部分之空间布列的亚逻辑形式，它可能是集合的形式。到这时为止，在非图形集合的前逻辑形式或类别的逻辑形式中还不存在外延，因此，分类的中心问题是外延和内涵的分化和逐渐的协调。

下面的三章清楚地表明，这是一个复杂的完善过程，而且它有赖于互相联系的几个因素。为了发现儿童如何经历几个连续的阶段而建构成那些必要的运算，我们将努力根据不同发展水平的儿童的动作来研究这个问题。

第一章 图形的集合①

有些类型的行为在年幼儿童中非常普遍，而且也很好地显示了分类是如何形成的。处于第一阶段的儿童并不仅仅根据相似来把一些成分整理为一些集合和子集，他们不能检查物体的空间构造，他们所做的只是将它们联合成一些“图形的集合”。这种图形的集合介于混合的空间对象和类别之间。

1. 问题的初步陈述

正像“导言”中所说明的那样，一个类别涉及两种类型特性或关系。两类型都是必要的，同时对于构成一个类别来说又是充分的：②

(1) (a) 某一类别之成分共有的那些特性以及这个类别所从属的其他类别的特性。

(b)一个特定类别的成分所特有的并使它们同其他类别的成分区别开来的那些特性。

(1a)和(1b)都是内涵的特性。

(2) 类别成分和包含的部分-整体关系。如果这些被用于(1a)和(1b)所限制的那个特定类别的成分以及该特定类别所从属的那些类别的成分，那么它们就由“所有的”、“有些”(包括“一个”)和“没有”这些量词来表达。标号(2)所描述的这些关系乃是外延的特性。

例如，猫具有若干共同的特性(“所有的”猫都具有这些特性)，其中有些特性是猫所特有的，而有些则是其他动物所共同的。

类别的这种定义能够用于高于一定年龄阶段儿童所做的分类，它并不涉及一个类别的成分之空间构造。单个猫的空间排列并不影响猫类的(1)和(2)特性。确实，在(2)中界说的包含关系能够用拓扑结构，因而也能够用空间的特征加以说明。但是空间的

---

① 与G. 诺尔丁(G. Noelting)和S. 塔波尼耶(S. Taponier)合作，他们这一章和下一章检查了大约二百名受试者。

② 应该注意，不能把下列定义孤立地用于一个单独的类别，而仅仅用于包含在其他类别中的一个类别。我们认为，一个类别是不能孤立地存在的。

特征是第二位的，因为它乃是一种得之于类包含的代数结构和某些拓扑结构的异体同型功能。在丝毫不涉及空间的情况下，对类别的结构作一个完整的描述是完全可能的。

因此，“图形的集合”这个术语将用于描述对准备加以分类的那些成分所做的空间排列，这里似乎清楚地表明，这样的构造在主体的心目中发挥了一种基本的作用。换言之，儿童显然不能把他所做的图形的排列从特性(1)或(2)中分离开来。这样，他可能将一个三角形置于一个正方形之上，因为他认为这两种形状肯定是有着某种联系的：三角形使他想起了房子的屋顶，而正方形则可能是房子的主体。在他看来，这就意味着三角形必须放在正方形之上而不能放在任何其他地方。在决定这种排列的内涵特性(1)方面，空间的构造在这里发挥了一种基本的作用。然而，我们有时也发现，儿童往往根据一个集合的部分的空间排列而以不同的方式使用“有些”和“所有的”这些词。在这里，这种排列对于决定外延的特性(2)就是至关重要的。

但是还存在着两个需要预先解决的问题。第一，人们能否确定儿童已经理解他仅仅根据相似性来对一套物体加以分类，而不是把这些物体摆弄出些意思来，或仅仅是任意地把它们聚在一块？第二，人们能否确定这些空间的构造在作为具有象征意义的东西而加以使用？人们能否确定在这些“图形集合”的结构方面，这些空间的构造的确是作为一个基本的成分而加入的？

就第一个问题(理解结构)来说，本书不拟讨论向年幼儿童提问的最好方式问题。(我们所使用的问题是：“将相同的东西放到一起”，或“将相配的东西放到一起”，等等。)我们希望表明，尽管2—5岁的儿童不能与7—8岁的儿童在相同的意义上理解分类究竟是什么，但他用以解释我们的结构的方法却最接近于我们对于这种运算结构的解释。

至于第二个问题，成人(甚或逻辑学家)无论在什么时候利用某种象征性的手段来描绘一个分类，都必定要从空间的方面来加以思考。我们在分类之“树”或欧拉圈(the circles of Euler)中看到了一些例子。这样，类包含关系($A<B$)就可以用两个圆圈来说明，其中的一个(B)容纳了另一个(A)。这是一个空间的图形：圆圈 A 画在圆圈 B 的里面，以表示 A 是 B 的一部分，同时把 B 描绘得比 A 大些，因为它容纳了除去属于 A 的那些成分以外的成分。与此非常相像的是，一个已经超过图形集合水平的比较年长的儿童很可能通过摆成若干“堆”，并用一些小“堆”构成一些较大“堆”的方法来显示若干个类。在这里，一个物体放在一“堆”里面这个事实再次显示了它乃是“堆”或“小堆”的一部分。但是，这种表示也还只是象征性的，只是将欧拉圈改变为集合罢了。

为了研究图形集合中空间关系的作用，我们必须得确定，这种空间的排列是不是空间的象征手法，或者说它是否对分类本身的意义[类别的特性(1)或(2)]做出了根本的贡献。就分类之“树”或欧拉圈来说，空间的图形是仅仅作为这个集合的象征而加以使用的。这种象征意义仅限于类包含关系或类成员关系[外延的特性(2)]。象征作用依赖于分类的结构和某些对应的拓扑包含关系之间的同形性。另一方面，就图形的集合来说，空间关系乃是构成的而不是象征的。其证据是，它们包含了一个类别成员之间的

关系。换言之,它们必须包括内涵的特性(1),也包括类包含和类成员。再者,就其性质来说,在图形集合的水平上,外延的特征也不是独立存在的,因为关系(1)和关系(2)之间的分化还不完全。

在图形集合的情况中,成分本身之间的关系不可避免地要导致某种图形的排列①。而在非图形集合类别的事例中,使用图形只不过是为了方便,如果人们愿意的话,不用图形也是完全可以的。

现在,我们可以就图形集合的形成,系统地提出下列假设:

(a)类别(和分类)需要以部分和整体关系的协调(特性2)以及同那些界说相对应的"内涵"的相似和相异(补偿性)关系的协调为条件。

(b)尽管在图形集合的水平上存在着相似和相异的关系,但它们往往运用于连续的配对物体,而同部分-整体的关系仍是没有联系的。这些相似性和相异性有其实践格式方面的起源,这些格式可能是感知-运动的,也可能是言语的,它们并不导致形成一个同时与一切有关成分相关的系统。后者是概念的一个基本特征,它可以用它们的外延和内涵来加以定义。

(c)尽管在这个水平上存在着部分-整体的关系,但它们还没有被用于一些不相连接的集或集合(类包含和类成员)之中。它们往往依赖于感知的构造,这意味着它们仅限于连续的集合这个范围,也就是说仅限于空间的部分和整体的范围(将一个图形加以连续的再划分,并将通过如此再划分而得到的那些部分合到一起)。

(d)因为它不能协调相似和相异的内涵关系(特性1),所以主体便易于构造具有外延之部分-整体关系(特性2)的图形集合。如果将一组物体交给儿童去分类,那么,他便仅仅考虑它们的性质特性,因为他就是据此来构造一个或数个空间的整体的。他还得理解类包含和类别成员。为了达到这一点,他就需要同时知道有关的相似和相异,而不是在以后连续地根据这些相似和相异来改变他的行为。只有到了他同时知道有关的相似和相异的时候,部分-整体的关系才能从连续改变扩展为不连续的改变。而且只有到了那个时候,类别成员和包含的关系才能够同分隔的成员关系相比较。

(e)这就是说,图形集合乃是儿童协调部分-整体关系和相似、相异关系的初步尝试。因为,(1)在儿童的早期格式中,相似和相异关系的运算是历时的,而不是同时的,开始是感知的和感知-运动的,后来伴随有想象的格式和最初的言语格式;(2)部分-整体关系的最初的直观得自于感知的空间形式。

我们可以将图形集合方面的实验结果概述为两个主要的结论:

(a)存在着一个图形集合的阶段,这个阶段其长短依赖于所使用的实验材料和指导语。这个阶段毫无例外地先于非图形集合(这是一种仅仅以相似和相异为基础的阶段,

---

① 如果一个集合还没有构成一个类别的话,我们将称它为"非图形"集合,因而它缺乏包含的特性,尽管它同时又在特性(1)或(2)方面与图形的表示无关;参见第二章。

所以类别成分非常明显,而类包含却不明显)的阶段。真正的分类要晚于这两者。

(b)在图形集合阶段之内,看来并不存在具有明确顺序的一些小阶段。虽然有许多可以识别出来的不同类型的反应,但这些反应乃是部分地交搭,而不是相继的。而且,它们随着实验的材料和提问的方式而变化。下面是三种主要的类型:

(1) 将物体放成一线,这条线可能是连续的,也可能是不连续的。

(2) 集合对象:用相似的成分摆出一些两维的或三维的图形集合,它们合起来构成了一个不间断的整体,而这个整体乃是一个几何图形或样式。

(3) 复杂对象:与集合对象不同,它是由相异的成分组成的。虽然它的最终形状可能是几何图形,但也可能是描述性的和图案性的。

2. 用平面几何图形实验所得到的一般结果

第一种类型的材料由正方形、三角形以及环和半环组成,有些是木头的,有些是塑料的。这些形状有各种各样的颜色,偶尔也采用一些彩色的字母。在利用这种材料时,2 岁 6 个月至 5 岁儿童所摆出的各种类型的图形集合的数目之大,给我们留下了深刻的印象。虽然在同样的情况下,早在 4 岁 6 个月时就发现有非图形的集合,但 5 岁 6 个月以下的儿童所摆的非图形集合却是很少的。最一般的指导语是:“把相同的东西放到一起”。不过这一指导语常常要作进一步的引申,如“把它们放好,使得它们都一样”,“把它们放得完全相像”,或“如果它们是同样的,就把它们放到这儿,然后把相互之间相同但与这些不同的放到那儿”。下面是一些在前面提到的各种图形集合的典型例子:

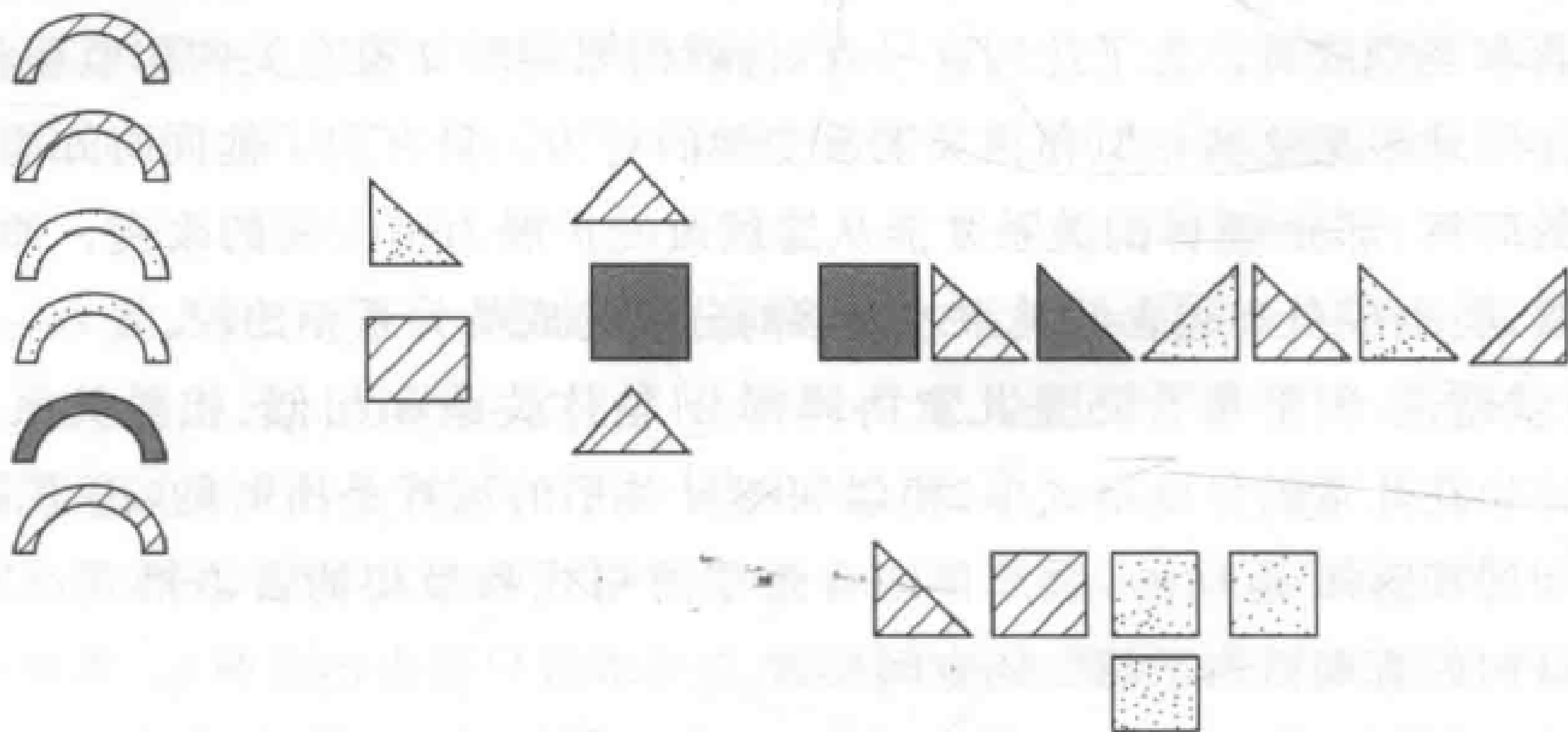


图 1

Ⅰ. 相互间隔的小队列——这是一种非常基本的反应。受试者不是将所有放在他面前的物体加以分类,只是用其中的一些物体来构造若干独立的队列,而且没有想到要用其余的材料。这些相互间隔的集合的一个显著特征是,其排列往往是直线的。我们将在后面考虑它的原因。

维夫(2岁6个月) 先看着蓝色的环,继而看红的,然后看黄的,同时说"同那一样"(连续的同化)。然后她把那些环摆成一排,而不顾及其他的模型。当问她哪一个与黄色的三角形相配时:她指向黄色的环,继而又指向蓝色的正方形(它也有角)。然后她把三角形和正方形摆成一条短的竖线。最后,她把一系列的正方形摆成一条线(也是竖的),嘴里说道,"一座塔"(平放在桌子上)。

乔斯(3岁1个月) 先把六个半环(两个蓝色、两个黄色、一个红色和一个蓝色)放成一条线。接着她把一个黄色的三角形放在一个蓝色的正方形上面,后来把一个红色的正方形放在两个蓝色的三角形之间(三个模型连接在一起),继而又把几乎所有的正方形和三角形摆成一排(相互之间还是连接在一起,但模型和颜色却是任意拿取的)。现在她把一个三角形和三个正方形放成一条线,而且在这么做的同时她认定这是一座房子。她继而在另外三个正方形的下方加了一个正方形。因此,最后的反应属于"复杂对象"的范畴(见图1)。

尼尔(3岁1个月) 一开始就接连地将圆形摆成一排(倾斜的),继而把一些正方形和三角形摆成一条线,但稍微有点间隔。然后她便摆出一个复杂的对象(见Ⅲ)和一些队列。

这些分隔的队列构成了分类结合的最简单形式。这并不是说他们属于一个较早的阶段,也不是说他们是从复杂对象开始的受试者。

(1) 受试者从确定被选择的第一和第二个成分之间的相似性开始,然后,对第二和第三个成分之间的关系的确定便或大或小地相异于前者,预先根本就没有计划。受试者开始时也没有考虑到所有的成分。维夫在拿环之前,乔斯和尼尔在拿到那些东西以及所有这三个受试者由于它们有角(不管角的数目)而把正方形和三角形连接起来时的情况正是如此。



图 2

(2) 这些成分由于相邻的两个成分之间的连续的相似性而连接了起来,根本就没有对于整个集合之格式的预见。事实上,甚至在构造的过程中也没有出现这样的格式,因为受试者在把第三同第二个成分连接起来的时候,并没有想到第一个成分(相似性是连续地加以确定的)。受试者在一个成分和下一个成分之间发现了相似性,而且他将这种相似性与部分-整体的关系一致起来。不过这是很容易出现的情况,因为部分-整体的关系本身是能够逐渐地创造出来的。在没有任何事先想好的队列计划的情况下,他把第二个成分放到第一个成分的旁边,把第三个成分放到第二个成分的旁边,等等。他是这样的在通过连续的一维的邻近而构造一个直线排列——这是部分-整体(空间)成员关系的最简单的形式。

(3) 队列通过构造连续的相似这种方式而开始形成。队列形成以后,即使是对于儿童来说,它的基本结构有时也会变得明显起来。然后,而且只有在此之后,它才成为

一个具有概括和转换能力的格式。这就是我们在第二种类型中所见到的那些反应。

Ⅱ.具有不同标准的连续的队列——延伸队列本身导致一个由子集所组成的长线。但后者并不是在一个预先想好的计划的基础上构成的，而且受试者甚至还没有意识到它们的存在。它们的产生是由于这么一个事实——当儿童一个一个地移动这些成分时，他忘记了先前所做的那些，这样，在连续的比较过程中，他便不自觉地改变了相似的标准。

艾拉(3岁11个月)　把一个蓝色的三角形放在另一个三角形旁边，继而又放一个蓝色的正方形。蓝色的正方形后面又跟上一个黄色的正方形(从颜色的标准变到形状的标准)，然后又放上红色的、黄色的和蓝色的正方形。因为最后那个正方形的前面是黄色的正方形，他便把一个黄色的三角形放到了它后面(可能受到了对称性的影响)。这就诱使他又选择了六个三角形，先是两个红的，然后是两个黄的，最后是两个蓝的。——后来艾拉在转向复杂对象之前退回到分隔的(而且是垂直的)队列上去。

克里(4岁10个月)　开始时把五个矩形排成一行，其中第五个是黄色的。这导致他选择了四个黄色的三角形，再跟上两个黄色的半环，这转过来又导致五个不同颜色的半环(见图2)。

盖姆(5岁8个月)　开始时把字母排成一行，最后一个字母是黄色的；它的后面跟上了一个黄色的环，然后在黄色的环后面又放了一串其他颜色的环。

标准的变化乃是这些连续队列的主要特征，它证明了在相似关系和部分-整体关系之间加以协调的困难。

(1) 在这个水平上，相似性是通过时间的连续关系而确立起来的。儿童不能形成一个分化得足以同时包括一个类别之所有成分的格式，他们的最接近于这样一个格式的方法是图形的展示，但这同仅仅根据由相似和相异加以界说的成分的(外延的)定量而作的分类结构是大不相同的。因此，部分-整体的关系不仅在时间上是连续的，而且，它同某一特定的空间排列也是有联系的。如果这种分类是适当的，那么，部分-整体的关系就将自动地依循受试者所确立的相似性和相异性，而它们的空间的展示将纯粹是引申出来的。我们已经看到，只要受试者将他在连续的时刻中发现的那一系列的相似性同成分的空间连续性相配，那么队列就会相当自然地布列出来。但是，如果他继续延长这个队列，而不是摆成一系列的独立的子集，那么他必定要随着他的活动而改变他的标准。无论这个连续的原则是空间的(如图形)或时间的(如一系列的相似)，它都不足以表示一个有等级的类别结构。相似和不相似的复合需要一套等级的包含，而不是一个直线的连续。

(2) 标准的变化表明了直线连续在空间和时间方面所发挥的指导作用。如果符合最初的相似标准的那些成分全部用完，那么，受试者就只是寻找另一种相似性来继续排队列，第二个标准就是这么出现的。就这一点来说，第一个标准已经被忘掉了，因为这

个队列的开始部分无论从时间(记忆)还是从空间(感知)来说都是久远的事了。这些年幼的受试者实际上受到一系列的两项之间关系的限制,即队列中最后一个成分和新被选中成分的限制。

(3) 这些连续的队列并不表示一个比前面描绘过的分隔的队列高的逻辑组织水平——至少在开始时是如此。向另一个子集的转换和向另一个标准的转换是对应的,因为两者都来自连续的两项之间比较的局限性。两者都反映了同一个方面,即不能协调一个集合的内涵(相似和相异)和它的外延(类成员),而且(因此就)缺乏等级的包含。

(4) 然而,一旦它构成之后,通过一个队列的伸延而得到的整个系列可能会诱使受试者回过头来检查整个的图形。如果出现了这种情况,那些关系就会被同时看到,随之而来的交替将把受试者引向第二阶段,那就是若干不同性质的逻辑集合的并列。我们的一个受试者(沃尔,4 岁 10 个月)①一开始就摆出一个连续的、涉及不同标准的、不断延长的队列(先是一行正方形,最后一个是黄色的;然后用黄色的图形接下去摆,最后一个是半环;接着便用半环接下去摆,最后一个是蓝色的,最后,他接下去又用蓝色的正方形来摆),但随后他却从这个队列最后部分中把蓝色的正方形移到队列的最前面。所以在结束时他摆了三段同类的队列(正方形、三角形、半环)。尽管这些是直线排列的,但它离非图形集合却并不相去甚远。

Ⅲ. 介于队列和集合对象或复杂对象之间的反应——集合对象或复杂对象乃是一些多于一维的图形的集合。我们经常发现两种类型的构造,它们都不是完全的队列,也不完全是集合对象或复杂对象。第一种类型是若干个分隔的队列,其中有几个队列相互之间形成一个角度。第二种类型的图形是,开始是队列,但后来又转变为两个维度。在这两者之间还有一些中间的形式,其中包括一些真正的队列——即将那些小队列重新加以安排以形成某种对称的形式。在这里,那些以一系列相似性开始的队列,最后便形成了一个具有不同程度的一致性的(但是图形的)整体。

艾拉(3 岁 11 个月,在Ⅱ中已经提到过他) 连续摆了五个正方形,中间一个是红色的,第二个和第四个都是蓝色的,两头是黄色的(双对称)。

庞斯(4 岁 6 个月) 按照蓝——黄——黄——蓝的顺序仔细地排列了四个彩色字母。

佩特(4 岁) 构造了一个对称的彩色矩形的队列,最后他在两端各放上一个蓝色的矩形(与彩色矩形这一行成直角)。在他 4 岁 5 个月时,他按照连续的相似,以形状和颜色这两个变换的标准摆出了一个大"L"形。

迈克(5 岁) 将矩形垂直摆成一条线,然后根据形状和颜色这两个变换的标准用圆形和正方形再成直角摆成一行,最后用字母水平地摆了一行。

尼尔(3 岁 1 个月,在Ⅰ中已经提到过她) 开始时摆了若干个分隔的队列,但

---

① 见第二章第2节。

继而把一个黄色的三角形放到一个黄色正方形的旁边，然后把一个红色三角形放到那个黄色三角形的下面，把一个红色正方形放到那个黄色正方形的下面，这就形成一个四方的图形，可以用它来表示一个由两个横排两个纵排组成的矩阵。但她继而用一个黄色的正方形去换一个蓝色的，这证明她并没有想到任何逻辑的排列，而且只是从队列转换到集合对象。后来她又构造了长的连续的队列，这个队列的两头都是正方形，但在中间摆了七个半环：她说这是"一座桥"。

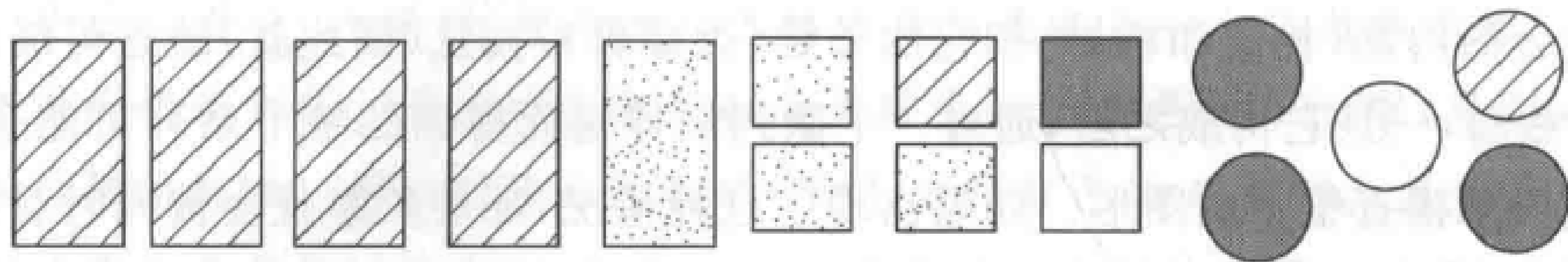


图 3

佩特(4 岁 5 个月) 先摆出一些我们已经描绘过的对称而成直角的队列。他以同样的才干用三个蓝色矩形加上一个绿色矩形和一个黄色矩形摆成一排。因为再也没有黄色矩形了，他便拿起两个黄色正方形，并把一个放在另一个的对面以形成一个矩形。这使他能继而在黄色正方形上面放一个蓝色正方形，接着再在白色正方形的上面放红色正方形，然后一上一下地放了两个圆形，最后又加了三个圆形。开始时的一个队列最后以一个二维的图形结束(见图 3)。——在试验结束的时候，他摆出了另一个处于队列和长平面之间的图形，并把这叫作"长无轨电车"(见图 4)。

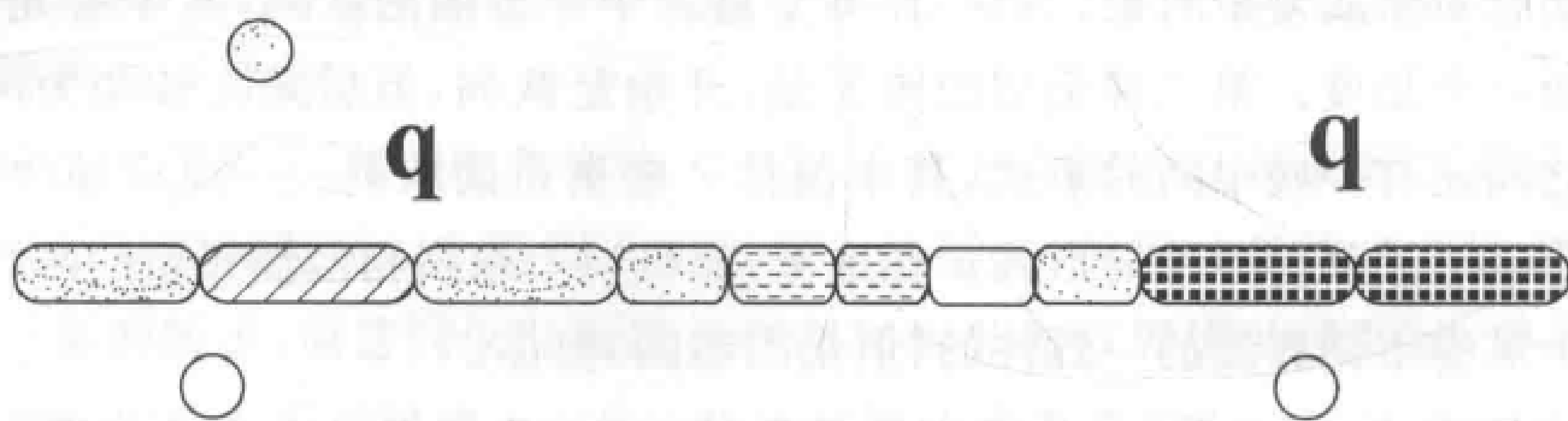


图 4

鲍尔(4 岁 9 个月) 依据颜色把两个半环配对地排列起来，使每一对都形成一个从水平方向切开的环；然后继续用不配对的半环摆成一长排；最后用正方形构成了一个二维的形式。

这些例子包括有一维的对称(艾拉、庞斯和帕特)；形成直角的两排或三排(佩特和迈克)；最后还有以直线形开始而以二维图形结束的一些结构(尼尔、佩特和鲍尔)。对它们可以作下列解释：开始的队列乃是相似的要求和类别成员之间的综合，但它是不稳定的，因为这两个特征只有根据相邻的两项之间的关系才能被认识到。由于这种平衡是虚弱的，所以受试者就不得不考虑综合。他能够通过加强这一排中的成分的相似性来达到这一点，他也可以通过强调它们整体的包含性来完成它。在这两种情况下，他都是在试图用同时的整体来代替暂时的系列。但这两种关系却不能在同时得到加强。这

样做就相当于把这些集合的“内涵”(有关的质的相似和相异)同它们的“外延”(部分对于整体的关系)加以协调。类别和等级分类之形成的全部问题即在于此。当处于这个水平的儿童加强相似性的时候,不可避免地要忽略部分-整体的关系,而当他们加强了部分-整体的关系时,就不可避免地要忽略相似性。

当相似性得到加强时,部分-整体的关系并没有随之而得到加强,这是由于这么一个事实,即所有的成分都构成为一个直线图形的部分。因此,儿童只是试图改善这个队列,其途径或者是引进相似的小系列(用变化了的标准来继续摆一些队列),或者是从整个系列中创造一些涉及两个或数个子集之间相似性的对称。

当想要加强部分-整体的关系时,受试者便放弃一维的包含(连续的邻近),而有利于二维的相属。但这些维度是图形的,而不是逻辑的,这正是我们要研究集合对象或复杂对象的原因。所以,易于发生的情况便是,通过加强包含性,并使尽可能多的成分同时附属于一个直观的整体,主体就倾向于忽略这些成分之间的相似性。这是因为整体易于获得它自己的图形的特性,这就使它的分类的功能不得不处于一种不显要的地位。于是,即使儿童开始时所构造的是一些由相同的项目组成的集合对象,他们也会很容易地把它们转变成一些由不同的成分组成的复杂对象。

由集合对象向复杂对象的转变能够以两种方式发生。由于受试者忘记了相同的成分,并增加了一些不同的成分,结果,他做的排列可能是一个很有趣的几何图形,这就是我们在帕特的长矩形中所看到的现象。比较经常发生的是另一种方式,儿童认为他的排列代表了一个经验的对象,这就使他忘记了原先的任务——对这些成分本身加以分类。尼尔的“桥”和佩特的“长无轨电车”都从这里得到了解释,等我们讨论到第Ⅵ类反应时,将再次看到这种行为。

Ⅳ. 集合对象——从定义方面来说,就是联合在一起以组成一个统一图形的那些相似成分的二维或三维的集合(参看Ⅲ中所描绘的尼尔和鲍尔的正方形的集合对象和鲍尔配对的半环),集合的对象构成了一种能够过渡到非图形集合的比较发展的行为。非图形集合同集合对象的区别仅在于,后者是与一个确定的形状联系在一起的。两者都是由相同的成分组成的。同时,集合对象可以产生自或转变为我们已经提到过的那两种反应样式中的任何一种:以类似成分所组成的线段和复杂对象。由类似成分所组成的线段本身就是线状的集合对象,而复杂对象与集合对象的区别仅在于:复杂对象是由相同的成分所组成的。从发展的观点来看,所有这些反应样式都是相同的。受试者将一些相同的成分加到一个集合对象上去的倾向尤其普遍。这就是集合对象之所以不稳定以及它远不如复杂对象出现得经常的原因。下面是几个附加的例子:

皮克(4 岁 6 个月) 构成了一个矩阵。在这个矩阵中,行列是交叉的(参见尼尔,本节Ⅲ),他先把一个蓝色大正方形放到一个蓝色小正方形的上面,并在它们的下面将一个蓝色大圆形放在一个蓝色小圆形上面。然后,在它们的右边,将一个黄色大圆形放到一个黄色小圆形的上面,又在黄形圆形下面,将一个黄色大正方形放

到一个黄色小正方形的上面。"它们是相同的正方形和相同的圆形!"

布罗(5岁3个月) 总是在集合对象(一个由六个正方形组成的大矩形,在六个正方形中,三个是蓝色的、三个是黄色的,两种颜色交叉地排列起来)和复杂对象(一个正方形的四周围着四个三角形,它们共同组成了一个其中一个角向下的大正方形;然后在每个角上各放一个小正方形)之间犹豫不决,在直线队列和集合对象之间拿不定主意。第一个是由同样大小的一些正方形所组成的一个系列;而第二个则是一些大正方形和小正方形交替放置的队列,这个队列的结尾部分是在一排大正方形的上面放着一排小正方形。

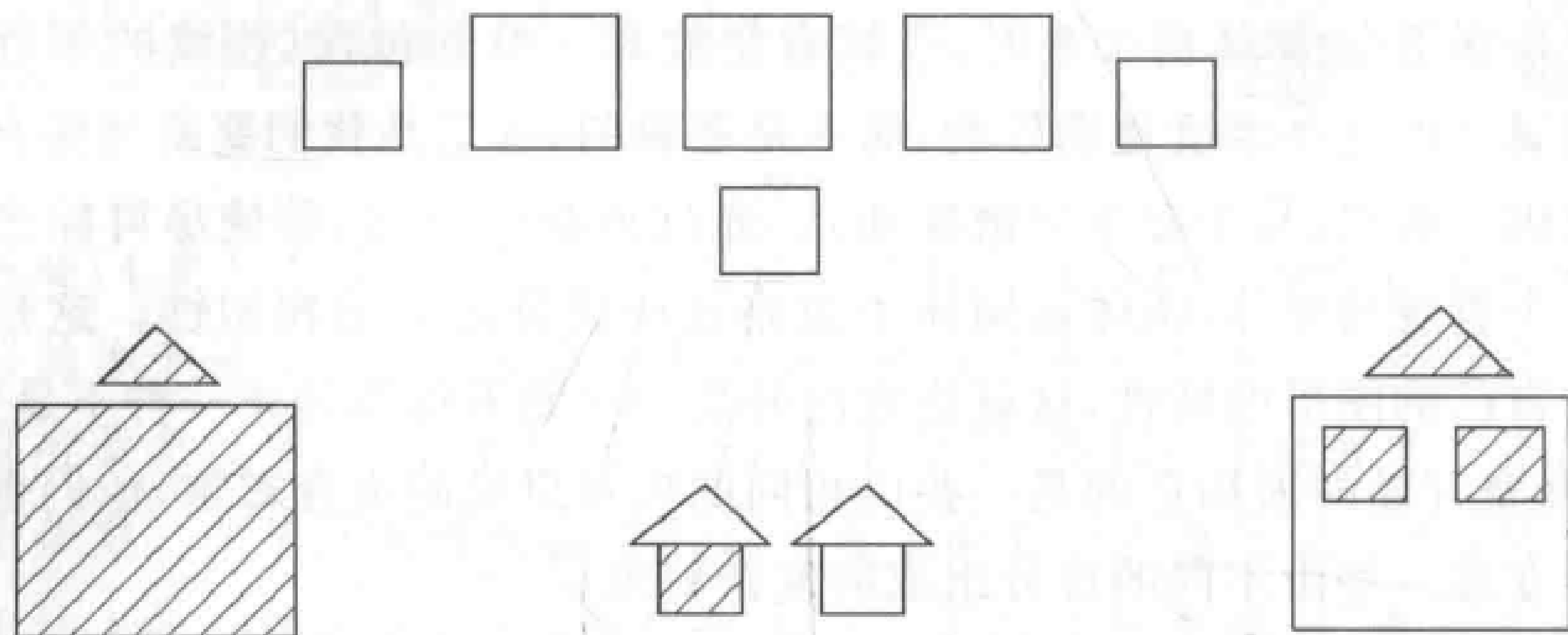


图 5

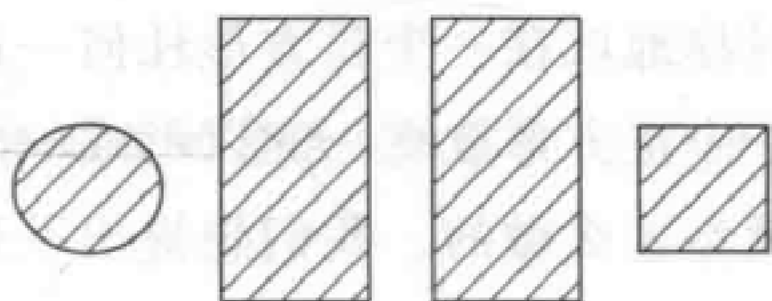
布克(5岁3个月) 也是犹豫不决。他先摆了一个集合对象(将三个大正方形放成一列,形成一个矩形,但在这个矩形的三条边之外,分别又加上一个小一些的正方形);然后又同一些正方形和三角形组成一个复杂的对象(见图5)。

Ⅴ和Ⅵ. 以几何图形或场景内容为基础的复杂对象——当材料排列成两维的图形时,部分与整体的关系便得到了加强,因为整体变成了一个封闭的集合。但是,那些呈现为平面或立体的集合比直线式的排列更有趣些,于是,儿童们便易于被整体的形状所迷惑而忘记其各部分之间内外的相同和相异关系。换言之,这个集合仍然是某种高于单纯的聚集或"凑合"的东西。单纯的聚集或"凑合"属于第Ⅱ阶段,而在这个阶段中,物体仅仅是由于其相似性而凑到一起的,这样,儿童发现有多少相似性,就会有多少种聚集。它是一种"图形"的集合,因为整体的形状决定了每一个成分和放置。因此,部分与整体的关系是首要的,而相似和相异的关系则是第二位的,这就是我们发现复杂对象比之集合对象更占优势的原因。

在第Ⅴ种反应类型中,集合呈现出几何图形。然而,由于对称的要求,各成分之间的某些内在的关系保存了下来。

阿拉(3岁11个月) 将两个黄色半圆分别放在一个蓝色正方形的下面和上面,并把两个蓝色半圆分别放在一个黄色正方形的下面和上面。

杰克思(4岁) 把一个黄色十字形放在图形的中间,十字形的四个端点分别放上三个矩形(两蓝一黄)和一个蓝色正方形。


图 6

弗拉(4 岁) 把四个蓝色和绿色的长方形摆成一个四方的围栏,在它的下面又用五个各种颜色的正方形摆了第二个围栏。

柯尔(5 岁) 把两个蓝色长方形并列排在一起,并将一个蓝色圆形和一个蓝色正方形分别放在它们的右边和左边(见图6)。

这样的反应是大量的,这将使人们认为:受试者已经忘记了最初的分类目的,并将指导语"把相同的放在一起"解释成仅仅是要求他摆出个什么东西来。然而,这样的解释是不够的。首先,它几乎不能说明各种各样的过渡性的反应,而这些过渡性的反应既不纯粹是队列也不完全是复杂对象;其次,我们经常发现有一些联结队列和非图形集合的复杂对象的中介反应。

在第Ⅵ种反应(即具有描述意义的复杂对象)中,出现了同样的问题:在这些反应和前述那些反应之间划分一条严格的界限是困难的。其部分原因是那种在我们看来不能算是图案的东西很可能被儿童赋予了描述的意义,部分原因是儿童往往从一种集合图形开始,然后又在该图形上增加一些东西以使它具有某种场景的或描述的意义。

弗拉(4 岁) 突然在我们上一节中所描述的那些长方形和正方形的下面增加了三个圆形,并且说"它是埃菲尔铁塔"(还有本节Ⅲ中佩特的"无轨电车"的例子)。

在第 4 节中还要提供一些其他的例子。至于它们同分类的关系,我们这里再次表明,随着儿童逐渐成熟,这些描述性的复杂对象也逐渐变成非图形的集合,这同上面所讨论的几何图形的复杂对象是一样的。这些中介的反应暗示了一种真正的起源,即包括复杂对象在内的图形的集合乃是分类行为之真正的先驱者。这些集合呈现出一种聚合性的特征(或者是一种形式,或者是一种典型的图像),因为处于第Ⅰ阶段的儿童还无法在一个集合和一个对象之间做出区分,他们缺乏形成包含关系所必需的运算(见下面)。只要一个成分在其所属的那个集合中的关系还是处于逻辑的水平之下,即还是处于一种空间的或分隔的关系,那么这个集合本身就是一个对象。只有当部分与整体的关系成为逻辑包含或类成员的关系时,它才不是如此。

3. 图形集合和分类之间的连接:利用几何图形的进一步的说明性材料

仅仅描述这六种图形的集合是不够的,我们还得检查一下这种反应的方式和真正分类之间的联结以确定其联系。

(1) 上面说到的这些事实似乎表明,这些图形集合的"内涵"并不像逻辑分类的情况那样被相似和相异的关系概括无遗,这种内涵包括附属的关系。在描述将两个圆形

对称地放在一个长方形任何一边情况下两者之间的关系，或当儿童在将一个三角形和一个正方形放在一起以形成一个有屋顶的房子并描述该三角形和正方形关系时，人们就是这么做的。我们想提出下列几个假设：(a)年幼儿童根本就不能区别相似的关系和从属的关系，其原因在于感知运动同化的可塑性特征。有时候，一个对象仅仅被相似性（目前的对象和导致过去相同行为的其他一些对象之间的相似性）这一个行为格式所同化；有时候，对象根据功用的从属性而被同化；有时候，则被两者的混合所同化。(b)只要儿童不是在构造对象的集合，就能够区分相似性和从属性，但当他们在构造对象的集合时，就不能区分。让我们来看一看这种现象是怎么可能发生的：一个逻辑类别的内涵完全决定了它的外延，但在图形集合的情况下，外延有时决定于内涵（只要受试者持续集合“相同的”成分），而有时内涵则由外延所决定（当这个集合获得了一个影响选择的图形时）。由于儿童不能说出其中哪一个图形居于支配的地位，所以，在构造这些集合时，他就不能区别相似和附属。(c)所有的儿童都能区别各个水平上的相似和附属关系。如果说年幼儿童倾向于从第一个标准转换为第二个标准，那是因为他们并不理解指导语，或者是因为他们在认定复杂对象有趣时对于分类不感兴趣了。（如果最后一个假设是正确的话，那么，图形的集合将不能代表一个真正的分类阶段，而是在第Ⅰ阶段的一种偏离。）

(2)最后一个假设使我们回到了主要的问题上来，对于这个主要问题来讲，它仍然需要另外一些资料。图形集合是不是形成分类过程中的一个必不可少的阶段？或者说，我们是否从一开始就发现有一种图形集合和非图形集合的混合？如果是这样的，那么人们就可以争辩说，分类行为的起源应完全归之于非图形集合。那些将集合对象和复杂对象与分类连接起来的一系列过渡反应的出现，将不具有决定性的重要意义，因为它可以归之于图形集合和非图形集合的逐渐结合。

为了解决这个问题，我们进行了一系列的实验，在这些实验中所使用的几何图形属于两大类（曲线的和直线的），而每一大类又由一些较小的子类或子集（正方形、三角形、半圆形、圆形等）组成。我们利用一些非常简单的言语指导，如“把同样的放在一起”，甚至通过给儿童提供示范让他模仿（实践者先作分类，受试者继续进行下去等）来尽可能地往前追溯（一直达到一岁十一个月）。

在下列这些例子中，标有（Ⅰ）的那些反应是自发的，所谓“自发”是指：指导是一般的，因而也是易于受试者根据自己的方式来加以解释的；那些标有（Ⅱ）的反应，或者是模仿实践者的样式（甚至对模仿的行动要求有一定程度的理解），或者是受明确的言语指导所暗示的。

蒙（1岁11个月） 开始时，实验者将所有的实验器材逐一放到她手中，以使她熟悉这些材料。

Ⅰ 1. 她拿起两个环形，然后便开始集合圆形，并加上一个大正方形，接着是一个大环形，一个小环形，最后是一个小正方形。

Ⅰ 2. 她用四个逐渐缩小的圆形摆成一个塔。

Ⅰ 1. 她开始摆另一个由两个小环形和一个圆形组成的集合，但摆到一半时，便停下来玩这些东西。

Ⅰ 3. 她把半圆形放在一起。

Ⅰ 4. 她把一个三角形放到一个正方形上面，这可能是一座房子。

Ⅱ 1. "把这个(圆形)放到与它相配的东西那儿"。她只是胡乱地把东西堆在一起。

Ⅱ 2. "我们该把什么东西放在这些盒子里?"她拼成一个胡乱的分类，包括一个半圆形，一个圆形，一个环形和一个小正方形，这些都是她杂乱无章地拣出来的。

Ⅱ 3. 实验者摆出了一个队列以便让她模仿，她没有完成。

迪斯(2岁2个月) Ⅱ 1. "给我一个像这样(一个环形)的东西"，他拿出这个同样的环形。"给我一个像那样(一个圆形)的东西"，他拿出一些圆形和半圆形，然后又拿出一些三角形。他拿出一个小正方形，但又把它放回去，一边还说："不是那个!"

Ⅱ 2. "给我一些像那样的东西(一个他刚才丢掉的小正方形)"，他拿出三个小正方形，经过一番踌躇之后，又拿出两个圆形。

Ⅰ 1. 他拿出一个大正方形后又把它放下，一边说："那里!"随之，他拿出两个中等大小的正方形，并试图把它们竖着放。然后，又拿出一个大正方形。这样，他就摆出了一个队列或一个集合对象。"继续搞下去"，"没有了"(实际上还有几个留在那里)。

Ⅱ 3. 当受试者拿出一个三角形之后，实验者说："给我一个像它的东西。"他拿出一个半圆，然后拿出一个三角形。"还有吗?"尽管还有几个在那里，但他却没有发现。

Ⅱ 4. "给我另一个像这样的(一个圆形)"，他给实验者三个圆形，然后说，"啊，没有了"(他说得不对)。

Ⅱ 5. "给我另一个像这样的(一个正方形)"，他在手上堆了六个正方形，后来掉了下来。"把它们放到这个盒子里去"，他把两个正方形放成一排，然后将一个三角形放在另一个正方形的后面。

米克(2岁4个月) Ⅱ 1. 他拣起一个正方形，"把相同的放到一起"，他把两个大正方形，两个小的和一个中等的堆在一起。

Ⅱ 2. 实验者把这些材料混合在一起，并重复与原先同样的指导语。米克拣起两个大正方形，两个中等的正方形，一个小正方形，然后拣起一个小圆形，随着拣起第八个(也是最后一个)正方形和一个大圆形。

Ⅱ 3. 给他三个盒子并对他说："只把相同的放在这里。然后把其他的放在那里。"他将一个大圆形放到盒子的中央，在它的四周放上了几乎所有的正方形，并且

大叫:“围起来了!”

Ⅱ 4. 实验者把两个环形放在一起,然后把一个半圆形放在一个圆形的上面。米克拿起一个环形,把它套在手指上,然后又把它拿下来并将所有的环形排在一起,而在中间放了一个小圆形。

Ⅱ 5.“给我一个像那样的东西(一个圆形)”。他交出几个圆形,一边说“一样的”。

Ⅱ 6. 同上(一个正方形),他拿出其他的正方形。

Ⅱ 7. 同上(一个三角形),他没有完成。

Ⅱ 2. 然后他自动地将三个小正方形,一个大正方形,一个中等的正方形连续地放成一排,并且说:“那真好看!”

Ⅱ 8.“给我一个像这样的(一个三角形)”。他拿出一个小的和一个大的正方形。

帕思(2岁9个月) “你把那些相同的都放到一起。”他先把两个小正方形摆成一行,然后是两个大正方形,随着是一个正方形和一个三角形(边靠边),最后在这一排的右角上放两个正方形。接着他把圆形摆成一排,将一个小正方形放在两个大正方形的中间,并在两个大正方形上分别盖上一个圆形。随后他将所有的圆形都堆在其中的一个大正方形上,将几个小正方形放在中等正方形的上面,将三角形和小正方形混杂地放在第二个大正方形上。最后他将他摆成的这些弄乱,并把所有的东西都堆在这两个大正方形上。

在此之后,他开始搞另一个集合对象:在两个中等正方形之后随着放两个大正方形,都是边对边地放;接着他将许多小正方形都放在两个大正方形中的一个的角上;最后他将圆形堆成一堆。

马尔(2岁11个月) 指导语完全相同。他开始堆一堆圆形,然后将许多正方形放成一排,并继续放一些半圆形和圆形,这成分混杂的一排乃是“一列火车,呜!呜!”

朱尤(3岁) 在看到示范之后,成功地将红色的和黑色的成分分别放进两个盒子(出过两次差错,他都纠正了),他还将蓝色的和黄色的成分加以分类(其中有两个没有加以纠正的错误)。当给他示范将所有的方形放进一个盒子而将所有的三角形和菱形放进另一个盒子时,朱尤的模仿只出现过一次错误。

尤比(2岁9个月和3岁2个月) 在2岁9个月时,在向他提出“将那些相同的给我”这一要求并给他看一个圆形之后,他拿起三个其他的圆形,然后拿起一些半圆形。但是,在要求他“将那些相同的放在一起”时,开始他并不知道做些什么。当把一个菱形放到桌子上时,他加上了所有的菱形和三角形,然后他将三角形一前一后地竖了起来。

在3岁2个月时,用同样的指导语,一开始他将半圆形和圆形集中到一只手

上。"你可以把它们放在桌子上,将相同的拿出来"。他将半圆形和三角形一起拿了出来,然后将方形分开堆成一堆。实验重复进行,这一次他最后摆成三堆,一堆是三角形,一堆圆形,最后一堆是半圆形。

再一次重复实验仍然导致了类似的集合。不过,这次出现了两种创新:第一种是,一系列的正方形是根据逐渐缩小的趋势来放置的(两个大的,两个中等的,四个小的),第二种是,一个包含几乎所有这些成分的队列的形状是一个转了九十度的"L"形。除了少数几个错误外,一个类别中的所有单项都是并列地摆成一直线的。

波(3岁4个月) 自动地将所有大的成分放在同一个盒子中(菱形、三角形和正方形),但继而又任意地放进了一些成分。"是不是该把大的东西放在这儿,小的东西放到那儿?——(他不理解)——这样做(把三个大的放进一个盒子,三个小的放进另一个盒子)"。他正确地接下去做了,但没有预见的能力。每一次他都得看一看盒子里面的东西以确定他放的盒子是否正确,而且在他发现错误之前,有时会把东西放错地方。

克里(3岁5个月) 开始时用六至八个成分摆了一个复杂对象。给她两个盒子并要求她把"相同的"成分放在一起。实验者指着两个盒子并强调说"将相同的放到一起"。她摆出两个混杂的集合,不过这两个集合并不完全是任意的,因为其中的一个大部分是正方形而另一个则主要是曲线图形。

我们之所以决定提出如此大量的例子,为的是使我们能够根据事实的判断来做出解释。

我们首先考虑在本节开始时提到的第二个问题,即图形集合是分类的一个不可缺少的阶段,还是儿童从一开始就能够构造非图形集合。我们的年幼受试者的反应暗示出,这显然是一个难以回答的问题。他们的倾向是,开始时只是专注于集合和堆积物体的动作,只是到后来他们才对集合本身发生兴趣。事实上,我们所观察到的乃是两种相当不同的反应类型:一种类型是选择成分,这意味着把它们同化到一个功能的格式中去;第二种类型是构造这个集合。例如,当要求米克"把相同的放到一起"时,在一种场合下,他将八个正方形和两个圆形集合在他的手中(Ⅱ2):在这里,整个的行动可以从相继的选择中加以总结。但是,当他将正方形堆成一堆或摆成一个封闭的图形时,他就是在摆一个集合对象(Ⅱ1)或一个复杂对象(Ⅱ3)。蒙的方法与此非常相同,他只是将半圆形集合在一起,集合起来以后什么也没有做(Ⅰ3),但是,他却能够将圆形堆成一堆(Ⅰ2),或者将三角形放在另一个东西的上面(Ⅰ4)。在迪斯那里,我们看到了类似的情况——在一个场合下,他摆成一条线(Ⅱ5),而在另一个场合下,他又摆出一些集合对象。

它们究竟是明显的图形集合还是显而易见的非图形集合,看来这要决定于在某一时刻占优势的态度是什么。如果儿童在选择对象并把它们放在一起时他的唯一目的是找出"相同的东西"或配成一个新的集合,那他所进行的就不是图形集合。由此,人们会

做出如下(或者正确或者错误的)推测:他能够做非图形的集合。然而,一旦儿童对这个集合本身表现出兴趣,那么这个集合就成为图形的了。

下面的解释似乎最有道理:

(1) 我们所得到的早年(1 岁 11 个月到 2 岁 11 个月)阶段的这些反应,体现了感知-运动同化(这在时间方面基本上是连续的)和(在空间方面)同时存在的一些集合现象之间的折中,因为儿童们不能在进行动作时预见他们想要达到的结果(参见波在 3 岁 4 个月时试图模仿的那种分类)。

(2) 尽管连续同化的因素占优势,但受试者的头脑里并没有图案,而且他所做的只是一个接一个地将看上去类似于他最后拿起来的那个物体堆在一起。在观察者看来,这些堆积好像是非图形集合,但这种表面现象是容易使人误解的。因为儿童所注意的中心是连续的同化,在他当时的思维中,根本就不存在某种有意构造的集合。

(3) 然而,一旦受试者对集合本身发生了兴趣,他就给这集合以形态。只是在此之后我们才观察到各种主要的图形集合类型:队列(平展的或直立地堆在一起的),集合对象和复杂对象。

(4) 于是,在某种意义上说,儿童从开始时就能构造非图形的集合。但这些集合的特点是未经事先考虑的,而且不能用于分类的目的。然而,即使是现在,儿童与非图形集合也相去不远,因为他们能够在实验者示范后模仿这些分割,尽管他们并不是自发地这么做的。

(5) 这样,在分类行为发生的前提或起源方面,我们便会得出这样的结论,即图形的集合乃是这个早期阶段的基本特征,尽管我们同时也清楚地认识到原始形式的非图形集合在开始时是与这些图形集合共存的,没有这种图形的结构,儿童便不能构想“外延”。这种原始的、历时的、非图形的集合仅仅反映后来那些分类的“内涵”。所以我们应该说,在第 I 阶段,儿童并不能区分严格的逻辑结构和严格的亚逻辑结构。① 由于缺乏这种区分。他们的集合便往往不纯粹是图形的或非图形的,而经常表现出两者的混合。我们所说的第 2 阶段,其特征便是一种早期的区分。只是到了后来,儿童才开始寻找一些不求助于图形集合的协调外延和内涵的非本质特性的方法。

(6) 当儿童通过连续的同化来集合东西时,往往表现出某种程度的基于同等的概括——即使是感知-运动的同化也是如此,它通常在 3 岁之前。在进行集合时,儿童的确是从圆形到圆形的,但他们也能从三角形到半圆形或正方形。这种同等究竟达到什么程度则依赖于儿童头脑里的想象以及实验者的指导。同一个儿童,在某一场合仅仅用圆形堆成一堆(蒙,I2),而在另一场合(当要求她将一个成分放到“与它相配的东西那

---

① 亚逻辑运算乃是那些有关空间连续统一体的部分的运算,而逻辑运算则与各别成分之间的关系有关。这两套运算是同态的:细分相应于分类,而空间的排列则相应于序列。见《儿童的空间概念》,1956,第十五章。

儿"时)却把东西胡乱地堆在一起。在这里,"相配的"关系被同化为集合的动作本身,以致实际的附属关系便成了与严格的相似性完全一样的东西。

(7) 然而,虽然当受试者在进行一系列的连续同化时有时会出现相似性和单纯的附属性的混淆,但还是能够在一定程度上对这两者加以区分。当他开始考虑这个集合本身时,便不能作这样的区分,而且他的集合便趋向图形的集合。因为在这个时候,该集合的空间外延决定了他的部分的附属性。当米克在一个圆形的四周放上正方形时,我们得把这种关系解释为"附属";当他将一个小圆形放在一堆环形的中间时,我们便会想起它们的相似性。但是,究竟他本人是否能够在这两者之间做出区分,那是值得怀疑的。在这两种情况中,他所建立的这些关系是由于他的复杂对象或集合对象的形状(外延),并不仅仅是由于成分(内涵)本身的相似而得到加强。

4. 将小玩具加以分组过程中的"相似"和"附属"

前面的那些事实仍然留下了两个没有做出回答的问题:(a)是不是这些材料的几何图形的特征导致了儿童作图形的集合而不是对它们加以分类;(b)指导语的性质在决定儿童作图形集合或考虑"附属性"方面发挥了多大程度的影响?为了回答这些问题,我们变换了研究的方法,改用描述性的材料来代替几何图形。

要注意的第一点是,虽然利用几何图形的确容易造成集合对象或复杂对象,但使用描述性的玩具同样也导致了儿童构造复杂对象。现在的主要差别是,后者是倾向于描述性的,而不是图案性的。[①] 我们发现,儿童们把一个洋娃娃和一个玩具床分成一组,而不是把洋娃娃和人或把玩具床和家具归为一类。这同比奈(Binet)所发现的定义是完全相同的:年幼儿童往往做出如下的答复——"母亲是做饭的"(或"母亲是爱我的"等),而不是根据她的种类和特定的差异来对这个名词作如下定义:"母亲乃是一个有孩子的女士。"要害之点是:在这两种情况中,儿童都是在使用一些前概念,而不是真正的概念。在这种水平下,抽象仍然是不可逆的、非运算的,这意味着他们不能理解类包含的关系。对于他们来说,如果单个的东西是某种更为概括东西的一个成员,那么其关系一定是一种在空间上再划分的关系。这样,他们便看不到这种决定一个类别之内涵的相似性和相异性如何导致了一套构成其外延的包含。

在这里,我们再次看到相似性和"附属性"之间的差别。尽管一个玩具床并不相似于一个洋娃娃,但玩具床还是"附属于"洋娃娃;同样,做饭"附属于"母亲,尽管做饭几乎不能算是所有母亲的基本特征。确实,多数母亲做饭,而且我们也可以把这些"附属性"

---

① 事实上,开始时我们的研究使用了描述性的材料,后来由于这些复杂对象才转而利用图案的形状的。

看作是相似性。但是,这种相似性乃是偶然的而不是本质的,因为不是所有的母亲都做饭,而且也不是所有的婴儿都有床。现在,儿童的确把“有些”和“大多数”同“所有的”混淆了起来。他们之所以如此,恰恰是因为不能协调内涵的特征同外延的特征。但是事情还不仅限于此,儿童不是把婴儿和“使用床的造物”归为一类,而是将婴儿同床本身归成一个类别。换言之,他是在将非本质的特性同需要加以界说的那个物体归并在一起。它很好地说明了部分和整体的关系是如何倾向于取代逻辑的类包含关系的。这使我们再次想起,当儿童用几何图形构造复杂对象时也有同样的情况。

这种类似的现象是有启发性的,它可以使我们更清楚地看到对于这些材料的这种反应和对于几何图形的那些反应以及年幼的受试者的类似行为之间的差别。明确地指出这些类似和差异,将更清楚地显示出我们目前所要解决的关于分类之起源这个决定性的问题——如何协调内涵的特性和外延的特性。

带着这个目的,我们试验了各种各样的方法,也使用了几种不同类型的指导语。详细地描绘每一种实验是冗长而乏味的,我们只限于描述两个对于所有实验来讲具有代表性的实验。第一种实验(Ⅰ)是,给儿童呈现一套玩具物体,这些物体可以根据相似性来加以分类,但也可以按照一个故事的内容来加以排列,还可以根据经验甚至地形来摆成一个小村庄。这些玩具包括七个人、八座房子、九个动物、四棵枞树、七段篱笆、几条长凳、几个喷泉、几辆汽车、两个婴儿以及两个摇篮等。指导语有三类:(a)把这些东西整理好,然后(第二次),把东西整理得更好些;(b)把相配的东西放在一起;(c)把相同的东西放到一起。第二种实验(Ⅱ)是,实验者强调相似性,要求儿童把(a)“相似的”东西或(b)“多少有些相似的”东西放到个别的纸张上,然后,可以把它们集中起来以分析形成这些集合的方式。

Ⅰ.第一种实验用于两至九或十岁的儿童。实验的结果证实了一个有规律的发展,该发展远远超出了目前正在讨论的阶段(阶段Ⅰ),但其重要性足以使我们对它作一些讨论。这个发展是双重的。一方面有一种在亚逻辑结构(那些由形成一个空间连续统一体的部分与整体关系的结构)和逻辑结构(那些加入集合和类别结构的关系的结构)之间的逐渐分化;另一方面,尽管这些行为类型在不断地分化,但是又存在着一种在每一个阶段都不断重复出现的行为类型的互补性。如果不对这个双重过程——这是在每一阶段都能观察到的行为类型,即由不断的互补而加以平衡的不断的分化——作一个适当的评价,就可能造成重大的误解。通常的看法是,逻辑结构起源于概念和陈述之间的关系,而两者都被设想为其本质基本上是言语的。根据这种看待事情的方式,既然一个依赖语言,另一个则依赖于几何图形的直观,那么,在分类和空间的构造之间就不存在联系。然而,如果逻辑运算的起源可以追溯到前语言的行为,那么这些变化的过程就具有一个广泛得多的意义。在类逻辑和关系逻辑中发现的那些等级结构决定于(与部分和部分关系相对的)部分和整体之间关系的排斥作用。人们没有理由假定由它们所引起的各种各样安排将受到不连续的内容的限制。作为类和关系之附加或倍增的这些安

排，可以同涉及有连续内容的那些安排来比较。导致这些安排之各种转换的运算(除了它们进行空间的部分和整体或空间——时间的部分和整体运算之外)是完全相同的。这些运算在其他地方①被称为亚逻辑的，这倒不是因为它们比逻辑的运算简单些，而是由于根据罗素(Russell)的类型理论，它们适用于一种比单个的对象低的类型，它是一种O类型。逻辑学家对于亚逻辑结构和逻辑结构之间的区别是不感兴趣的，因为属于亚逻辑的那些东西经常在逻辑语言和逻辑符号中得到描绘。这并没有什么可奇怪的，因为连续性因素并不影响逻辑安排和亚逻辑安排的结构同型性。但是，心理学家将寻求两种不同的结构，它们中的每一种都显示了不断的分化和互补，都在相同的阶段中发展。目前的材料表明，只是到了第Ⅲ阶段(7—8岁)，儿童才能做等级包含的分类。这个阶段的儿童也能够严格按照一个预定的计划(一个村庄的地形)构造一个空间的模型。在第Ⅱ阶段(平均五至七八岁)，虽然在这两种结构之间已经有了清楚的区分，但由于预定格式的不适当，所以常常存在着某种程度的干扰。在这个阶段，虽然分类的集合不再是图形的集合，但并不存在等级的包含。同样，地形的结构也是基于空间的协调，这与逻辑的相似性是不同的。② 但这些模型的结构是不完全的：我们发现了该模型的一些片断，或次一级的安排，并列的片断，而不是一个和谐整体的构成部分。这与非图形集合的并列有着非常明显的类似之处。但在第Ⅰ阶段(这是我们目前所关心的)，儿童们在逻辑和亚逻辑之间只显示出极小的区别。虽然"把凡是相像的都放在一起"这个指导语多少提示了相似的关系，但它并没有排除空间的附属性，而"把凡是相配的放到一起"这个指导语则既增强了后者又没有排除前者。下面是一些说明第Ⅰ阶段之反应的例子：

维夫(2岁6个月)　开始时并不理解"把它们整理好"这一指导语，只是将这些东西竖起来并来回地移动以自娱。在听到"把凡是相配的东西放到一起"这个指导语之后，通过连续的同化，她拿起一个女人，又找出第二个，然后再拿起一个男人，接着便抓起一些其他的男人。"这个怎么样?"她拿起那个指给她看的屋子，又拿起另外三个屋子。最后放下一棵枞树(躺着放下)，将又一棵枞树放在它上面，然后在它们上面又放上一座屋子。

艾克赛(3岁)　在同样的指导下，将这些东西作成对的安排；两对屋子，他又往这两对屋子加上两只兔子，然后是两个女人。他对他的分类产生了浓厚兴趣并高兴地大声说："一个样的！同样的女人！有三匹马！"他将两只老鼠放在一起，两个男人放在一起，将一个婴儿放进摇篮，然后便开始将一些屋子、马和枞树摆成几排，接着是一系列的猫、女人和男人。最后，他将这几排并成一排，这意指一种从连续的同化向着同时存在的图形的过渡。

---

① 《儿童的空间概念》，第十五章。

② 当儿童在构造一个村庄时，他不再把所有的桥放在一起，这仅仅因为它们都是桥。

乔斯(3岁10个月) 在“将凡是相像的放到一起”的指导下,开始时将两个放在摇篮里的洋娃娃、两辆小推车、一匹马(最后将它放进其中一辆小推车)和一些动物连续地摆成一排。“哪个像它(一只猫)?”——(她出示一些猫、兔子和火鸡)——“给我一些像这个(一匹马)的东西。”——(她拿出所有的动物,然后又拿出一个洋娃娃和两棵枞树)最后,她将两座屋子放在一起,再加上一只鸡,等等。

尼克(4岁) 根据相似性构造了一些队列:一些蓝色的屋子和一辆蓝色的汽车,“因为它是蓝的”;将一些枞树放成一排,“它是同样的颜色”;然后是一些男人:“他们不是同样的颜色。但他们都是男人。”然后(在“将凡是相像的放在一起”这同一指导语的指导下),他放上一段篱笆以填补一块空地方,“因为它同这块地方差不多大”。基于相似性的一些队列与基于大小的一些队列相配以形成一个集合,它与其说是一个村庄模型还不如说是一个复杂对象。

叶维(4岁8个月) 在“将凡是相像的都放在一起”的指导下,摆出了几个小集合,其中有些集合的基础是相似性(如两段篱笆),而另一些是根据经验的附属性:一个女人的旁边放上一棵枞树,一座屋子前放上一条长凳,一座教堂和一棵小树与一辆汽车放在一起。尽管这些集合的并列不完全是随意乱放的,但并未表现出明确的计划。

布尔(4岁8个月) 摆出一个由一些较短的队列和一些小集合等不同成分所组成的空间的集合:两只火鸡,四匹马,两只小鸡,两只兔子和一只狗等等。然后给他五张纸以帮助他对那些“相像的”成分加以分类。他将两匹马放在一起,然后将一些小车放在一起,等等。但是他继而将一些兔子与一些童车放在一起,“因为它们睡在童车里”。将女人与兔子放在一起,“因为她们看这些兔子”。将一些猫与一些马和一些鸭子放在一起,“因为它们是相似的”等等。

“将凡是相配的放到一起”这一指导语导致了下列反应:

柯尔(4岁2个月) 将一些马及距其不远的一座教堂摆成一排。他继而安排剩下的东西,一面发表评论说:“这儿是一个女人,她正领着所有这些牛、羊、马以及小鸡。”他将一些羊放在一些坐在喷泉边的人的周围,“在他们附近还有一位绅士,他不让羊走开”。最后他说:“长凳在中央,树围在四周,这同我外婆家完全一样。”

鲍杰(4岁6个月) 按着大小将一些屋子、男人和枞树等摆成一个队列(一个由四个成分组成的序列):“这儿是动物、人、屋子、树,现在来一条长凳,这是一件东西(一段篱笆)。”

艾布(4岁6个月) 作了相似的安排,但其基础是颜色。

在处理几何图形时表现出来的各种各样的行为在这里都可以看到,唯一的不同之处是复杂对象呈现了经验的特征。

(1)“将凡是相像的放到一起”这个指导语加强了根据相似性来集合东西的倾向,而“将凡是相配的放到一起”则倾向于导致基于“附属性”的集合。但这种联系远不是普

遍的。第一个指导语也引起了情境附属的联想(在叶维的例子中,在一个女人的旁边放上一棵枞树;布尔例子中的兔子;乔斯例子中的将马放进小推车等等)。第二个指导语也能造成基于相似性的集合(鲍杰和艾布)。

(2) 甚至在非常年幼儿童的反应中,也出现有纯粹基于相似性的一些集合,其根本的机制乃是连续的同化(维夫)。引起艾克赛"一个样的"这一意味深长的反应的原因也正在于此。

(3) 但是,如我们在第 3 节中所看到的,当受试者的注意从连续的同化转向作为结果而发生的整体时,基于相似性的集合仍然可以有一个特殊的空间形式。这就说明了维夫最后用两棵枞树和一座屋子竖直地堆在一起而艾克赛将他的一些队列摆成一排的原因。

(4) 重复了用几何图形做实验时出现的部分的和连续的队列,而集合的对象同样是不稳定的。

(5) 复杂对象是不同的,它们利用了描绘的意义。复杂对象的普遍存在,证明儿童很容易从一个相似的格式不知不觉地滑向附属的格式(参见从乔斯到布尔的所有例子),因为他们不能区分"相像"的一般含义。

(6) 最后,在逻辑结构(那些属于真正的类别之先兆的图形集合)和亚逻辑结构(用这类属于地形方面的材料作的集合)之间没有清晰的分化。不管用什么指导语,几乎每一个受试者都在这两者之间变化。

Ⅱ.为了检验这些结果并对它们做出解释,我们改变了研究方法,以使之更精确些。我们也要求受试者将他们的集合分隔开来(或者放进盒子里,或者摆在纸张上),这是我们在这一节开始时提到的第Ⅱ种方法。但是,在描述我们得到的结果之前,我们想描绘一下在预先进行的试验性的研究中所发现的东西。

这是一个测验,它利用了十六件物体:四个动物,四个人(一个黑人婴儿,一个男人,一个白人女孩和一个牧童),四件厨房用具以及四件家具。要求受试者将这些东西按类别放进一些打开的盒子里,用的指导语是"将凡是最相配的放到一起"。结果是:(a)当告诉年幼儿童利用这些盒子时,他们在构造了一系列的队列之后,摆了一些由各种不同成分组成的集合。其原理一般是清楚的,而且没有说明任何新东西。(b)我们发现,大约 4—5 岁的儿童能利用盒子来区分一些分隔开来的集合。在开始进行这些集合时,他们仍然明显地表现出在相似性和附属性之间缺乏分化,不过,也存在着一种向着非图形集合的逐渐地发展。在第二章中,我们将回到这第二点上来。但是,为了说明在相似性和附属性之间的混淆,下面我们举出一些基本的例子:

皮依(5 岁) (A)盒:(婴儿+椅子+椅子)——为什么?——(他将婴儿放到其中的一把椅子上,又加上一个男人并且说)"这个男人同婴儿坐在一起。"(他加上一只猪)"这婴儿在同猪玩。"(然后加上一只罐)"它是给猪吃饭用的。"(加上另一个男人)"这是男人在喂这只猪。"

(B)盒：(男人+猴子)“这男人在看着猴子”；(一只鸟)“这鸟和这猴子在玩”；后来：“这鸟在喝这罐里的水”；“这男人坐在椅子上”；(一条鱼)“然后他捉鱼”；(猴子+壶)“这猴子想在罐的边上站稳”；等等。在这里，我们只看到经验的附属性(但那两把椅子是例外，我们可以把它看作是相似性)，而且，附属性甚至也变得越来越武断。

吉尔(5岁6个月)　在相似性和附属性之间表现出相当的平衡。(A)三个男人，一只猴子和一头猪：“这绅士在照料这头猪。”(B)两个婴儿和一把“让婴儿坐在上面的”椅子，三只罐是“用于烧水和装牛奶”的。(C)两个男人和一只猴子。(D)两把椅子，一个婴儿和一条鱼。

切利(5岁5个月)　处于这个发展系列最发展的一端，皮依处于另一个端点，而吉尔则介于他们两者之间。切利先将一只罐和两只平锅放进(A)：“它们是要洗的。”然后她将一些椅子安排得像围着桌子似的放进(B)：“它们相配，因为它们都是在餐室里的。”她在(A)里加上第四个容器，一边说：“所有这些都是厨房里的。”在(C)里，放了一个男人和一头猪，“他想散步，他有一个猪场”，她加上一只猴子和一只鸟：“它们也在那里面。”

这几个例子足以解决相似性和附属性的问题了。

(1) 许多组合纯粹是相似的关系：两把椅子(皮依)，三个男人和一只猴子，两把壶和两把椅子(吉尔)，等等。

(2) 许多是纯附属性的例子(以经验的意义来构成的复杂对象)：一个婴儿在椅子上，一头吃罐里东西的猪，一个照料猪的男人，一只想在罐的边上站稳的猴子，等等。

(3) 有些是处于中间状态。并暗示了一种转变或折中。将坐着的男人同婴儿联系起来(皮依)是受相似性支配还是受附属性的支配呢？一个看着猴子的男人这个例子又是受什么支配的？答案似乎是：它们受两者的支配。

(4) 最后，在切利的例子中有着一种真正的综合。围着桌子的那些椅子和厨房用具既是根据它们空间的描述性所做的安排，又是将内涵界说为共同特性的前分类成分的复杂对象：“都是在餐室里的”或“都是厨房里的”。在他们确证这个集合的内涵(基础是相似性，但恰好与附属的关系重合)和它的外延(用“所有的”这个词表达出来)相符合时，这些阐述就更值得注意。如果用比奈—西蒙的定义来解释它们的话，在这里我们看到既有用途的定义(厨房或餐室里的)，又有种的定义(“所有的”)，仍然缺乏的是类包含关系，而这乃是一个以种和种差来加以界说的适当的定义所必需的。

当儿童构造其集合的基础是附属性(以及他们根据用途来界说词汇)时，“附属的”关系以及由这些关系所造成的复杂对象并不是纯粹的分类之意外的偏离。出于同样的原因，他们不能做出真正的分类。这些原因是：(a)不能区分亚逻辑结构和逻辑结构。(b)不能协调内涵和外延。(a)往往蕴涵(b)，虽然在(a)被克服时(b)将继续存留。当然，切利的成功是个例外，不过它之所以使人更加感兴趣，是因为它显示了内在于这些

基本反应之中的一些可能性——在非图形集合水平之前，这些可能性通常是不被人们所认识的。

第Ⅱ种研究方法也涉及对一个村庄所能想起的一些材料，但现在我们分成三个阶段进行：(a)预先对物体随意摸弄①；然后是，(b)在分离的纸张上面对"同样的"成分进行分类；最后是，(c)(通过减少纸的张数)迫使受试者联合一些小的集合。这个实验证实了上一段提出的那些结论。从布列在一些纸张上面的分类(b)进而到比较概括的集合(c)的好处是，用语(b)能够通过将"同样的"成分配在一起放在纸上而表明儿童识别这些成分的程度，而用语(c)的作用是能够使儿童或者构造一些非图形集合，即进展到第Ⅱ阶段，或者(如果他还是处于第Ⅰ阶段)使他依据具体的情境将这些物体联合起来。逐渐地，我们可以看到他是从使用用语(b)时的相似关系逐渐转向附属关系的。

赛恩(4岁2个月) 开始以通常的方式摆了一些部分的或连续的队列。将纸张给他：(A)三棵树(其中一棵是枞树)。"它们相像吗？"——"是的，一样的。"(他加上一座屋子)——"所有这些都相像吗？——三棵树和一座屋子。——它们都是一样的？"——"是。"(B)"你准备放什么？"——"两个绅士和两个太太。"(但他继而加上两个婴儿，一个摇篮和一辆小推车)——"它们都是一样的？"——……——"我想要他们都是一样的。"——(他将小推车拿走，同一些树一起放到C纸上，然后他将一座屋子和几个太太、绅士放到它上面！)——"这座粉红的屋子同这些太太们一样吗？"——(他将粉红色的屋换成红的。)——"为什么你把那放到那里？"——"这屋子里有几个男人。——想办法使它们一样。"——(他将两座屋子放到一起，不过是放在C纸上，然后他拿起篱笆。)——"你要将它同什么放在一起？"——"树。"——"我想使它和与它一样的东西放在一起。"——(他拿起两段篱笆，继而把它们放回到树那里，然后他拿起一匹小马。)——"你要把它放到哪里？"——"单独放。"——"没有与它相像的东西了吗？"——(他将它与兔子放到一起)："因为它是单独的一个，它不喜欢单独在那里。"然后他将一朵花同女人和马放到一张纸上，"因为那看起来漂亮"。他继续这样摆下去。可以肯定，他后来只能把这些小集合合并在一起以形成一个情境性的复杂对象，因为甚至是最初的那些集合也只是相似性和附属性的混合。他不同意实验者将所有的植物(树和花)构成一个类："不，那不对，这样摆(他最初的那种摆法)好看。"

赫思(4岁9个月) 开始时他在每张纸上只放上一个物体，实验者提醒他，必须将"所有同样的东西"放到一张纸上。后来他将相似的物体配成对地放在一起，但这些配对也表现了一些附属的关系，如婴儿和喷泉在一起，篱笆和枞树在一起，推车和马在一起等。最后，当他把这些集合放到一起时，仍然使用了附属的关系(喷泉和枞树在一起；母亲，婴儿和篱笆在一起等)。他也拒绝诸如动物类(兔子和

---

① 阶段(a)仅适用于一组特殊的物体。

马)等比较概括的分类,因为兔子"吃草。——马呢?——它们不吃草!"

塔黑(5岁2个月) 先将实验材料给他看(不让他看纸张,给他看的材料中也没有两个完全一样的东西),一开始他将所有这些成分摆成一个队列,在"同样的东西"所组成的部分之间留了一小段间隔:一棵枞树和一棵树在一起,(间隔)一座大屋子和(犹豫了一番之后)一只兔子在一起,后来他将这只兔子移得稍微远些以便腾出空来放一座小屋子,(间隔)几个男人,(间隔)一段篱笆,上面放着一枝花的小推车(间隔),一只摇篮和一个婴儿,等等。当需要将这小集合合并到一起时,他只是加上一些动物以形成一个单一的队列,然后,是"一个小男孩,一位绅士和一个老爷爷",接着是"两位太太,一个老爷爷,一位乐师(等于警察),一个婴儿和一只摇篮",花朵和喷泉,等等。

(1) 当要求儿童把这些东西摆到分开放着的一些纸张上以对它们进行分类时,他们或者引进一些附属的关系以混杂于相似的关系(如赛恩),或者对"同样的"这个词采取一种刻板的态度(如赫恩,最后他只在每张纸上放一个成分)。

(2) 利用同样概括的指导语但不出示纸张时,我们便在那些常见的队列中又一次看到相似性和附属性的混淆(这是常有的现象,如同塔黑的例子中的情况),但塔黑的连续队列中的部分之间的间隔却是一个不平常的特征。

(3) 最后,当儿童必须得把这些集合联合起来以放到数目较少的一些纸张上时,附属性的闯入是明显的。此外,儿童拒绝接受仅仅基于相似性的比较一般的分类。

这一对照研究类似于第三节中所描绘的有关几何图形的研究,而且所得到的结果实际上也是相同的。不管用什么实验器材,只要是一个连续同化的过程,相似的关系就占优势——但即使如此,可能还存有一些情境性附属或描绘性附属的例子。另一方面,一旦受试者不再专注于联系的动作以考虑其结果,图形的和描绘的特征就会明显起来。唯一的差别是,我们现在所发现的不是复杂几何图形对象,而是复杂描绘对象。这是因为实验器材的性质,诸如婴儿加摇篮的功能附属性代替了感性的附属——例如三角形加正方形(尽管这样的附属有时也包含有描绘的意义:屋子和屋顶)。

5. 结论:图形的集合乃是综合内涵和外延的最初尝试

上列说明不过是我们为阐明图形集合所有特征而从事的研究工作的一个片断。不过,其中的一些主要特征现在是清楚了,而且这些主要特征将帮助我们弄清年幼儿童分类行为的进一步发展。

我们可能会回想起,逻辑的分类方法涉及一套相似和相异的关系,这些关系的共同作用便产生每一个类或子类内涵的定义(诸如"绿的"或"结实的"这些属性并不是绝对的,也不是毫无例外地都指向相似性的关系:"都绿"或"都结实")。另一方面,由这些关

系所规定的那些成分或个体都要受到"所有的","有些"(包括"一个")和"没有"这些表示外延数量词汇的限定。重要的是要注意,每一个类的内涵都极好地决定了它的外延。于是,内涵和外延往往是一致的,以致只要知道了其中的一个,另一个就可以测定出来。

但是,在图形集合这个水平上,要做到这一点却相当困难。

毫无疑问,儿童能够通过连续同化的过程来很好地发现相似和相异的关系。然而,在其他一些联系的形式取代相似关系的过程中,他们却不能避免偶然的失误,尤其常常被对于样式的考虑或材料的情境特性和描绘特性引向错误。更为重要的是这么一个事实——由于这些同化仅仅是连续的,所以他们就不能以数量来表示他们的结果。换言之,同化的连续性特征并不能妨碍它产生外延的关系,他们不能将"所有"具备一个共同特性(相似性)的成分统一起来以形成一个同时存在的整体(他们更不能注意到作为一个子类的"有些")。所以问题在于,在这个水平上决定外延的究竟是什么?

儿童们所做的只是使自己受他们能够察觉到的那些所指引,结果,他们便利用一个空间的结构,如队列、两维或三维的集合以及复杂对象。正是在这一点上,连续同化的本质上的不适当性便造成了这些可以界说图形集合的特征。受试者之所以不能协调内涵和外延,是因为连续的同化不能运用诸如"所有的"和"有些"等量词,于是我们就发现他们在外延和内涵之间的动摇。因为他不能协调,所以在内涵和外延之间就没有(真正的逻辑分类中所具有的)完全一致。此外,由于内涵和外延没有分化,所以这种动摇是无意识的。在最初的联想过程中,这种分化的缺乏程度并不严重,但由于需要对整体加以观察,以致大大地增加了这种缺乏。儿童有时能将"同样的"成分放到一起,便出现了如以后的逻辑分类中所出现的内涵决定外延的情况,但是他有时会对一个集合增加一个成分,其目的仅仅是为了完成这个集合所暗示的形状。在这里,外延达到了决定行动的程度,换句话说,就是外延决定了内涵。这种情况之得以发生,可以通过一个或两个途径:一个途径是,这个集合的几何形状影响行为,以致向其他那些成分增加一个成分以完成作为一个整体的集合的形状,而这个增加的成分并不具有其他成分共同具备的相似性(由几何图形所构成的复杂对象);另一个途径是,当使用描绘性物体时,向其他那些成分增加一个成分以组成一个有条理的情境。在后一种情况下,相似性便被得之于受试者过去经验的附属关系所代替。然而,这两种形式是相当的,因为无论在哪一种情况下,我们都发现了相似和相异决定外延的现象。换一种说法就是,集合的外延依赖于它的整体形状。

于是,外延和内涵都处于萌芽时期,但它们既没有被充分地分化,也没有完全互相协调。不过,还存在着第二种分化的缺乏,虽然这第二种分化部分地依赖于第一种分化,但它却始终与第一种分化相冲突:这是指缺乏不连续集合的逻辑(或前逻辑)结构特征和那些刻画一个连续整体之再划分的亚逻辑(或前亚逻辑)结构之间的分化。它在一定程度上是独立的,因为从感知-运动水平往前,儿童可能会像熟悉其部分能够加以拆开和装配的那些物体一样地熟悉那些无联系的集合(如堆积等)的摸弄。所以,正是在

感觉形状的影响下，他们才把形状归之于不连续的集合，这同他们处理连续集合的情况是完全一样的。此中包含有一直持续到目前阶段的缺乏分化之最初原因。因为明确地将无联系的物体组成的一个集合同连续的整体区分开来只有一条途径，这就是将某种稳定的结构强加给其空间安排非常独立的这个连续整体之上。为了完成这个结构，受试者必须首先达到对于外延和内涵的明确的分化；其次，他必须协调这两者。这种对于外延和内涵之间分化的缺乏，其本身在某种程度上是由于在逻辑的东西和亚逻辑东西之间的类似的混淆，但在同时，它又加强了那种混淆。换言之，这两种分化的缺乏倾向于互相支持，但它们却不是完全相同的。

这个比较复杂的情况便导致了本章中所描绘的那种行为。当我们着手研究这些为造成非图形（即前逻辑）集合而要在第Ⅱ阶段加以克服的困难时，我们所做的解释将得到进一步的证实，协调外延和内涵的困难将变得比以往更明显。事实上，后面的这些困难直到第Ⅲ阶段才得到克服，而且，这些问题的解决显然需要精心搞出一个适当的以类包含为基础的运算结构。

第二章 非图形的集合[①]

在以图形集合为特征的第Ⅰ阶段和以逻辑运算为基础的等级分类的第Ⅲ阶段之间,我们发现有第Ⅱ个阶段,这个阶段的反应特征为非图形的集合。我们使用的术语是"集合"而不是严格意义上的"类",因为前面的那个术语不含有类包含等级结构的意思。然而,这些集合不再是图形的,而且,受试者构成这个或那个集合的基础只是相似性。不过这几个集合仅仅是并列的,而不是以等级的类结构为基础的。正像我们在第一章中所看到的那样,在第Ⅰ阶段的连续地联系中已经出现有非图形集合的预兆,因为他们常常可能会造成一系列类似的对象,即非图形集合。但是在这个阶段,当受试者转而考虑集合本身时,他们对于相似性的注重却是一个不寻常的发现。在第Ⅱ阶段,非图形的集合越来越成为一个规律,了解其之所以如此的原因是重要的。如果先讲一讲所发现的结果及对其所做的讨论,我们就会发现,它之所以越来越占优势地位,主要是由于内涵和外延之间的不断的分化,以及由此而造成的对这两者比较好的协调。如果不先考虑一下它所造成的数量关系(这是第三章的主题,我们将在第三章中研究儿童是怎样在最后达到对于"所有"和"有些"的分化这一问题的理解的),我们就几乎不能对有关的过程作一个完整的分析。对于目前来说,我们得将我们的叙述限制在对于分类演化的过程作一个概括的一般的描绘。

1. 问题的陈述:附加分类结构的标准

与前一阶段的特征不同,这个阶段的反应特征可以说是准分类,我们可以勉强地把它说成是一种前分类,或类似于分类的行为形式。但它同第Ⅲ阶段的真正的逻辑分类也还有很大的不同之处。搞清进行这种分类的标准乃是理解其发展的一个基本的先决条件。这些标准不能全部"预先"确定,它们是受试者在一旦掌握了可逆运算并运用于分类问题之后所遵循的进行推理的准则。从这个观点来看,分类似乎有如下的特征:

(1)不存在孤立的成分,即不存在不属于任何一个类别的成分。这就是说,所有的成分必须被归类,而且,如果一个成分(X)是这一类中唯一的成分,它也必须形成自己

① 与万·邦(Vinh-Bang)、G.诺尔丁和 S.塔波尼耶合作。

的特殊的(但又是独一无二的)类别：$(x)\varepsilon(Ax)$。

(2) 不存在孤立的类别，即每一个由非本质特性 a 表示其特性的特殊的类别 A 都暗指它在接近的种 $B(A+A'=B)$ 范围内的补足物 A'(特征为非 a)[①]。

(3) 类别 A 包含具备非本质特性 a 的所有个体。

(4) 类别 A 仅仅包含具备非本质特性 a 的个体。

(5) 相同等级的所有的类都是断离的：$A\times A'=0$，或 $An\times Am=0$。

(6) 补类 A' 包含具有其自己的特性 a_x(这样，$A'=Ax$)，而这些特性是它的补类 A 所没有的，具有非本质特性 a 的那些成分于是就是非 Ax，这同具有非本质特性 a 的那些成分不是非 a 一样。

(7) 类别 A(或 A')包含在每一个较高等级的容纳其所有成分的类别之中，开始于最邻近的类别 B：$A=B-A'$(或 $A'=B-A$)和 $A\times B=A$，这就是说，"所有的"A 都是"有些"B。

(8) 外延的简明性：包括在(7)里的那些减少到适合于内涵特性的最小量。[②]

(9) 内涵的简明性：相似的标准(如颜色)区分了同样等级的类别。

(10) 对称的再分割：如果类别 B_1 被再分割为 A_1 和 A_1'，并将同样的标准运用于 B_2，于是 B_2 必须照样地被再分割为 A_2 和 A_2'。

这个项目表使我们能够将第Ⅱ阶段和第Ⅰ、第Ⅲ阶段区别开来。我们随即就注意到，这些特征中的任何一个都没有普遍地出现于第Ⅰ阶段，甚至也没有普遍地出现于前两个阶段。忙于图形集合的儿童们丝毫也没有感到非得利用所有这些成分不可(7)，他们也没有感到必须要造成几个集合(2)。他们很可能仅仅构造一个单一的复杂对象而忽略了某些成分(因此它们未被归类)。这个复杂对象无须引起另一个集合的构造(因为构造一个类别暗示了通过命题的否定所形成的它的互补类别，2)，甚至一个仅仅包含相同非本质特征 a 的那些成分的"集合对象"(参见 4)也不一定包含它们全部(参见 3)。此外，对于每一个受试者来说，集合对象也不是唯一的分类原则，几乎经常可以看到的与集合对象同时存在的那些复杂对象也不符合第 4 种特征。至于第 5 至第 10 的那些特征，它们对处于第Ⅰ阶段的受试者是毫无意义的。

另一方面，刻画第Ⅱ阶段之特征的那些非图形集合具有这个项目表中所列举的某些特性(这也是我们现在提出这个项目表的原因)。但这些非图形集合并不具备所有这些特征，而且，正因为如此，我们才能区别第Ⅰ阶段和第Ⅲ阶段。一般说来，在第Ⅱ阶段期间，认识这些特征中的每一个特征的程度是稳定地发展的，但也存在着一个非常重要

---

① "非 a"是补类 A' 的一个不同的关系特性，而且高一级的类 B(它并不包含在给定的 A 类之中)的所有成分都具有这一特征(它高于 A 类和 A' 类之成分共同具有的相似性 b)。这样，a 的特征可能是"具有一个特定的父亲"，而 b 的特征可能是"具有一个特定的祖父"；所有的堂兄弟就具有否定的特征非 a，以区别于那些具有 b 之特征的兄弟们。

② 正像一个 5 岁 11 个月的受试者所说的，"摆出尽可能少的堆数"。

的例外:没有包含(参见 7)。

正如下列结果所证实的那样,处于第Ⅱ阶段的儿童认识到需要对给予他们的所有成分加以分类(参见 1);他们总是将它们分成两个或数个集合(参见 2),其中每一个集合都容纳了一个类别的所有成分(3),而且不包含其他那些成分(4);存在着一种部分的互补性(参见 2 和 6),但这并不常见;同一等级的那些集合是断离的(5);最后,可能有一种寻求简化(8 和 9)和对称性(10)的尝试。不过,第Ⅱ阶段的非图形集合和严格意义上的类别的区分仍然在于这么一个事实:没有类包含。

我们必须首先发现的是儿童行为中表现出来的以实际的心理发展过程为基础的类包含的心理学标准,而不是基于逻辑分析的"先验的"标准。我们假定有这么一个特定的儿童,他将正方形(B)和圆形(B')按类别放进两个分开放着的盒子里去;接着他将正方形 B 划分为红色正方形(A)和蓝色正方形(A'),并分别将它们放到左边和右边;然后他对圆形也这么做。他的划分体现了 1 到 6 和 8 到 10 那些特征,那么是否也体现了特征 7 呢?人们肯定是这么看的:用成人逻辑的标准(或第Ⅲ阶段的那些标准)来判断的话,我们会认为,他已经构造了具有 $A+A'=B$(以及 $A_2+A_2'=B'$ 或 B_2)结构的一些集合这一事实,还不足以证明这个儿童认为红色正方形(A)和蓝色正方形(A')乃是"包含"在正方形这个类中的一些子类。不过我们要设想,情况并非一定如此:我们要在集合的再分割和严格意义上的类包含之间做出区分,尽管这种区分并不总是容易进行的。

本质的差别是,在真正的包含的情况中,B 这个较大的类,不管其组成部分($A+A'$)实际上是否联合在一起(或者以空间集合的形状,或者通过直觉"结合"①的手段),B 类总是存在着的。它总是包含它们,而且它保存它的统一性,即使在部分分离的情况下也是如此。换言之,受试者是能够以 $A=B-A'$ 的形式进行推理的。另一方面,集合和类别的本质差别是,集合是凭借其成分的空间联合而存在的,而且,当其子集分离开来之后,它也就不复存在了。其必然结果是,只要这些子集以 $A+A'$ 的形式联合在一起,受试者确实是将它们同整体——B($A+A'=B$)连接起来的;但一旦它们分离开来(空间的分离,甚至是思想上的分离),他就不再将这些子集同整个的集合连接在一起了,换言之,$A=B-A'$ 这个运算是超出他能力之外的。从定义上来讲,运算是可逆的,所以我们可以结论说,既然不存在逆运算 $A=B-A'$,那么 $A+A'=B$ 这个联合就不可能是第Ⅱ阶段的直接运算,而不管它们可能是多么的相像。事实上,它只是一种直观的联合,因为它要依集合 B 分化为子集 A 和 A' 的情形而定。

显然,仅仅着眼于受试者将一套多变化的物体构造成一些集合或子集的方式,往往很难确定是否有包含。我们非常可能会发现有这么一个人,他构造了一个相当好的等级,但仍然不能进行逆向的推理,即 $A=B-A'$。本章的研究结果之所以不倾向于提供

---

① 例如,第四章中想象中的一些花束,或《儿童的数概念》(1952,E. A. L)中的想象中的一些项圈。

以这些结果为依据的结论性证据，其原因也正在于此。这些资料需要与第三章和第四章所提到的那些对照实验相比较。第三章研究儿童运用"所有的"和"有些"(第7个特征)这两个关键概念的方式。我们说，即使在不破坏 $B=A+A'$ 这个连接的情况下，如果儿童能够掌握"所有的"A 都是"有些"B，那么他就能理解包含。但这并不意指如果儿童理解"所有的 A 都是 B(或都具有特性 b)"(例如，所有的圆形都是蓝色的)这一陈述，就等于他理解了"所有的 A 都是所有的 B"。(这样，儿童将否认所有的圆形都是蓝色的，"因为还有蓝色的正方形"。)第四章的基本方法是，给儿童呈现一个由一些项目组成的集合 B，它由两个子集 A 和 A' 组成，使 $A>A'$(也就是使 A 的数目多于 A')，然后问，是"A 多"还是"B 多"。如果没有类包含，儿童必然会回答，A 比 B 多(即部分大于整体)。A 和 A' 在思想中被分离开来这一事实破坏了整体 B，于是 B 就变成了 A'。

2. 几何模型构成的非图形集合

仍然存在着一些自发的在第一章第2和第3两节中描绘过的图形集合的反应。变化不是突如其来的，其原因是，尽管非图形集合不受确定的(与简单的"堆积"相对的)聚合形状的限制，但它们仍然从属于成分之间在空间上接近的原则。所以我们发现了各种行为，而这些行为在(图形集合之特征的)"部分的成员"和类别(或前类别)成员(它是存在于一个成分和一个有独立形式的集合之间的一种附属关系)之间逐渐变化。[我们回想起，这种成员不是一种包含，因为从定义上讲，成员往往是一个成分 x 和一个集合或类别 A 之间的关系，其形式是 $(x)\varepsilon(A)$。而包含则是一个类别 A 和另一个类别 B 之间的 $A<B$ 的关系。]

我们先提出一些过渡的例子，其中最初的几个例子体现了被分割开来的集合的特色，而这种被分割开来的集合并没有完全消除一个队列之图形的特征。

雷夫(4岁9个月)　开始于两个并列的队列，每一个队列都包含有三角形，正方形和半圆形。底下的那个队列是对称的，中间是几个正方形，其左边和右边是三角形，再往外的两个端点是一些构成齐整结尾的半圆形。后来，雷夫将(两个队列的)所有的半圆形放在一起；所有的三角形放在一起(一半重合："那，那是个楼梯")；所有的正方形放在一起(摆成一排："那，那是我的姓名")。他的解决办法介于一套"集合对象"和一些非图形集合之间。两者都是相似的，但集合对象是图形的，而非图形集合则不是。

韦尔(4岁10个月)　开始于一个大的连续的队列，其特征是有许多多余的东西，但他继而将多余的东西拿掉。通过示范，他从一端移走所有的正方形，并将它们与另一端的那些连接起来，等等。

西姆(5岁3个月)　同雷夫一样摆出两个队列，其中一个在另一个之上。在

这里，上面的那个队列全是蓝色的，下面的则都是红色的。这两排是经过仔细地配对的：两个蓝色正方形对着两个红色正方形，两个蓝色圆形对着两个红色圆形，等等。

第二种过渡形式代替了许多小的集合对象和复杂对象的集合。图形的安排开始消失，而且一个集合中的那些成分通常都是同类型的。虽然有时候这种反应是自发的，但偶尔它也得到指导语（“将所有同样的东西放到一起”）的帮助。同样地，反应的水平在很大的程度上也要依赖于这些（单个的或作为一个整体的）集合是否完全。

丹恩（4岁5个月） “你设法将这些东西整理好。”（这些东西是一些集合图形和彩色字母。）她先摆出一个综合的队列，开始是一些字母，接着是一些字母P和小圆形，然后是长方形、正方形，最后是圆形。“你能把它们整理得更好些吗?”她将这些队列拆散，将组成队列的那些部分分开。现在，这些部分中的每一个部分都成了一个独立的倾斜队列的基础，每一个部分都有七个成分：(1)不同种类的字母，(2)字母P，(3)小圆形，(4)正方形，(5)一个大写字母F，(6)正方形，(7)大圆形。“现在，将那些确实是同样的东西放到一起”，她水平地摆出三排，(a)字母(但没有P)；(b)字母P；(c)圆形，长方形和正方形。

佩特（4岁8个月，他在4岁和4岁5个月时的反应已经在第一章第2节中提到） 指导语是“适当地安排一下这些东西，将所有相同的东西放在一起”。他根据颜色摆出了五个队列：(1)黄色的成分（字母和正方形）；(2)一个白色的长方形（我要将这一个东西单独放，因为其他的东西都不和它相同）；(3)绿色的成分（字母和一个长方形）；(4)蓝色的成分（字母，正方形和长方形）；(5)红色的成分（圆形和字母）。

克尔（5岁4个月） “将东西整理好。”他摆出了十二个小集合，其中只有一个集合是复杂对象，其他的都仅仅是堆积或小队列。虽然每一个成分都没有遗漏，但分类的基础却是不稳定的，在两个不同的集合中出现有蓝色的东西，也有一些黄色的东西和长方形。

齐姆（5岁9个月） 使用的是第一章第3节中提到的那些东西，指导语是“将同样的东西放到一起”，他随着拿起环形（“这是一个环”，“又是一个环”等等）并将它们都放到一起（没有摆出任何形状），然后他将三角形放到正方形的上方，“这是一座屋子”，等等，最后，他将所有的半圆形放到一起，称它们为“小船”。这便造成了两个图形的集合（一堆环形和一堆“小船”）以及由复杂对象组成的第三个集合！

伊格（4岁4个月） 虽然年龄小些，但他一开始就用那些同样的东西摆出了一些复杂对象，最后他摆出了三个非图形集合。即使所用的指导语仅仅是“把它们整理好”，他还是将它们分成了(1)正方形，(2)环形、弧形和半圆形，(3)三角形。

4岁6个月至5岁6个月之间有着无数的这种中间反应的例子，这些例子表现了从队列向分离的集合，或从集合对象和复杂对象向并列的小集合的过渡。我们能够引用几百个说明各种可能有的结合的事例，然而，这几个例子已经足以说明下列两个结

论，其理由是，无论用什么材料，无论用什么指导语，我们往往都发现有：(a)从图形的集合向非图形集合的过渡；(b)从后者向前者的部分的可逆；(c)这两者的混合。

(1) 这些事实进一步证实了这么一种假设——图形的集合乃是分类的基本形式。需要考虑的至关重要的是，非图形的集合乃是图形集合的一个最切近的有着内在联系的发展，由于存在着完整的过渡行为的系列，这一点是显而易见的。

(2) 在图形的集合和分类之间并不存在一个突然的飞跃。非图形的集合本身并不是一种真正的分类，它的出现表明了这么一个事实，即相似和相异的原则有时有一种胜过形状或附属性原则的倾向。但是，同图形的集合一样，非图形的集合要受到空间接近状态的限制。它之所以是一个"集合"而不是一个类别，其原因正在于此。这个状态构成了整个第Ⅱ阶段的限制因素，因为直到用某种聚合一个整体之成分的"黏结剂"来代替接近性之前，它是不能越出这个限制的。类包含结构就是这么一种代替物，不过它依赖于"所有的"和"有些"的分化，而在第Ⅲ阶段之前，这种分化是不能臻于完善的。

现在我们可以提出一些根本不是非图形集合的前逻辑集合的例子。其最基本的形式是仅仅的不包括所有成分的并列；最高级的形式则是分化的和成等级的，以致达到了类似于类包含的程度。

(1) 最简单的类型由基于不同标准的许多小集合组成，还剩下一堆未作分类的不同成分。

朱达(5岁7个月)　摆出了六个集合：五个长方形，四个正方形，三个字母 a，三个同样颜色的字母(m, p, t)，四个大圆形和一个小圆形。但还剩下一些不同颜色的各种字母。

皮克(5岁6个月)　三个长方形，五个正方形，四个 a 和一个 n，五个 d，四个大圆形，剩下的是各种字母和一个小圆形。在剩余物中有一个字母 n，而在第三个集合中也有一个字母 n。

(2) 在略高一点的水平上，我们可能会发现一些仍然基于不同标准，但没有剩余物和复合现象的集合。

福恩(5岁6个月)　构造了九个集合：圆形，正方形，长方形，字母 n，字母 a 和 b，字母 x，字母 p 和 q，字母 $m+t$。

马尔(5岁7个月)　同样类型的八个集合。

(3) 下一个发展是排除了标准方面的不稳定性，同时也没有剩余和复合现象。

佩特(4岁8个月，他的早期反应是中间的，见上页)　最后摆出了以颜色相同为基础的五个集合。

奥尼(4岁6个月)　开始时根据颜色将这些东西(即第一章第3节中所提到的那些)加以分类并放进四个盒子中，蓝色的，黄色的，红色的和绿色的。然后他拿起三个盒子并将所有的正方形和长方形放进一个盒子，将所有的圆形，弧形，半圆形等放进另一个盒子，第三个盒子空着。

比克(5岁8个月)　用同样的东西。他的指导语是:"将这些东西放进盒子,使它们井井有条。"(a)正方形,(b)圆形,(c)扇形,(d)三角形。再给他一些东西之后,他将正方形放进(a),弧形和小圆形放进(b),环形放进(c),半圆形、扇形和三角形放进(d)。

杰克(5岁11个月)　一开始就摆了六个集合,然后又根据颜色这一标准来减少集合的数目。

(4) 最后,最高级的发展类型是,开始时像(3)那样,但然后就进行较低等级的内部分化。

皮布(5岁10个月)　一开始并列地摆出几小堆。给他三个盒子以后,他将圆形、扇形、弧形和三角形放进(a),将正方形排成三个相同成分组成的集合并放进(b),将环形,半圆形和圆形放进(c)。经过一系列的尝试之后,他成功地引进了一种两分法:(a)所有的曲线的成分,分为一些子集(环形是分开的,等等);(b)所有的直线成分,分为两个子集——一个安排成三个金字塔形状的正方形,另一个是全部堆在一起的三角形。

吉尔(6岁4个月)　构造了三个集合:(a)除了 p 和 q 之外的所有字母,(b)所有的 p 和 q,(c)几何图形。其中最后一个集合分成三堆,这三堆分别是正方形、长方形和圆形。

凯尔(6岁4个月)　一开始摆出十三堆,其中一堆是由所有的正方形组成的圆圈。经过多次尝试,最后他将这些东西放进两个盒子,一个盒子装所有的直线图形(正方形和三角形都同其余的分开),另一个盒子装所有的曲线图形,这些曲线图形又进一步再分为圆形、扇形等,在扇形中夹杂有一个三角形。

这些受试者摆出了三个甚或两个大的集合,然后再将它们分成一些子集,这相当于 $(B_1=A_1+A_1')+(B_2=A_2+A_2')$ 这种形式的前运算,所以,在附加的类别集合中有一个对于正运算的回顾。然而不能把它等同于正运算,因为仍然没有逆运算 $(A=B-A_1)$。正像我们在前面所指出的那样,我们能够据以区分这些前运算和真正分类的那些真正的标准,乃是受试者鉴别"所有的"和"有些"以及正确地认识到 $A<B$ 的能力(参见第三章和第四章)。然而,儿童在目前这些实验条件下做出反应的方式,常常给我们以一些提示——他们究竟是按等级来对这些材料加以分类呢,还是仅仅构造出一些集合和子集。下列三个例子显示了儿童如何达到第Ⅲ阶段的情况:

毕尔(7岁11个月)　给他一些集合图形和字母。他一开始就将前者放到一边,将后者放到另一边。然后他再将字母分为五个子类:b,a,d,n 和 mtx。几何图形则被分为长方形,正方形和圆形。

陈恩(8岁6个月)　用同样的材料构成三个大类:长方形和圆形(形成两个子类),圆形(再分成大的和小的),字母(按照不同的种类加以再分)。

罗伯(8岁2个月)　一开始将在第一章第3节中提到的那些东西分成四类:

(a)圆形，半圆形和扇形，(b)三角形，(c)正方形，(d)环形。然后他将(b)和(c)合起来，一边说："都是正方形的和三角形的"(那就是：直线的图形，他将它们分开放在一个盒子中)，又将(a)和(d)合起来，一边说："都是圆的"(=曲线形)，它们依据其种类被再分割。

毫无疑问，从图形的集合向非图形集合的过渡以及后来的非图形集合之臻于完善乃是一个平缓的渐进过程，以致第Ⅲ阶段特有的那种行为本身也只不过是一个连续发展的最后期。第Ⅱ阶段第4种集合和毕尔、陈恩、罗伯的那些集合(我们称它们为类别)之间的差别是不是纯粹人为的?

尽管这唯一的决定性的标准是数量的限定(第三章和第四章)，但是，在上面勾勒的那种发展之中仍然存在着一种相对的不连贯性。在第Ⅱ阶段，整个反应中的每一个成分都是对于一个中介的和部分的问题的反应：开始构造时并无一个全面的计划。第1种类型的反应是相当明显地表现出了标准的不稳定以及集合并没有囊括所有成分。然而，受试者不久就能够修改他们的标准并将所有的成分都分完(第2种类型)。首先，这只是在事后认识(反作用)帮助下所完成的一系列的组合尝试，但这些尝试反过来又导致了部分地出现在行为本身过程中的一些预见。这样我们便发现，一个主要的标准将要出现(第3种类型)，再往后，如此构成的那些集合可能要进一步地再分割(第4种类型)。

这样，在第Ⅱ阶段期间所取得的那些进步，可以从反作用和预见的方面来考虑。换言之，它们是所有的尝试与错误行为所具有的逐步调节的一个部分。只有通过尝试与错误，像皮布(5岁10个月)和凯尔(6岁4个月)这样的受试者才能最终实现对于材料做完全的两分法。不过，虽然这种预见在开始时是不全面的，而且不过是事后认识的副产品，但它发展的自然路线却确保它在适当的过程中从一开始就出现，只是到了后来，调节的事例才取得了成功并呈现出逻辑转换的特征，这也是我们认为可以谈相对的不连贯性的原因。上页中所引证的那三位受试者中的每一个，在他开始构造之前(或随后)，都形成了一个计划，此外，这个计划使他们能够自由地进行从整体到部分或从部分到整体的转换。换言之，他们的行为具有一种联合上行过程(联合)和下行过程(再分)的机动性。事实上，这三位受试者不同于前面的所有受试者，因为他们有个计划。因此，我们可以将我们的假设(它随后还要发展)作如下陈述——类包含依赖于一个预想的格式(这个格式同支持从正运算 $B=A+A'$ 向其逆运算 $A=B-A'$ 过渡以致使后者不再作为事后认识的一个偶然结果而成为一个必然的逆运算的那个格式是相同的)。我们认为，这样的一个格式不仅对于可逆性是必要的，而且对于"所有"和"有些"的使用，对于 $B>A$ 这种形式的数量关系的理解都是必不可少的。根据这个假设，第Ⅱ阶段的受试者仍然处于非图形集合的水平，因为他们缺乏这样一个预见的格式，所以仍然不懂得类包含的机制。

3. 描述性物体构成的非图形集合

处于这种情形下的行为的发展，非常相似于用描绘性物体来代替几何图形时的情况，因此，我们的叙述比在第一章第4节中的那些要简短得多。

在这里，前几个例子又是过渡的。如果我们还记得，用这种材料来做实验乃是情境的附属而不是决定复杂对象特征的那些格式，那么我们就会发现，儿童在开始时有一种摆出复杂对象的倾向，继而便逐渐修正他们的想法，最后，相似性和相异性实际上成了组合的唯一标准。

艾利（5岁6个月） 一开始便构造了几个复杂对象，但它们已经是部分地基于相似性的了：三个男人，一个黑人，一个小女孩，一头猪和一只乌鸦。他用各种各样的故事来解释为什么以这种方式把这些东西放在一起（但形状和颜色无疑起了作用），不过，然后他又仅仅根据相似性来构造一些集合：将鱼同鸟放在一起等等，"因为它们都是动物"。接着放了一些人，再往后便是一些锅等等，"因为它们都是做午饭的东西"。

维夫（6岁6个月） 开始时同艾利一样，放上个婴儿的凳子，一个长柄有盖的深平底锅，一把小椅子，一只水盆，一条鱼，等等："凳子是让婴儿坐的，长柄有盖的平底锅是给他做饭的，水盆是给他洗澡的，鱼是给他玩的，小椅子是给他放东西的。"——"你能再用一种方式来安排这些东西吗？"——"能（她将动物与人放在一起，然后又把人拿走），这样，它们就都是动物了。"接着她将所有的炊具放在一起，但有些东西留在靠近婴儿的地方，因为它们"在一起"。

金恩（5岁6个月） 用的是有关那个村庄的材料。一开始她摆了一个包括所有东西的连续的队列，但组成这个队列的那些部分是根据相似性来加以区分的。然后给她五张纸，并要她"适当地将东西安排"在这些纸上。金恩开始时摆了一些小集合：（1）一些屋子和一些男人，但她又将人拿走了："不，他们有腿，而屋子没有腿"；（2）两个男人；（3）两个女人；（4）一些婴儿；（5）十二个摇篮。她还想要几张纸，但没有给她。这样，她将男人和婴儿放在一起，"因为这些有两条腿"；然后将女人"同婴儿车在一起"。——"这些东西相配吗？"——"不（她将女人同男人和婴儿放到一起），他们都有两条腿。"她将一些枞树与其他的树放在一起，不过她的解释是："那些是枞树，它们不一样：有些是弯的，有些是圆的。"然后说："这儿都是动物。"

我们在这里发现了与前几节相类似的混合，而且解释也是完全相同的。唯一的差别在于，情境附属的影响往往比格式的影响更难摆脱。从我们所知道的根据用途来定义（见第一章第4节）的持久性来看，这并没有什么奇怪之处。

在严格意义上的非图形集合这个阶段，我们发现有四种类型的情况，这和我们用几

何图形做实验所发现的是相同的。然而,我们无须举例详述其细节,下面的这些例子仅仅说明从并列的集合向准等级集合的倾向。

蒙(5岁3个月) 一开始将所有的家具放在一起。"你还能将其他一些东西同它们放在一起吗?"——"不能。"——"继续搞吧。"——(他将人、婴儿和一只猴子放在一起,然后用罐和平底锅组成了第三个集合。)——"这些(猴子和男人)怎么样,它们相配吗?"——"是的,这是开玩笑的。"——"如果你不是开玩笑,该怎么样?"——"那么它就同动物相配。"

艾德(5岁6个月) 很快地摆出了四个同样的集合并解释道:"这些(1)都是小人;那些(2)都是坐的东西;那些(3)都是盛水的;那些(4)都是动物。"——"很好。你能再将这些东西换一种摆法吗?"——"能,这些(一堆)都是木头的,那些……(都分完了)。"

范恩(6岁3个月) 给他十五个人,他一开始安排了八个并列的小类别:(1)两个去上学的男孩;(2)两个小女孩;(3)两个女人;(4)两个男人;(5)一个小弟弟和小妹妹等等。他试图摆成四组:(1)一个警察,一个穿大礼服的男人和三个女人;(2)一个马戏小丑;(3)三个背着书包的男孩和四个女孩;(4)一个滑雪者,一个奔跑着的男孩和另一个放风筝的男孩。"现在将他们分成两组":(1)男孩和女孩;(2)所有其余的。"能再换种方法吗?"——"能,可以将所有的绅士和男孩放在一起,所有的女孩和太太放在一起。"然后范恩便构造了这两个集合,每一个集合再划分为成人和儿童。

贝克(6岁5个月) 给他人,动物,植物,建筑物和交通工具。"要将相像的放到一起,怎么放法?"——"所有的绅士,所有的车子……我要将屋子另外放在一起(教堂不同它们在一起,因它不是屋子),然后是花、树、婴儿车、动物。"他用这种方法形成了一些小集合,甚至还将"鸟"和"动物"区别开来。每一组都放进分开的袋子里。后来,实验者给他一个大的能装下前面那些东西的大袋子。贝克将成人和儿童归为"人",然后是鸡和动物,"因为鸡也是动物",接着是枞树和树,他又加上花,"因为树也是像花一样的东西……是生长的植物",随后是"汽车和婴儿车,因为它们都是滚动的东西"。

卡拉(7岁) 同贝克一样,先是并列,然后缩减:两辆汽车,一辆机车和两辆婴儿车,"因为所有的都滚动";两匹马,两只猫头鹰和两只鸡①,"因为所有的都是动物"。——"如果你想写出这里面的这些东西,你怎么写?"——"六个动物……(她对于是否写'六只鸡'犹豫了一下,但最后决定不这么写)因为它们都是动物,因为它们不是六只鸡。"——"是动物多还是鸡多?"——"动物多……不!鸡多!"——"为什么?"——"因为还有三只鸟(忘掉了一只猫头鹰),是的,还有一只(即四

---

① 我们应该解释一下,这些都是木制小玩具,而不是图片。

只)。”——“那么,是鸡多还是动物多?”——“鸡多。”

总的来看,包含有描绘性物体的集合的发展同由几何图形组成的集合的发展是完全一样的。其过程是,开始于许多小的并列的集合,然后通过(包括逆反和部分的预见在内的)比较,逐渐地将它们组合在一起,直到最后构成几个分解成一些子集的大的集合(参见范恩、贝克和卡拉)。在逐渐缩减的过程中,非常引人注目的是越来越频繁地使用了数量词“所有的”(参见艾德、范恩、贝克开始时的情况,卡拉在处理汽车、特别是动物时的情况)。非常清楚,在儿童对一个由一些物体组成的集合进行分化并将数目较多的一些小“组合”组织成两个或三个大集合的时候,他们便对内涵和外延进行了较好的协调。当对大的集合作进一步的再划分,在缩减的过程中没有丧失较少的集合的时候,情况尤其如此。因此,在构造较大的集合时,儿童就使用了“所有的”这个词。

我们可以再次问一下,这种类型的分化了的集合是不是还没有构成一些真正的类别,所以第Ⅱ阶段和第Ⅲ阶段之间的分界线究竟是不是人为的。卡拉的例子是很能说明问题的,而且这些问题及其答案很自然地将要导致在第三章和第四章中所要提出的那些问题。它们所显示的是,“所有的”这个词的使用并不一定意指受试者对于子集 A 和整个的集合 B 之间的数量关系有了正确的评价。卡拉两次宣布马、猫头鹰和鸡都是动物,而且两匹马、两只猫头鹰和两只鸡构成“六个动物”而不是六只鸡,但她还是下结论说,在这由六个动物组成的集合中,鸡的数目比动物多,因为有四只鸟。下两章将研究造成这种错误以及为什么最终才掌握适当关系的原因。

第三章 “所有的”和“有些”:类包含的条件[①]

迄今为止,我们所了解的一切都暗示了这么一点,即构造类别的关键问题是外延和内涵的协调。为了直接解决这个问题,我们设计了一些实验,这些实验直接针对类包含问题。人们可以把它看作是在子类(=“有些”)和形成中的类别(=“所有的”)之间基本的外延关系问题。在这里,“有些”和“所有的”两者都是由一些内涵的关系或特性所决定的。

关键问题就是逻辑学家汉密尔顿(Hamilton)所说的谓语的数量限定。从心理学的角度来讲,它只有通过内涵和外延的协调(它保证了谓语适用的那个词语的数量关系)才能解决。看来,受试者在第Ⅱ阶段所缺乏的正是这个协调。按照汉密尔顿的说法,“所有的 X 都具有 y 特性”表示“所有的 X 乃是部分的 Y”,即由 X 所构成的这个类别(在外延方面)包含在以 y 为特性的 Y 这个类别之中。如果我们能够把这个抽象的关系翻译成适合于四至七八岁儿童的词语的话,那么我们就能了解它所引起的那些问题究竟是否足以说明这么一个事实——从并列的前逻辑的集合到等级的结构这一过程对于儿童来说是非常困难的。我们试用了各种各样的方法。如果要我们预先说一说下面将要谈到的结论,那么我们可以讲,这些研究证实了我们的假设。尽管这里提出的这个问题的性质比较抽象,但我们研究的基本方法只是询问受试者,是否“所有的 X 都具有 y 特性”。举例来说,我们可以摆出由一些蓝色圆形、蓝色正方形以及一些红色正方形组成的一个集合,然后问受试者,是否所有的圆形都是蓝色的。他们的回答非常清楚地表明,他们谓语的数量关系是错误的,属于主语的“所有的”——圆形——被谓语——蓝色的同化了。在这里,我们直接进一步证实了我们的假设:如果说儿童对类包含有困难的话,那是因为他们难以使自己对于“所有的”和“有些”的使用适合于使用了这些量词的那些成分的内涵特性。

---

① 与 A. 爱梯纳(Etienne),B. 马特隆(Matalon),A. 莫夫(Morf),H. 尼道夫(Niedorf)和 S. 塔波尼耶合作。

1. 运用于形状和颜色的“所有的”和“有些”[①]

给儿童两组东西，第Ⅰ组是8－21个由红色正方形和蓝色圆形组成的实验器材，第Ⅱ组与第Ⅰ组相仿，但常常在第Ⅰ组的基础上增加几个蓝色正方形（见图7）。然后便提出几种问题。将几排东西直接放在受试者面前，并要求他作一系列的判断：“所有这些正方形都是红色的吗？”“所有这些圆形都是蓝色的吗？”等等。为了弄清受试者的回答是否具有复现的能力以及是否仅仅利用感知（觉察放在他面前的那些他能看见的东西），可以要求他凭记忆回答同样的一些问题。在这种情况下，先将一排东西让他看，然后实验者将它藏起来并核对一下，以确证他已经记住了这一排的构成。然后，实验者便要求受试者重新摆出已经藏起来的那一排东西。其方式是，让受试者挑选必要的实验器材，或说出他要分别从给予他的四个盒子（红色正方形，红色圆形，蓝色正方形和蓝色圆形）中各取出多少成分。无论是用上述两种方法中的哪一种，这种重新摆出仍然没有说明儿童是如何理解包含的。该实验的这个部分的成功或失败并没有告诉我们任何有关儿童对于类包含的理解，而且，相当多的儿童能够正确地重新摆出这些排，尽管他们对于分类的尝试只不过是几个小集合的并列。但是，他们所做出的答复却表明，即使儿童能够记住这一排的构成，他们可能仍然不能处理“所有的”和“有些”等问题。开始时我们使用了这种临床法，其结果显示在表Ⅰ之中。继而我们进行了一种更为系统的研究，该研究有下列三个阶段：(a)直接地重新摆出，(b)根据记忆重新摆出[产生了一些与(a)略为有些不同的结果]，(c)一套标准化的问题。该研究的结果见表Ⅰa。

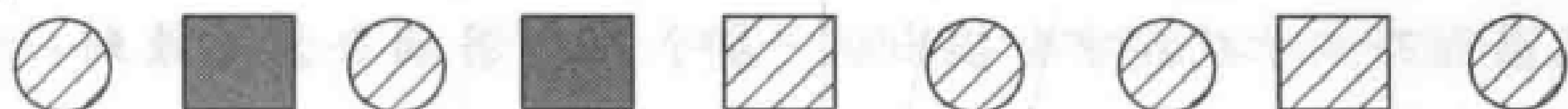


图7

我们先举出几个第Ⅰ阶段的例子。在第Ⅰ阶段，即使是用第Ⅰ组实验器材（蓝色圆形和红色正方形），有时也显得太难！

皮尔（5岁） 给他显示五个蓝色圆形和三个红色正方形。红色正方形分散在这一排之中：“重新提出这一排，你需要哪些盒子？”——“红色的圆形和蓝色的圆形。”——“是这样的吗？”——“是的。”——“这是什么？”——“那些（红色正方形）中的一个。”——“这个呢？”——“蓝色的圆形。”——“好，你看，这里所有的圆形都是蓝色的吗？”——“是的……不。”——“为什么？”——“也有红色的。”——“在哪里？”——“那里有红色的正方形和蓝色的圆形。”——“所有的正方形都是红的？”——“是。”

① 这项工作开始于1939－1940年，合作者凯瑟·沃尔夫当时正在日内瓦。

第Ⅱ组(三个红色正方形,两个蓝色正方形,两个蓝色圆形):"所有的圆形都是蓝的?"——"不,只有两个。"——"所有的正方形都是蓝的?"——"不。"——"那么,所有的圆形都是蓝的?"——"不,有蓝的,有红的。"——"这些红颜色的是什么?"——"正方形。"

铁恩(5岁1个月)　第Ⅰ组:"你需要哪些盒子?"——"红色的正方形和蓝色的正方形。"——(将蓝色的圆形稍微向前移动一下,使这两个集合部分地分离开来。)"像这样的?"——"红色的圆形和蓝色的圆形。"——(将五个蓝色的圆形放在这一排的右边,将三个红色的正方形放在左边,使这两个集合完全分离开来。)"像这样的?"——"红色的正方形和蓝色的圆形。"——"现在呢(像先前那样无规律地交替)?"——"不。"——"为什么?"——"我不知道,因为也有蓝的(=其他一些非正方形的蓝色的实验器材!)。"——"所有的圆形都是蓝色的吗?"——"是的。"(并无困难,因为它们是多数。)——"所有的正方形都是红色的?"——"不!"(很自信地)

依雷(5岁5个月)　第Ⅰ组:"所有这些正方形都是红色的?"——"我不知道。"——"为什么?"——"还有圆的。"——"是不是所有的正方形都是红色的?"——"是的"——"是不是所有的圆形都是蓝色的?"——"是。"——(加上一个蓝色正方形以形成最简单的第Ⅱ组)"是不是所有这些正方形都是红色的?"——"不,因为有一个蓝色的。"——"所有的蓝颜色的都是圆形?"——"是的。"

下面是第Ⅱ阶段的一些例子,在这里,开始的那些困难不再出现(除了像5岁8个月的杰克这个例子还残留一些之外)。

巴尔(5岁)　[实验者先用六个蓝色圆形和两个红色正方形摆成一排(Ⅰ),后来又插上第二个和第五个圆形。]巴尔看了这一排之后宣布,她只需要装红色正方形和蓝色圆形的盒子就能重新摆出这一排。她将另两个盒子放到一边,并正确地重新摆了出来。实验者继而进行第Ⅱ组器材的实验,用七个蓝色圆形和数目不定的红色与蓝色正方形(一个或两个红色的,一到五个蓝色的)摆成一排。巴尔每次都正确地记住了它们,她将盛红色正方形的盒子放在一边,保留另外三个盒子,并正确地重新摆出来。后来向她提问有关最后两排的一些问题:

(ⅡA)①。"所有的正方形都是红色的?"——"不。"——"为什么?"——"有红色的正方形也有蓝色的正方形(正确)。"——"所有蓝颜色的都是圆形?"——"不。"——"为什么?"——"有(蓝色的)圆形和(蓝色的)正方形(正确)。"——"所有红颜色的都是正方形?"——"是的,因为有蓝色的正方形和红色的正方形(正确)。"——"所有的圆形都是蓝色的?"——"不(错误)。"——"为什么?"——"因为有[蓝色的]正方形和圆形。"——"所有的正方形都是蓝色的?"——"不(正确),因为有(蓝色的)圆形和(蓝色的)正方形。"

---

① 第Ⅱ组(A)和第Ⅱ组(B)的差别仅在于成分的数目。

关于最后的那一排(ⅡB):"有哪些东西?"——"蓝色的圆形,红色的和蓝色的正方形(正确)。"——"所有的圆形都是蓝的?"——"不(错误),因为有(蓝色的)正方形和圆形。"——"所有红颜色的都是正方形?"——"是的,因为只有正方形。"——"所有的圆形都是蓝色的?"——"不(错误),有圆形和正方形(蓝色的)。"

维尔(5岁7个月) 根据记忆重新摆出了由一些蓝色圆形和红色正方形组成的最初的那一排(Ⅰ),然后加上两个蓝色正方形。实验继而直接检查第Ⅱ排的情况,而这一排始终是让受试者看见的:"所有的圆形都是蓝的?"——"是,……哦!不,因为也有蓝色的正方形(!)"——"所有的正方形都是红色的?"——"不。"——"所有的正方形都是蓝色的?"——"不,也有红色的(正确)。"——"所有红颜色的都是正方形?"——"是的(正确)。"

贝尔(5岁7个月) 正确地重新摆出了最初的那一排以及包含一些蓝色正方形的那一排。"所有的正方形都是红色的?"——"不,有蓝色的正方形(正确)。"——"所有的圆形都是蓝色的?"——"是的(正确,但互换一下就错了)。"——"所有蓝颜色的都是圆形?"——"是的(错误)。"——"所有蓝颜色的都是圆形?"——"啊,不,有正方形(正确)。"——"那么,这些正方形是什么?"——"红色的和蓝色的(正确)。"——"所有的圆形都是蓝色的吗?"——"不,也有蓝色的正方形(!)"——"所有的圆形都是红色的?"——"不,有蓝色的(正确)。"——"所有红颜色的都是正方形?"——"不,也有蓝色的正方形(!)"

杰克(5岁8个月) 对于放在他面前的由六个蓝色圆形和三个红色正方形感到困难。"所有的正方形都是红色的?"——"不,因为有(蓝色的)圆形。"——"蓝颜色的是正方形吗?"——"不。"——"那么,正方形是红色的?"——"是。"关于三个蓝色正方形,一个红色正方形和三个蓝色圆形:"所有的正方形都是蓝色的?"——"不,有一个红正方形。"——"所有的圆形都是蓝颜色的?"——"不,有红色的(正方形)。"——"红颜色的都是圆形?"——"不,它们(圆形)是蓝色的。"

艾里(6岁) 面前放着由十四个蓝色圆形以及几个正方形(两个是蓝色的,三个是红色的)组成的一排:"所有的正方形都是红色的?"——"不,有蓝色的(正确)。"——"所有的圆形都是蓝色的?"——"不,有两个蓝色的正方形。"——"所有的红颜色的都是正方形?"——"是的(正确)。"

伯尔(6岁4个月) 开始时重新摆出由蓝色圆形和蓝色、红色正方形组成的一排。"所有的正方形都是红的?"——"不,有蓝色的和红色的。"——"好。那么,是否所有的红颜色的都是正方形?"——"不,有蓝色的和红色的。"——"仔细听,是不是所有红颜色的都是正方形?"——"不。"——"为什么?"——"因为有蓝色的正方形。"

西益(6岁7个月) 凭记忆正确地重新摆出了由蓝色圆形和蓝色、红色正方形组成的一排。"所有红色的都是正方形?"——"不,因为也有蓝色的正方形(错

误)。”——“所有蓝色的都是圆形?”——“是的(错误)。”——“所有的圆形都是蓝色的?”——“是。”——“所有正方形都是红色的?”——“是,也有两个蓝色的正方形(!)”

费伯(6岁7个月) 同样的情形。“所有红颜色的都是正方形?”——“不,因为也有些是蓝色的。”——“所有蓝颜色的都是圆形?”——“不,因为也有正方形(正确)。”——“所有的圆形都是蓝色的?”——“不,因为也有蓝色的和红色的正方形。”

克尔(6岁8个月) 凭记忆正确地用六个蓝色圆形、两个蓝色正方形和一个红色正方形重新摆出一排。“所有蓝颜色的都是圆形?”——“是的……不,不是所有的,有六个蓝色的圆形和两个蓝色的正方形(正确)。”——“那么,所有的圆形都是蓝色的?”——“不,有六个蓝色的圆形和两个蓝色的正方形。”——“所有红颜色的都是正方形?”——“不。”——“为什么?”——“因为只有两个红色的正方形(而其余的是蓝色的)。”

杜普(7岁6个月) 同样的情形。“所有的正方形都是红色的?”——“不。”——“有些蓝颜色的是正方形?”——“是的(正确)。”——“所有蓝颜色的都是正方形?”——“不(正确)。”——“所有红颜色的都是正方形?”——“不(错误)。”——“为什么?”——“也有蓝色的正方形。”

上述所有的例子都取之于第Ⅰ阶段和第Ⅱ阶段,可以将它们同答案完全正确的两个例子(第Ⅲ阶段)加以比较:

柯尔(6岁8个月) “所有红颜色的都是正方形?”——“是的。”——“是吗?”——“是的。”——“所有蓝色的都是圆形?”——“不,不是所有的。也有(蓝色的)正方形。”——“所有正方形都是蓝色的?”——“不,也有红色的正方形。”——“所有圆形都是蓝色的?”——“是的。”

奥伯克(7岁9个月) “所有的圆形都是蓝色的?”——“是的。”——“所有正方形都是红色的?”——“不,不是全部。”——“所有红颜色的都是圆形?”——“不。”——“有些蓝颜色的是圆形?”——“是的。”——“所有的正方形都是蓝色的?”——“不,不是全部。”——“有些正方形是蓝色的?”——“是的。”

最后,这里有一个表,它说明了对于混合组(ⅡA和B)所提的四个问题做出正确答复的百分比,还有后来整理成两组($A<B$或$B<A$)的答复,它们依据该问题是“部分A的所有成分是否具有整体B的特性”(正确的答复:是的),以及“整体B的所有成分是否具有其部分A的特性”(正确的答复:不是)而整理成两组的($A<B$或$B<A$)。在最后两栏中,根据谓语是关于颜色或是形状而将四个问题组合起来。

表Ⅰ　对于有关“所有的”使用方面所提的四个问题做出正确答复的百分比①

CB＝所有的圆形都是蓝色的？

RS＝所有的红颜色的都是正方形？

BC＝所有的蓝颜色的都是圆形？

SR＝所有的正方形都是红色的？

AB＝所有的 A 都是 B？（如果 $A<B$）＝CB 和 RS

BA＝所有的 B 都是 A？（如果 $A<B$）＝BC 和 SR＋＝对于 AB 和 BA 的正确答复

年龄（以及受试者的人数）	CB	RS	BC	SR	AB	BA	＋	平均数 CB＋SR	平均数 Be＋RS
5(23)	82	57	69	70	42	39	9	76	63
6(31)	63	58	60	79	35	48	13	71	59
7(14)	64	68	73	88	43	57	21	76	70
8(10)	80	90	85	95	73	81	45	87.5	87.5
9(8)	81	81	81	100	71	81	50	90.5	81

由于表Ⅰ所显示的这些结果可以归咎于疲劳或疏忽，所以就搞了一个对照实验，在对照实验里，问题仅限于这些表中所显示的那些。表Ⅰa 显示了这个实验的结果。这 52 个儿童都没有参加过前面的那些测验，而且在整个询问过程中，实验材料都是可以清楚地看见的。

表Ⅰa　对于有关“所有的”使用方面所提四个问题做出正确答复的百分比

年龄（以及受试者的人数）	CB	RS	BC	SR	AB	BA	＋	平均数 CB＋SR	平均数 Be＋RS
5(12)	67	54	79	66	42	58	8	66	66
6(10)	90	55	80	80	45	70	20	85	67
7(10)	100	70	80	90	70	70	50	95	75
8(10)	100	80	100	90	80	88	70	95	90
9(10)	100	85	100	90	80	90	80	95	92

(1)在一至四栏中，如果受试者随即做出正确的回答，那么他的答复就被看作是正确的，这样的答复就记为 1 分。如果他马上纠正了他最初的错误，那么问题就重复一遍，那一项就记作 1/2 分。最后两栏分别是一和四，以及二和三的平均数。(2)在 AB、BA 和＋这些栏中，一个确定的得分表示一套理想的答复，最高得分 1 就判给有关的两个或全部的四个问题。考虑到由于疲劳的消除而造成的百分比数略为增大，第二套结

① 不要把表Ⅰ至表Ⅲ中的百分比的数字看作是标准的，因为它们在很大的程度上要依赖于所提问题的形式。它们的主要作用在于对这四个问题做出比较。

果总的看来是与第一套结果相符的，而且这些结果值得我们仔细地研究。下面所讨论的是关于质的说明以及上列表格的数字。

第一点是，受试者的答复并不总是一致的。儿童们往往对某种类型的问题能做出正确的回答而对另一种类型的问题又给予不正确的答复，如果将所有四个问题总合起来考虑，就更没有一致性。于是，6 岁组儿童对于单个问题所做正确答复便在 55% 到 90% 之间，但如果将这些问题配成对（*AB* 栏和 *BA* 栏），那么这个数字就下降到 35% 至 70%，而对所有四个问题做出正确回答的只有 13% 至 20%。不管实验者多么富有经验（而且他肯定是一位有经验者），但情境并没有起促进作用，这一点是完全真实的。所以，这种不一致性可以归因于心神烦乱或疲劳。不过，它也可能是由于这么一个事实，即虽然受试者不能以一种前后一致的方式运用数量词“所有的”，但他仍然能够通过猜测或机遇来正确地回答一、两个问题。那种认为疲劳或缺乏兴趣并不是唯一的因素这一论点需要有一些确切的根据，我们将在第 2 节和第 3 节中提出这样的证据。

然而，我们所说的缺乏兴趣并不是说成功和失败都是偶然的[①]非常清楚地出现了若干种倾向。这样，并不是所有的受试者在处理“是不是所有的 *A* 都是 *B*”这种形式的问题方面都像他们处理“是不是所有的 *B* 都是 *A*”这种相对类型的问题那样取得了成功（见第 3 节）。或者，我们可以比较一下最后的两栏。在这里，*CB*＋*SR* 的平均数往往比 *BC*＋*RS* 的平均数要好些，而绝不是更坏些。这意味着，当由“所有的”这个词来暗示的作为一个整体的集合用形状来加以界说时，就要比用颜色来加以界说时容易些（或者说，它至少不是更难些）。换言之，“所有的”这个词并不是一个真正的逻辑学的量词，而是一个它所指向的直观的对象（这个直观的对象是在“所有的”这个词泛指一个较好的图形集合时才确定下来的）。参照在研究图形集合和非图形集合时已经得出的那些结论，我们便倾向于提出下列三个假设，这三个假设不仅说明了部分成功的原因，而且也解释了失败之所以呈这种分布状态的理由。

（1）在图形集合的水平上，为了想象“所有的 *X*”，儿童们便尝试组成某种集合对象（例如一个队列或一个复杂对象）。在这么做完之后，他们就能够通过决定该集合对象是不是具有整体 *Y* 的特性来回答“所有的 *X* 都具有 *y* 的特性吗？”这个问题。他们能够在完全不考虑其他集合对象和图形集合的情况下去这么做。他们仅仅关心由 *X* 所组成的那个集合，他们能够忘记那些也具有 *y* 特性的其他的东西，因为实验者没有要求他们用 *Y* 来组成第二个集合，并比较 *X* 和 *Y* 这两者的外延。我们所知道的关于图形集合

---

① 我们可以作这么一个假设，即在这些问题中的任何一个问题方面的成功和其余问题中的一个或全部方面的成功之间是完全没有关联的。基于这个假设，我们就可能对于每一个年龄在 *AB*、*BA* 和＋这些栏中出现的数值加以预计。就事实而论，这些“得到的”数值同我们基于这种假设而预计那些数值是非常接近的。人们很难不得出这样的结论，即没有关联本身就是缺乏理解的一个尺度，尤其是在年幼的水平上（因为 *AB*、*BA* 和＋的“可能的”数值范围趋向于减少，而前四栏的数值却“增加”，以致“实际的”数值就没有多大意义）。

的一切使我们弄清了这一点，即它仅仅涉及 X。所以，在这个水平上，造成困难的唯一根源是将所有的 X 看作是一个图形的整体。

(2) 在非图形集合的水平上，只要儿童不能构造等级的系统和它的相关物——逻辑学的减法运算，这个问题就变得更加复杂。应该记得，非图形集合仍然是一个直观的组合，而不是一个真正的类别。“所有的 X 都具有 y 的特性?”这个问题不再引起儿童用 X 来组成一个集合对象，在达到高于图形集合的水平之后，他们才能对于“所有的 X”进行推理，而这些 X 是分散放在他们面前的桌面上的(这仍然不是 X 的类别)。正是由于这个原因，所以当他们考虑特性 y 的适用性时，就不再忽视那些非 X 的 Y。他们不是根据一个图形集合(X)来回答，而是必定要构成两个非图形集合(一个是 X 的集合，另一个是 Y 的集合)，并且用“所有的 X”来比较“所有的 Y”。现在，为了决定“所有的 X”是不是“有些 Y”，我们就得根据类包含的格式来加以推理，而这正是这些孩子所缺乏的。最后的结果是，只有在这个水平上，儿童才第一次碰到谓语的数量限定问题，而且还不能解决它。在决定是否所有的 X 都具有 y 的特性方面，他们所能做的一切就是弄清 X 的集合是不是与 Y 的集合相一致，这几乎等于把“所有的 X 都具有 y 的特征?”这个问题变化为“所有的 X 都是 Y?”而不是变成“所有的 X 乃是部分的 Y?”而这才是它的适当意义所在。因此，在图形集合的水平上，“所有的”这个问题似乎比较单纯(因为受试者过分地简化了它)，而在非图形集合的水平上，它不再有普遍的解决办法。我们将在后面看到，“所有的 A 都是 B 吗?”这个问题比“所有的 B 都是 A 吗?”(其中 $A < B$)要困难些。

(3) 不过，图形集合和非图形集合的对立往往是一个程度的问题。如果成分具有某种共同的“图形的”特征，甚至一个年龄较大的儿童也会专注于散布在桌子上的(或者像我们目前的实验那样胡乱地散布在由不同成分组成的一排之中的)那些成分的集合。这是确定无疑的，尽管事实上他不再构造人为的“复杂对象”。我们问的问题是：“所有的 X 都具有 Y 的特性吗?”受试者有时(但不经常)根据纯粹的外延关系把它转化成“所有的 X 都是 Y 吗?”不管怎样，他的确是部分地依靠于界说 X 和 Y 的那些特性的，而这些特性可能是形状、可能是颜色、可能是大小，也可能是重量。如果 x 是一种比较明显的图形的特性而 y 的图形特性不强烈(尤其是在它的图形特性很不强烈时)，那就很容易出现前面那种水平上的情况：x 就会从外延的方面加以考虑，而 y 就保留内涵的特性。这样，就会非常容易地回答是否“所有的 X 都具有 Y 的特性”这一询问。但是，如果 x 和 y 具有同样程度的图形的特性，尤其是 y 的图形特性比 x 的图形特性强烈，那么，年龄较大的受试者就会非常强烈地倾向于将“所有的 X 都具有 y 的特征?”转变为“所有的 X 都是 Y?”，然后，对于他来说，后一个问题的意思是指“所有的 X 是所有的 Y?”还是指“所有的 X 是部分的 Y?”就变得至关重要了。

这三个假设总合起来将进而解释表 I 和表 Ia 的一些表面上的矛盾。换言之，它们将说明这么一个事实，即一个特定的受试者有时能正确地回答一个问题，而同样形式的

另一些问题却易于导致某种并非偶然的错误。不过，我们还得了解一下，对于构成儿童之答复的这种格式所做的质的分析，是否为这些假设提供了依据。

(1) 在图形集合的水平上，我们可以认为，“所有的 X 都具有 y 特性”这个问题在原理方面是相对容易些的。但对于它的解决办法的正确性，则依赖于能够把 X 想象为一个图形集合对象的程度，因为正是对于这么一个对象才做出了如下的判断：“所有的 X”等同于“X 的整体”。现在，为了使集合对象的结构变得困难些，我们对实验作了精心的设计。因此我们便可以发现第Ⅰ阶段所特有的两种趋势，这两者都与逻辑“主语”的数量限定，而不是与第Ⅱ阶段的谓语的数量限定有关。第一种趋势是，当逻辑主语概指放在儿童面前的那些成分的多数(那些蓝色圆形)时，他们便发现问题比较容易回答；散布在蓝色圆形之间的那少数的红色和蓝色正方形，便不太容易直观地看作是一些集合对象。这解释了为什么五岁时 CB(所有的圆形都是蓝色的？其百分比是 67－82)比 SR(所有的正方形都是红色的？其百分比是 66－70)容易些的原因，而且它更能说明 BC(所有蓝颜色的都是圆形？其百分比为 69－79)总是比 RS(所有红颜色的都是正方形？其百分比为 54—57)要容易些的道理。第二种趋势是这么一个事实——年幼儿童常常把论据指向整个的集合、绝对意义上的“所有的”，而不是界说为“所有的红颜色的”或“所有的正方形”等等那些子集。这种趋势有时(但绝不是经常)是如此之强烈，以致受试者甚至不能选择放在面前的、他重新摆出那一排所需要的那些盒子。更为经常的是，儿童们把“所有的”看作是那一整排，而不是将它限制为根据提到的某种特性来加以界说的那些成分。皮尔的例子说明了第一种趋势，他要了装红色圆形和蓝色圆形的盒子来重新摆出由蓝色圆形和红色正方形组成的那一排；而铁恩则要了红色的正方形和蓝色的正方形。第二个困难再次出现在皮尔的反应之中；他不愿承认所有圆的东西都是蓝色的，因为他所看到的是一个包括有红色正方形的图形集合。后来，当第Ⅱ组显示出来时，他坚定地否认所有的圆形都是蓝色的，其理由是“只有两个”(在一个由七个成分组成的集合中，二是没有资格同数量词“所有的”相提并论的!)。结果向我们表明，他清楚地意识到红色的物体是正方形。但是，当作为一个整体的集合包含有“蓝色的和红色的物体”时，他仍然坚持并非所有的圆形都是蓝色的。铁恩是另一个这样的例子，当红色正方形散布在蓝色圆形之中时，他并不认为“所有的正方形都是红色的”。依雷开始时也有同样的错误，而在提示他“所有的蓝颜色的都是圆的”时，他没有表示异议，尽管他刚才还观察到这个集合包括有一个蓝色正方形。总而言之，第Ⅰ阶段所出现的错误，与其说是由于确定一个图形集合之特性方面的困难，还不如说是因为由一排杂乱的成分所构成的一个对象所造成的混乱。现在，读者就可以对我们为什么不能从 3 岁和 4 岁儿童那儿获得实验结果这一点做出正确评价了：他们就是不能区分我们想要谈论的那些集合。

(2) 第Ⅱ阶段发生的成功与失败的格局是非常不同的。主要特征是，具有“所有的 A 都是 B?”这种形式的问题同具有“所有的 B 都是 A?”(要记住 $A<B$)这种形式的问

题是不相关联的。这种发展既有积极的一面，也有消极的一面：(a)积极的一面表现在，当问题采用第二种形式时，对于数量词"所有的"的运用有了改善。将 A 和 A' 这两个子集(它们的区别特性为 a 和 a')显示给受试者；这两个子集总合起来形成集合 B，所提的问题是："所有的 B 都具有特性 a？"或"所有的 B 都是 A？"在第Ⅱ阶段，他多半做出否定的答复，而且他提出的理由是，有些是 A(或 a')。(b)消极的一面是，应该适当地做出肯定答复的那些以"所有的 A 都具有特性 b？"这种形式出现的问题，实际上也做出了否定的答复——而且受试者再次通过提到也具有特性 b 的那些 A' 来解释他的回答。

我们将要考虑这两个方面同时出现时可能具有的含义，不过在此之前，我们先要分别地检查一下这两个方面：

(a)就所利用的材料而言，我们可以把 B 作为正方形，同时把 a 作为红色，b 作为蓝色，在这种情况下，A＝红色正方形，A'＝蓝色正方形；或者，也可以把 B 作为蓝色圆形。在这种情况下，A＝那些圆的蓝色的东西，A'＝那些四方的蓝色的东西。现在，是否所有的正方形(B)都是红色的(a)、或是否所有的蓝色图形(B)都是圆的(a)这个问题常常引出一个正确的否定答复(见维尔和杰克；当 B 是正方形时，艾里、伯尔和杜普比较突出；当 B 是蓝色的圆形时，巴尔、贝尔、克尔和杜普比较突出)。

然而，不正确的答复也绝不是个别的。存在着两个造成错误的根源。第一个根源要追溯到第Ⅰ阶段的图形集合。这样，虽然杰克已经 5 岁 8 个月，但是，当要他承认第Ⅰ组(只有红色正方形和蓝色圆形)里的正方形都是红颜色的时候，他认为这是不适当的。因为他把这些正方形看作是那个包括有一些蓝色圆形的整个图形的一个部分。至于第Ⅱ组，西益承认所有的正方形都是红色的，但他还说"也有两个蓝色正方形"。他的答复的意思只能是，被看作是一个"整体"的那套正方形具有两种颜色，以致每一种颜色都可以说是属于这个"整体"的；虽然这个"整体"所具有的内在的凝聚力小于一个真正的集合对象，但它却多于非图形集合。

第二种类型的错误出现得更为经常，而且也更加有趣：它是由于"所有的 B 都具有 a 的特性"与"所有的 A 都具有 b 的特性"这两种表达方式的混淆而引起的，而这两种表达方式被看作是相等的。例如，贝尔和西益承认"所有的蓝颜色的都是圆的"，因为他们将这等同于"所有的圆形都是蓝色的"，这种反应相当普遍。这种混淆是由于仅仅缺乏注意还是由于存在着逻辑理解的困难(当连续询问几个这种涉及主语和宾语变化或置换的问题时，甚至成人也容易被搞糊涂)？如果说存在着一种逻辑的困难，那么，这就是类包含的困难。要区分"所有的 B 都具有 a 的特性"和"所有的 A 都具有 b 的特性"就需要认识到，"所有的 B 乃是部分的 A"同"所有的 A 乃是部分的 B"是不一致的。这与 $B<A$ 和 $A<B$ 两者不一致是同样的情况。将这两者混淆起来，就是将其中的一个归并为另一个："所有的 B 是所有的 A"(因此 $B=A$，用等同来代替包含)。不能否认，缺乏注意在这里可能起了作用，但是，一个决定性的理由使我们相信，这种类型的回答(它极其普通)在很大程度上是由于等同代替了包含的倾向。一般说来，将"所有的 B 都具

有 a 的特性”转化为“所有的 A 都具有 b 的特性”的那些受试者，同样也将“所有的 A 都具有 b 的特性”转化为“所有的 A 是所有的 B”。这将引起我们对于第二个方面的讨论。

(b)这里还是 A＝圆形，B＝蓝色的物体(b＝蓝色)，A'＝蓝色正方形；或者换一下，A＝红色正方形，B＝正方形，A'＝蓝色正方形。但这一次的问题是，是否所有的 A 都具有 b 的特性(或是否所有的 A 都是 B)。现在，答复便更加经常地出现错误，而且论证的基础往往在本质上也是相同的：所有的 A 之所以不具有 b 的特性(所有的 A 不是 B)，是因为 A' 也具有 b 的特性(或 A' 也是 B)。换言之，他不能断言“所有的”圆形都是蓝色的，因为蓝色正方形(或有些正方形)也是蓝颜色的！在这种类型的回答中，“所有的”和“有些”方面的困难最为明显，它突出了第Ⅱ阶段儿童的思维过程；而且，当问题的形式是“所有的 B 都是 A?”时，同样这些儿童却相当经常地做出了正确的回答。

我们可以从“所有的圆形都是蓝色的?”这个问题开始。在这里，我们的大多数受试者都是相当明确的。所以巴尔否认所有的圆形都是蓝色的，因为有蓝色的“正方形和圆形”。维尔开始时有些犹豫不决，但随后就拒绝“所有的”，“因为也有蓝色正方形”。贝尔用了同样的措辞：“也有蓝色正方形。”尽管杰克最后的回答不错，但他的思维水平要略微低一些，不能完全地把蓝色圆形同作为一个整体的那一排分离开来。艾里的论证是常见的：之所以不能说“所有的圆形都是蓝色的”，是因为“有两个蓝色正方形”！费伯也是如此：“不，因为还有正方形。”克尔说，“不，因为有六个蓝色圆形和两个蓝色正方形”。西益是我们引证的唯一接受所有的圆形都是蓝颜色的儿童，但他还是认为反过来(即所有的蓝颜色的都是圆形)也是对的。虽然他的回答与其他儿童的回答相对立，但推理的基础却是完全相同的。

如果仅仅拿出六至八个蓝色圆形，那么每一个受试者都能相当清楚地意识到它们都是蓝色的圆形，而且在要求他重新摆出这一排时，也能够正确地完成它。但他们中的每一个人都坚持认为，不是所有的圆形都是蓝色的——因为它们同两个蓝色正方形混杂在一起。我们肯定会得出这样的结论，即在儿童的思想中，说“所有的圆形都是蓝色的”就等于说“所有的圆形就是所有的蓝色的图形”，而不是“所有的圆形乃是有些蓝色的图形”。这就解释了西益为什么是绝无仅有的那个告诉我们所有的圆形都是蓝色的受试者的原因：他的这种承认只不过是由于一个暂时的错误——即相信所有蓝色的图形都是圆的——所造成的结果。当我们继而询问“所有的红色图形都是正方形?”时，西益便根据通常的理由——也有两个蓝色正方形——来否认这一点。

看起来，好像儿童的思维受到了对称性需要的制约：谓语“蓝色的”之外延必须与主语“圆的”之外延相同。但这里的对称性不能从互反的意义上——“即所有的圆形都是蓝色的”＝“所有蓝色的都是圆形”——来理解。另外一些研究已经显示，在这个水平上，儿童在处理涉及真正的互反判断方面还有相当大的困难(A 至 B 的距离可以被认为不同于 B 至 A 的距离；或者，儿童可能承认 A 在 B 的左边而不承认 B 在 A 的右边；或者，他知道某人是他的兄弟，但又拒绝承认他的兄弟也有一个兄弟——他自己)。这

里所讲的对称性是一个比较原始的概念，而且是与图形的对称密切相关的。我们的受试者所做的是，将“所有的 B 都具有 a 的特性”这种表达方式同化到“所有的 A 都具有 b 的特性”这种表达方式之中。换言之，他们是在用恒等式（$A=B$）来代替我们在前面所说的（2a）那个类包含（$A>B$ 或 $B>A$）。在某种程度上讲，我们应该期待他们的回答是自相矛盾的，因为他们一方面可能承认“所有的 B 都具有 a 的特性”，将这个问题同化到“所有的 A 都具有 b 的特性”中去；而另一方面他们又可能否认所有的 A 都具有 b 的特性，注意到了所有的 A 并不是所有的 B——这恰恰就是发生在西益的例子中的情况。然而，我们还得了解一下，BA 形式的问题在第Ⅱ阶段为什么要比 AB 形式的问题困难小些（见表Ⅰ和表Ⅰa）。在那里，即使对于比较容易的问题也做出了错误的回答。我们一定会作如此的推论：“所有蓝色的东西都是圆的”这一陈述被看作等同于“所有圆的东西都是蓝色的”。所做出的最实际的判断乃是那些重复的判断[如“所有的蓝色圆形都是圆的（或蓝色的）”]，其原因是，这些年幼的受试者还不能想象由“蓝色的东西”或“圆形”所组成的那些完整的集合。但在第Ⅱ阶段，他们的确转而注意这些完整的集合了，而这将帮助他们理解“所有的蓝颜色的东西都是圆的”乃是错误的。不过他们还是拒绝承认“所有的圆形的东西都是蓝色的”这一互反的陈述是真实的。在他们看来，这就等于说“所有的圆的东西是所有的蓝色的东西”，而这显然是错误的。所以，正确的解释很可能是，在第Ⅱ阶段，儿童们把数量词“所有的”扩大到这个句子的逻辑谓语以及它的逻辑主语中去了。

这个解释得到了对于 RS（所有的红色的东西都是正方形？）这个问题所做回答的进一步证实。几乎所有与此问题有关的受试者都立即认识到，“所有的正方形是红色的”是错误的，因为有两个或三个正方形是蓝色的。不过，在八个受试者中，有五个儿童否认所有红色的成分是正方形，尽管他们很清楚地知道没有红色的圆形（他们不仅这么说，而且还通过重新摆出那一排来证实这一点）。其原因还是，如果不能证明“所有的红色的成分构成了所有的正方形”（这是儿童们对于“所有的红色的成分都是正方形”所做的修改，当有两个或三个正方形是蓝色的时，这个不适当的转换就是错误的），他们就不能承认“所有红色的成分都是正方形”。西益否认所有的红色的东西都是正方形，并提出了他的理由：“不，因为也有蓝色正方形。”伯尔、费伯、克尔和杜普的回答同样也很明确。只有巴尔、维尔和艾里做出了正确的回答，而且巴尔提出的理由是：“……因为只有正方形（它们是红颜色的）。”

事实是非常清楚的：如果 $B=A+A'$，那么儿童们就比较容易地做出如下答复——所有的 B 都是 A 是错误的，而对于所有的 A 都是 B 是正确的却较难认识。我们的解释是，他们对于谓语的数量限定有错误：他们不是把“所有的 A 都是 B？”看作是“所有的 A 乃是部分的 B？”，而是将它看作“所有的 A 是所有的 B？”。现在我们需要提出的问题是：其原因何在？

关于这个问题的第一点是，即使对“所有的 B 都是 A？”这个问题正确地给予否定

的答复，它也不意指受试者已经避免了他对之进行推理的那种不适当的转换。搞清这一点是重要的。虽然他可能非常正确地说："不，所有的正方形不都是红色的，因为有些是蓝的"，但他还会同时对他自己说，"我得看看是否所有的正方形都是所有的红色的东西"（或"所有的蓝色的东西都是圆形吗？"）。虽然他是在确定"红色的东西"和"正方形"（或"蓝色的东西"和"圆形"）这两个集合是否一致，但他做出的回答仍然还是正确的。

事实上，否认"所有的 B 都是 A"同承认"所有的 A 都是 B"这两者的困难是完全相同的。但是，既然我们不能这样，那么就得承认，"所有的 B 是所有的 A"而不是"所有的 B 乃是部分的 A"仍然将造成正确的答复。受试者能够看清就在他面前的那些 A（蓝色正方形），所以他清楚地知道，B 并不与 A 一致。这可能就是他给予正确答复的原因。另一方面，也可能有这样的情况——他已经确定 B 并不与 A 的任何子集相一致，这还是正确的答复，其理由也是正确的。就实验本身来看，这一点并不明确。

尽管解决"所有的 B 都是 A？"的儿童事实上多于解决"所有的 A 都是 B？"的儿童，但我们还是要相当审慎地假定，这两个问题的难度从根本上来说是一样的。这远非逻辑学的通词；它使我们触及这个心理学问题的实质，当我们有了充分的证据来承认受试者确实是理解了类包含的关系时，这个假设就将得到确定。假定在涉及"所有的 B 都是 A？"这个问题方面，谓语的（不言而喻）的数量限定是不正确的，我们便推断儿童并没有理解类包含的关系。然而，他的答复是正确的，因为他需要做的全部事情只是了解 A 和 B 这两个集合是否一致。这比设想他的谓语的数量限定是正确的（即"所有的 B 既不是所有的 A 也不是部分的 A"）要有意义得多，因为基于这个假设，一个儿童在某种情况下理解了类包含，而在另一种同样简单的情况下（在回答问题 AB——所有的 A 都是 B？时）却不能掌握它。

这使我们达到了最重要的一点：为什么会有这种对于谓语的错误的数量限定？为什么"所有的 A 是（有些）B"这一陈述被理解为"所有的 A 是所有的 B"？在这个非常普遍的反应和包含问题之间有什么关系？

在第二章中我们看到，第Ⅱ阶段的儿童能够区分一个集合（$=B$），并能认识一些潜在的子集（A 和 A'）。他们把后者看作是相当于一个直观对象的那种东西的一些"片断"。（确实，B 在第Ⅱ阶段并不是像在第一阶段那样的一个图形的整体；但它仍然不是一个运算的"类别"。它是一个准对象，因为虽然它被看作为一个集合，但这种认识仍然是直观的。）然而，这些儿童却不认为 A 和 A'"包含"在 B 之中。差别在于，虽然儿童将一个集合的两个子集 A 和 A' 区分开来，但他还是能够形成 $B=A+A'$ 这整个集合的印象。如果这种印象仅仅是想象的或看见的，那么它可能就是前运算的。只有当他具有了逆反的含义 $A=B-A'$ 时，它才是运算的。但是，B 对于 A 的包含暗指了这个逆运算：一旦儿童将 B 划分为它的子类 A 和 A'，他就不能认识 A 乃是 B 的一个部分，除非他懂得 $A=B-A'$。这种理解比形式为 $B=A+A'$ 这个简单的联合要困难得多。要害在于，一旦 A（在实际上或思想上）同 B 分离开来，B 就不再作为一个可以看得见的集合

而存在。它仅仅作为一个抽象的类别而存在。因为从感知的角度来说，它已经被分离了。所以，要想在 A 和 B 之间建立一种关系，儿童必须不理会 B 的感知方面的分离，并按照其抽象的不变性来进行推理。

现在我们便明白了在第Ⅱ阶段谓语的数量限定之所以容易出现错误的原因。要承认"所有的 A 都是 B"这一陈述等同于"所有的 A 乃是有些 B"，就是要根据包含的关系来进行推理：$A=B-A'$。反过来说，把"所有的 A 都是 B"看作是"所有的 A 是所有的 B"就是根据一个纯粹的等式 $A=B$ 来进行推理的。这就排除了对于类包含之可能性的考虑。[不用说，年幼儿童根本就没有逻辑学家的那些辨别力，对于他们来说，相等本身是可以缩简为交互包含的：$(A \geqslant B)+(B \geqslant A)=(A=B)$。]换言之，第Ⅱ阶段谓语的数量限定方面的错误来自于包含之掌握方面的困难。根本的问题是完全相同的。

我们在前面看到，当问题采用"所有的 B 都是 A?"这种形式时，谓语的数量限定是不相干的。受试者只要检查 B 这个集合就行，而且他看到 B 有两个部分，$B=A+A'$。逆运算是不必要的。换言之，正确的答复不一定意味着类包含的出现。这种形式的问题在第二阶段通常是相当容易解决的，主要的危险在于，儿童将"所有的 B 都具有 a 的特性?"这个问题颠倒过来，并把它看作是"所有的 A 都具有 b 的特性"?

我们可以在一定的程度上将这个论证和理由扩展如下：不管问题的形式如何（它可以是 AB，所有的 A 都具有 b 的特性；也可以是 BA，所有的 B 都具有 a 的特性），年幼的受试者（他们是 5 岁）将把它颠倒过来。在颠倒过来之后，他们便根据他们的所见，不正确地回答了这个问题——他们的全部错误仅仅是由于这种颠倒。在 6 岁至 9 岁期间，加以颠倒的趋势减弱。因为儿童们开始掌握类包含了，因此他们的正确回答也就比较多些。表 I 和表 Ia 的多数结果都可以根据这个简化了的假设而得到说明。论证仍然依据于这么一个事实：即尽管无须提及数量的限定，但包含还是一种难以掌握的关系。

然而，除非一切都由于"不注意"而得到解释，否则这个假设便没说明那些能够正确地辨认感知材料的年幼受试者为什么将提问的那些问题颠倒过来的原因；也就是说，它还没有说明他们之所以对于包含不敏感的原因。首先，不知道 $A<B$ 这个包含就意味着难以限定 A 对于 B 的数量关系，反过来也是一样，即难以限定谓语的数量关系。此外，将 AB 类型的问题同 BA 类型的问题相混淆的趋势就是将 A 等同于 B 的趋势，这又意味着将"所有的 A 都是 B?"这样的问题转换为"所有的 A 是所有的 B?"（而且将这个相对立的问题颠倒过来也同样是正确的）。① 换言之，我们所提出的那个假设的简化只具有一种表面的简易性。谓语之数量限定的困难并没有被回避，而只是掩饰了起来。

(3) 刚才描述的那种现象只是第Ⅱ阶段的一个方面。它可能由于感知的或图形的因素而得到加强；或者，这些因素也可能消除这种现象。一般说来，受试者的确倾向于将"所有的 A 都具有 b 的特性"转换成"所有的 A 是所有的 B"；不过，依据决定 A 和 B

---

① 参见第 3 节中说明"有些"之相对用法的例子。格拉的例子特别明显而富有启发性。

的那些感性特征 a 和 b 的情况，受试者的这种倾向的强弱多少也有些不同。这些特性可能非常强烈，以致能形成一个与 A 的集合相并列的 B 的集合；或者，这些特性也可能微弱得使它不可能成为一个集合。对于儿童来说，除非“所有的蓝色的图形”这个集合与“所有的圆形”的集合同样地突出，否则他就不会把“所有的圆形都是蓝色的”看成“所有的圆形是所有的蓝色的图形”。只要看一看表Ⅰ和表Ⅰa，我们就会发现，情况通常并非如此。我们从最后两栏中发现，对 $CB+SR$ 所做正确回答的平均百分比几乎都高于对 $BC+RS$ 的平均百分比。这等于说，对于儿童来讲，根据形状来形成一个非图形集合比根据颜色来形成一个非图形集合要容易些。(即使这些集合是非图形的，但还是存在着一个图形的因素。它们是非图形的，因为受试者不再是在刻板地构造图案和复杂对象以赋予这些集合以一定的意义。不过，某种决定因素能够使形成一个想象的集合相对地容易些，这是一个很重要的因素，即使这个集合仅仅是在受试者的头脑中形成的，情况也是如此。)

在讨论下一个实验时我们还要回到这个因素上来，在下一个实验中，实际的集合得根据颜色和重量来构成，而且，潜在的想象中的对比也要强烈得多。

2. 运用于排除试验的“所有的”和“有些”

虽然前面那些实验同分类的问题是有关的，但它们也有着显而易见的缺点——对于儿童来说，它们是没有趣味或没有用处的。让年幼儿童花费二十或三十分钟来看这些小圆形和正方形并且说它们是否都是红颜色的或蓝颜色的，这是使他们感到乏味的事情。即使是采用游戏的形式，5—6 岁的年幼儿童也很难全神贯注。我们认为，为了检查这些结果，必须设计出一个实验，在这个实验中，“所有的”和“有些”要具有一种功能的意义。我们将要加以描绘的这个实验并不直接关系到纯粹的分类，但为了达到一个令人满意的证明，那些变量却需要用“所有的”和“有些”来加以限定。

设计该实验的基本想法是这样的：要求受试者发现某一事件的原因。为了解决这个问题，他就要对这些变量作一个自发的分类，利用一些总的类别来做“所有的 x 造成了一定的结果 y”这样的陈述，还要利用一些子类来做“有些(但不是所有的)x 造成了 y”这样的陈述。

如果一个受试者想要说明 y 结果是由 x 造成的，他就得运用“所有的”。这个“所有的”同“有些”的差别可能是含蓄的，而不是明显的。但是，为了证实 y 不是由 x 所造成，他就必须运用子类。他有两个可能的方法来解决这个问题，其中一个方法的基础是(非 x)(y)的结合；而另一方法则基于(x)(非 y)的结合。他能够否证“所有的 x 伴随于 y”这一陈述，其办法是说明存在着“有些”不伴随于 y 的 x。同样地，他又可以否证“所有的 y 与 x 相配”，其办法是说明“有些”y 不与 x 相配。只有在形式推理的水平上，儿

童才能进行命题运算，而且只有在那时之后，他们才能理解所有可能的结合。我们将要描述的这种实验并不要求进行形式推理。但它确实需要适当地运用“所有的”和“有些”，因为它依赖于物体之各种类别的包含和交叉。在形式运算的水平上，主体能够预见各种各样的结合，而且他将运用命题运算来解决这个问题。虽然7岁或8岁儿童的解决办法的基础是一些明确的类别之包含和交叉，但它们确实需要熟练地掌握“所有的”和“有些”。

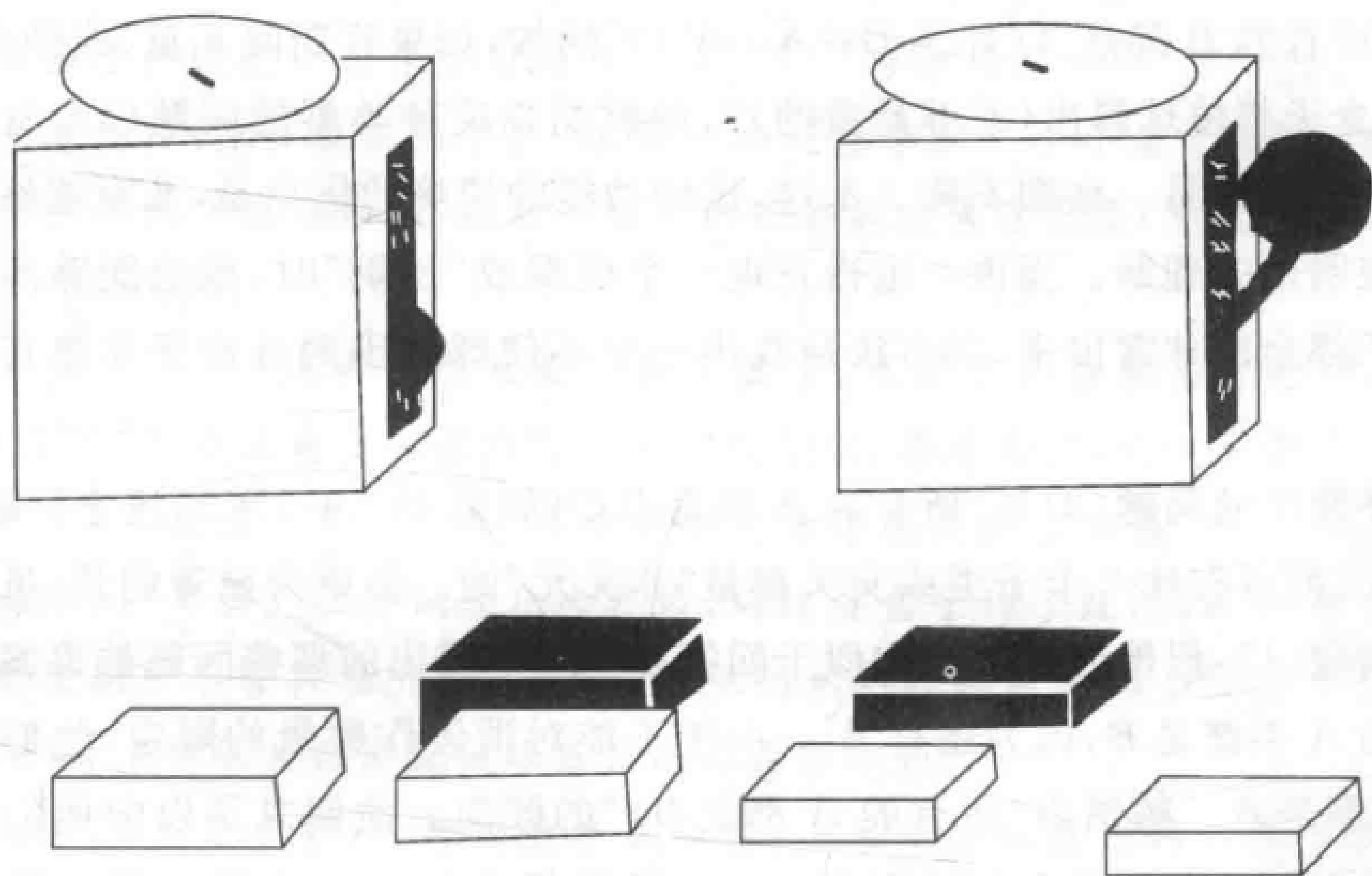


图8

我们选择的器材①是一个类似于用来称出信件重量的普通的天平，不过我们加上了一个球形的平衡器。这个平衡器藏在一个一边有狭槽的盒子之内。此外，还有一些准备放到这个天平上的盒子。这些盒子有两种重量。重的盒子能使那只球从狭槽内露出来，而轻的那种则不能。向儿童显示这个器材以及由不同颜色、体积、重量的盒子组成的一个集合。（选择体积的原则是将“体积—重量错觉”对于估计重量的影响减少到最低限度。）要求受试者预言这些盒子中哪个盒子将使那只球从狭槽中露出来，然后再以此为基础将盒子分类。并要求讲出每一个分类的理由。这个实验将视需要而重复进行。② 在结束时，要求他证实他的发现（重量是一个决定因素，而颜色和大小则不是）。最后，我们提出“所有的红盒子都是重的?”这样的问题，以引进“所有的”和“有些”并使它们同他自己构成的类别和子类发生联系。

第Ⅰ分节讨论利用颜色、重量和体积方面8种结合的82名受试者的结果。为了使这些结果能够同第一节中的那些结果相比较，我们进行了第二个实验（另外增加的30

① 见图8。

② 分类的结果是将这些盒子划分为轻的和重的（这两个类别中的成分都是同样的重量）。在实验结束并询问儿童时，这些盒子都混杂在一起，但仍然放在儿童的面前。所以它是按照轻的盒子和重的盒子来分类的。在这两个类别中，所有的盒子在重量上是完全相同的。

名受试者)，在这个实验中，任何时候都仅涉及两个因素(即颜色和重量或体积和重量)，而且往往缺掉一个子类(例如重盒子和轻盒子都是红颜色的，但蓝盒子却都是轻的)。这个实验将在第Ⅱ分节中加以描绘。

Ⅰ. 主体实验涉及 8 个可能的子类(重或轻×红或蓝×小或大)。这个问题的解决办法采取“重”等于“使球露出”的形式，另一个形式是“轻”等于“不使球露出”。

从“所有的”和“有些的”观点来看，我们又遇到了与在第一节中遇到的完全一样的问题(1)：“所有的 B 都是 A(如果 $B=A+A'$)?”例如，如果我们问儿童(或他自问)是否“所有的蓝盒子都使球露出(或都是重的)”，他就面临这种类型的问题(1)：有些蓝盒子确实能使球露出而另一些则不能。不过，这种功能的情境的优点是，儿童能够通过动作及言词来表明他的理解。当他一定得发现一个证据或“反例”时，他也能够演示并非所有的蓝盒子都会使球露出来，其方法是找出一个不使球露出的蓝盒子并把它放到天平上。

第二种类型的问题(2)是“所有的 A 都是 B?”(如果 $B=A+A'$)，这个问题(2)不能直接提出，因为所有这 8 个子类或交叉都是“非无元”的。但更为显著的是，虽然儿童们往往面临问题(1)，但他们经常将类似于回答第一节中提出的那些问题的答案用于问题(2)：所有的 A 不都是 B，因为还有 A'。由于不能对谓语作数量的限定，他们有一种把“所有的 B 都是 A?”颠倒为“所有的 A 都是 B?”的倾向。他们总是以向他们自己提出“所有的 A 是所有的 B?”这个问题来结束。最初提出的是一个属于第一种类型的问题：“所有的 B 都是 A?”如：“所有的蓝盒子都使球露出?”我们可能得到的答复是“不，因为有些红盒子使球露出”。这就是说，它援引了 B 的存在(当然这并不能说明任何问题)，而不是 A'(轻的蓝盒子)的存在。不过，在这种类型之答复的背后的理由和对于第一节中出现的问题(2)所犯的错误是相当的。在这里，即使问题是属于第一种类型的，但这种错误还是又出现了。这些结果尤其具有说服力，因为尽管受试者有着解决具体问题的动机是一个事实，但我们仍然发现了一些错误的论证，它们显示了问题的颠倒和对谓语的不正确的数量限定。

还有一个属于第三种类型的问题，它仅仅在目前这个实验中提出来，在第一节中我们并没有提到过它。如果询问受试者是否所有的重盒子都使球露出，或者，如果他自问同样的问题以解决这个难题，那么这个问题的逻辑形式便是：“所有的 B 是所有的 A?”在这个例子中，这两个范畴实际上是相等的，因为所有的重盒子实际上都是使球露出的盒子。由于它是一种相等而不是包含的关系，所以这个问题就比另一些问题容易些。一般说来，重量的问题不是在早期解决的，其原因是儿童这时还不能把重量和体积分离开来。在这里，这个困难由于下列事实而得到了解决——存在着“重盒子”等同于“使球露出”这一个简单的关系。不过，即使是在这种情形下，当受试者能够构造一个由“所有的”重盒子组成的类别之前，这个问题还是不能解决。换言之，只有到了第Ⅱ阶段时它才得到解决，而在第Ⅰ阶段始终是无法办到的。

所以,在我们讨论第Ⅱ阶段(这是我们在这一章中比较直接有关的问题)的情况之前,先看看几个第Ⅰ阶段的例子还是很有趣味的。

在第Ⅰ阶段,尽管出现一些例外的情况,但儿童们还是倾向于认为体积和颜色能够成为决定性的因素。即使在例外的情况中,他们也没有排除数量词"所有的",所以他们便不能发现重量才是唯一的因素。

艾罗(4岁) 拒绝作任何预言,但他确实试出了几个盒子,这使他集合了几个小的重盒子:"这些小盒子使球露出来。"——"为什么?"——"不知道。"——"看看是不是真的?"(他搞成了两堆;一堆由一些大盒子和一个小盒子组成,第二堆是剩下的那些。然后他预言:)"在第一堆中的那些能使球露出来(他试了一个大而轻的盒子)。不,"等等。

奇莉(5岁) 试了一些大盒子和小盒子,也试了一些轻盒子和重盒子,并且说,前面的"那些不能使球露出"。——"试试它,再看看。"——(她拿了一个小而重的盒子。)"它露出来了。"——"告诉我哪些盒子能使球露出来。"——(她指了指那些大盒子):"那些。"在再试过几次之后,对这些盒子作了改组;我们要求奇莉搞一个新的类别。尽管存在所有这些例外,她仍然继续她原先那个大盒子和小盒子的两分法,并坚持认为前者能使球露出而后者则不能。

雷卜(5岁2个月) 把盒子分成两类:一些是使球露出的,"因为它们大",还有一些是不能使球露出的,"因为它们稍微小些"。——"看看这对不对。"——(他把一个大而轻的盒子放到天平上。)"哦,能使球露出来的是那些(小盒子),而不是那些(大盒子)。"他拿起一个小而重的盒子并在手上掂了一下重量:"又小又重,重得不多。"他把它放到天平上去试,果然,球露出来了。但雷卜否认它:"它没有使球露出很多。(他倒回到他原先的看法:)这些(小盒子)不使球露出来,那些(大盒子)能。"——"你能让我看看这对不对吗?"——(他连续试了两个小而重的盒子,然后坐下来不说话了。)——"有个孩子告诉我,能使球露出来的是大盒子。对吗?"——"说大盒子不对。"——"你能向我证明这不对吗?"——"能(他将一个大而重的盒子放到了天平上)。我说小盒子是对的,他说大盒子是对的。他说大盒子相当对,我也是,我说小盒子是对的!"然后说:"他说那个(大而重的盒子)不对。"

凯特(5岁6个月) 没有做出预言。她将每个盒子都试了一下并正确地分成了两类。她解释说:"用小盒子,球就不露出来,只有用大盒子它才露出来。"你能让我看看你对不对吗?——(她做的实验与她的陈述矛盾,而她的分类却是正确的。)——"为什么这些能使球露出来?"——"因为有大盒子和小盒子。"——"那么,为什么这些不能使它露出来呢?"——"因为这里有大盒子和小盒子。"

布尔(6岁6个月) 也是根据体积给予同样的答复。"你能肯定是这样的吗?"——"是的。"——"试试看。"——"(一个小而重的盒子)不。(一个大而轻的盒子)它不重!"但他还是回到体积的因素。"有个孩子告诉我,红盒子能使球露出来。

他说得对不对?”——“有些盒子他说得对,有些说得不对。”——“他说了些什么?”——“他说蓝盒子不能使它露出来,红的能。”——“你能让我看看他是对的吗?”——(一个大而重的红盒子。)“是的,他是对的。他说蓝盒子是错的。”——“有个孩子说大盒子能使球露出来,对吗?”——“不,也有一些不能使它露出来的大盒子。”——“那么,他对还是不对?”——“对的。”——“你能肯定?”——“不太正确,因为有一些大盒子不能使它露出来。”

上述所有的例子都属于第Ⅰ阶段。它们说明了儿童所经验到的在“所有的”概念之逐渐形成(即抽取一个类别中所有成分之共同特性)方面的困难。第一章中也曾出现过同样的困难,在那里,内涵和外延之所以不能协调,就是由于不能抽取这样的特性。于是我们所检查的那些年幼儿童始终是在构造一些(我们称之为)图形的集合,而不是把物体组合成类别。读者肯定还记得第一节中描述过的情况:在第Ⅰ阶段,儿童在回答有关仅仅由红色正方形和蓝色圆形组成的那一排的问题时经常表现出混乱。由于那两种实验器材是混杂在一起的,所以他们就不能抽取“所有的”正方形或“所有的”圆形等类别。这里又是这样,第1种类型的问题是很难的——也就是说,儿童们还不能肯定“并非所有的 B 都是 A”。我们还要补充说,“所有的”重盒子这个正确的类别的构造从任何意义上讲都是比较困难的,因为其标准是重量。总之,第Ⅰ阶段之所以出现那些问题,关键的原因是不能抽取。

我们注意到,除了先把每一个盒子都称一下之外,受试者都不能对盒子作正确的分类。他们没有发现,在试过一次或两次之后,重量才是值得考虑的因素。布尔是唯一最接近于正确标准的受试者,但也只有一个短暂的时刻(“因为它不重”),而且他甚至把“重”同化于“大”,把“轻”同化于“小”。一旦每一个盒子都试验过之后,常常就能做出正确的分类。不过,在这些受试者中,没有一个能够系统地提出类别的标准,也就是说,没有一个能够描述他包含在这两个集合中所有成分的共同特性(尽管对于 A' 集合的特性所做的界说仅仅是 A 集合特性之命题的否定)。

让我们来研究一下这些例子。艾罗对于他从开始那几次的试验中所获得的做了如下的概括:“小盒子能使球露出来。”然后他分出了两堆,在其中的一堆大盒子中他加上了一个小盒子。奇莉也有同样的想法,而且很镇定地否认了那些例外。雷卜认为,那种大盒子能使球露出来,同时小盒子也能使球露出来的说法是对的。他始终是在使用“所有的”这个词,而不是使用“有些”。换言之,他不能看出其中的矛盾;他把同一个效果归咎于两个相当对立的原因。在凯特的答复中我们看到了同样的推理过程;A 集合中的那些盒子之所以能使球露出,是“因为有一些大盒子和小盒子”,而且 A' 集合中的那些盒子之所以不能使球露出也是因为同样的原因:“有一些小盒子和大盒子”(第二句中次序的颠倒是最有启发性的!)。甚至布尔的论证方法也是相同的,尽管他实际上曾一度提到过重量。

将这些儿童说的话加以转换,使之符合我们自己的逻辑结构,这么做是很有诱惑力

的，而且，我们可以通过一个或两个不明显的替换来很好地完成它。下列陈述是完全正确的："有些大盒子能使球露出，有些小盒子也能使球露出；有些大盒子不能使球露出，也有些不能使球露出的小盒子。"如果儿童们做出这样的表达，那么他们的陈述便仅仅表明他们还没有把重量因素孤立出来（我们已经知道将重量同体积分离的困难）。他们的陈述可能是"重复的"，但它们却不矛盾。但事情并不这么简单，或者说，我们不能说明在第Ⅱ阶段时问题(2)（"所有的 A 都是 B?"）所造成的那些困难。首先，我们得记住，第Ⅰ阶段的儿童还不能作明确的分类，甚至也不能构造非图形的集合。

事实上，不能发现正确的规律、否定例外情况的趋势以及使用两个相互矛盾的证据，都表明了在区分"所有的"和"有些"方面的系统的困难。从一个比较深刻的水平来讲，这乃是一个分化集合之外延及其内涵的问题。当一个大盒子使球露出时，儿童便推断出一个涉及体积的因果关系。于是体积便成了一个特征，它将要合并到那个"使球露出的盒子的"集合的"内涵"中去。现在，它便成了由这个集合所构成的那个集合对象的一个特性，而不是它的所有单个成分共同具有的特性，这个特性所处的水平不同于"所有的"和"有些"；它属于纯粹内涵的集合，而这种集合并不是一个类别或单个成分的组合，而是这些单个成分要合并进去的聚集。如果另外一些属于这同一聚集的盒子不能证实体积和球的出现之间的因果关系，那么也仅仅影响到这些例外的盒子，而不是这个集合本身。我们相信，在我们已经引用的这些答复的背后，是存在着这样的推理的。

这些反应和第Ⅱ阶段、第Ⅲ阶段反应有如下的区别：在逻辑分类（阶段Ⅲ）的水平上，人们是不会选择一个特性来构成一个类别的内涵的，除非它适用于这个类别"所有的"成分，而且"所有的"本身也由这种特性来决定。虽然内涵和外延被分化开来了，但在同时它们互相之间又是极其协调的。另一方面，在图形集合的水平上（即阶段Ⅰ），一个集合之特性的选择并不适用其"所有的"成分，而且它的外延也不决定于它们共同具有的那些特性。这样，"所有的"和"有些"还不具有随后的那个阶段所含有的意义。这就解释了儿童在使用这些数量词方面具有系统的错误之原因。

至于第Ⅱ阶段，可以看到三个有趣的发展，这有助于说明我们在第Ⅰ阶段所看到的那些情况。这同后来的发展也能使我们更清楚地理解这些发展是一样的。首先，儿童现在成功地区别了轻盒子和重盒子。所以他们能将"所有的"应用于重盒子并解决问题(3)：所有的能使球露出来的盒子都是重盒子。其次，他们也部分成功地解决了问题(1)"所有的 B 都是 A（如果 $B=A+A'$）?"只要他们对于"所有的"和"有些的"处理从直观上说是正确的，那么他们就能用无懈可击的逻辑来论证："所有的 B 不都是 A，因为还有 A'"[例如，所有红色的盒子(B)不都是重的(A)，因为有轻的红盒子(A')]。不过，即使是对于第一种类型的问题，正确的答复也远不是普遍的。他们常常颠倒这个问题，当"所有的"这个词运用于重量而不是应用于体积或颜色时，尤其会出现这种情况。他们也可能引进一个错误的对于谓语的数量限定（所有的 B 是所有的 A?）。换言之，我们可能会听到根据下列方法的解释："所有的轻盒子都是蓝色的？——不（正确），因为有

轻的红盒子(甚至还有,因为有重的蓝盒子!)"

下面的大多数例子都是第Ⅱ阶段的,但开始的那几个例子是过渡性的:

泰希(4岁2个月)　将盒子分成大、小两类,预言前者将使球露出而后者不能。他称了一个小而重的盒子并尽量地轻视这个例外:"它只使它露出一点儿。"不过他还是考虑了这个例外,并做出了轻盒子和重盒子的分类。第Ⅱ阶段同第Ⅰ阶段的差别也正在于此。

"一个小男孩告诉我,所有的红盒子都是重的。对不对?"——"不对。这些(重的一堆)能使它多露出来些,那些不能。"——"是吗?"——"他不对,因为有不能使球露出的红盒子。"——"让我看看。"——"(他拿了一个轻的红盒子),这就是。"——"那些能使球露出来的怎么样?"——"他是对的。"——"让我看看。"——"(他拿起一个轻的红盒子,但又把它放下)我不想要那个。(然后他连续地放了三个重的红盒子)在这里。"——"你把所有的红盒子都试过了吗?"——"是的。"——"那个小男孩说得对吗?"——"不对。"——"为什么?"——"那些(重的红盒子)能使球露出,那些(轻的蓝盒子)不能。"——"红盒子怎么样?"——"它们不是全部的,因为有一个轻的。"

"所有的蓝盒子都能使球露出来吗?"——"不,有些不能。"——"一个小男孩告诉我,所有的大盒子都能使球露出。"——"他说得对,那是真的。"——"他还说,小盒子不能使球露出。"——"他说得对。"——"都不能使球露出?"——"不,不是全部。"

罗姆(4岁5个月)　一开始便按照颜色来划分这些盒子,并没有称一称它们的重量。然后她开始将它们都称了一下,接着把它们重新分成大的和小的。最后,她将所有的盒子都称了一下并按重量重新分类,但这种分类没有明确地显示出她已经意识到她的所为。"所有的大盒子都能使球露出来吗?"——"不。"——"为什么?"——"也有些像这样的(指向小而重的盒子!)。"——(向她显示一个重的蓝盒子。)"这一个是什么?"——"蓝的。"——"一个小女孩告诉我,所有的蓝盒子都是轻的,她说得对吗?"——"不对。"——"为什么?"——"因为这里(一堆轻盒子)也有一些红盒子(!)"——"那个小女孩说,所有的小盒子都是轻的。"——"不,这里有些小盒子(在重盒子之中)。"——"所有的红盒子都使球露出来吗?"——"不,因为这里有红盒子(是轻的)。"

在罗姆5岁10个月时又问了一次,她以同样的方式来解决问题(1)。但不再像4岁5个月时那样对谓语作错误的数量限定。

杰恩(5岁5个月)　非常快地正确地把盒子分成轻的和重的,并用重量来解释她的分类方法。"所有的红盒子都是重的?"——"不,因为(在这堆重盒子中)有一些小红盒子和小蓝盒子!"——"所有的蓝盒子都使球露出来?"——"那是错的。它们有些不是重的,有些是重的。"

菲拉(5岁6个月) 先按体积来解释差别,接着在经过试验后使用重量来解释。"一个小女孩告诉我,所有的红盒子都是重的。"——"那不对。(在重的盒子中)有红盒子和蓝盒子。一只红盒子是重的,一只蓝盒子也是重的。"——"这个小女孩怎么说的?"——"她说它们都是红的,重的盒子(通过把'所有的'红盒子扩大为'所有的'重盒子,将'所有的A都是B'转换为'所有的A是所有的B'!)。"——"你怎么向我表明她是错的呢?"——(她指出一个大而重的蓝盒子,如果我们同意她的转换,这个选择是一个极好的证明。)——"她实际上究竟说的是什么?"——"说红盒子使球露出来。"——"你能够表明这是错的吗?"——"能,用蓝的(把一个重的蓝盒子放到天平上,尽管这第二个阐述事实上并没有改变谓语的数量关系!)。"——"一个小男孩告诉我所有的大盒子都使球露出来。"——"不,也有些小盒子(同前面完全一样!她指了一个小而重的盒子)。"——"你还能用其他方法说明他是错的吗?"——(这一次她正确地指了一个大而轻的盒子。)——"那是一个不能使球露出的大盒子。"——"好。那个小男孩对我说了些什么?"——"说只有大盒子才使球露出来(又一次将"所有的"扩大到谓语)!"——"是吗?"——"我再让他看看大盒子不能使球露出来。"

法克(5岁6个月) 正确地摆成两堆,但未作任何解释。"所有这些红盒子都能使球露出来吗?"——"不,这些不能,那些能。有些红盒子不能使球露出。"——"大盒子怎么样?"——"不,有些大盒子也是像这样的(一堆轻盒子),它们不能使球露出。"——"一个小男孩告诉我,所有的蓝盒子是轻的,不能使球露出。这对吗?"——"不对,因为也有些能使球露出的大的红盒子(!)。"——"所有的这些小盒子怎么样?"——"不,有能使它露出的小盒子。"

罗克(5岁10个月) 很快地便根据重量作了解释:"所有的重盒子都是大的?"——"不,也有些大盒子是轻的(!)。"——"所有的轻盒子都是小的?"——"是的。"——"所有的大盒子都是轻的?"——"不,也有些重的大盒子。"——"所有的小的都是重的?"——"不,因为它们是轻的,(不过)也有些是重的。"

博尔(5岁11个月) 也理解重量的作用。"所有的红盒子都是重的?"——"不,因为蓝盒子也是重的(!)。"——"所有的蓝盒子都轻?"——"不,因为有两个不是重的红颜色的(!)。"

加罗(6岁10个月) 即刻便发现了重量的重要性。"所有的蓝盒子都是重的?"——"不,也有轻的,例如这个就是轻的。"——"所有的红盒子都是轻的?"——"不,因为也有轻的蓝盒子(!)。"——"所有的蓝盒子都是轻的?"——"不,不是所有的;红盒子也是轻的(!)。"——"所有的红盒子都是重的?"——"不,那个是重的,那个是轻的。"

最后,这里有几个我们在第Ⅲ阶段(这时,一些必要的结构已经得到完善)提出的那类答复的例子。这些儿童对于第一节中有关模型的那些问题所做的回答是正确的,在

这里也同样如此。他们的论证是完备的，并没有受到对于谓语不正确的数量限定的妨碍。

杜布(7岁) 球之所以露出是“因为它们重，而不是由于这些盒子大”。——“看看这对不对。”——(他将大而轻的盒子和小而重的盒子放到天平上。)——“一个小男孩告诉我，因为它们是红颜色的，所以它们能使球露出来。”——“不对(他在天平上放了一个轻的红盒子，接着放一个大而重的蓝盒子)，有不使球露出的大的红盒子，有一个能使它露出的蓝盒子。”——“是不是因为它大?”——“不是。大盒子和小盒子都能使它露出来(将它们放到天平上)。”

史塔(7岁2个月) 通过先放上一个大而轻的盒子，随后再放上一个小而重的盒子来论证重量的作用。“不是因为它们大?”——“不是，(在大盒子中)有重的有轻的(他在天平上放了一个小而重的)。”——“一个小男孩告诉我，所有的红盒子都能使球露出来。”——“不对(他指了一个轻的红盒子)。”——“他还说小的不能使球露出来。”——“不对(他将一个小而重的盒子放到天平上)。”——“他又说蓝盒子不能使球露出来。”——“不对(他在天平上放了一个重的蓝盒子)。”

表Ⅱ显示了不作任何论证、至少在有时(所有的 B 不引起 A，因为还有 B')做出错误论证以及论证正确的每一年龄儿童的百分比：

表Ⅱ 4—9岁以上儿童论证的适当性

年 龄	人数	不作论证	全部或部分错误的论证	正确的论证
4岁	6	60%	33%	0
5—6岁	31	13%	29%	58%
7—8岁	20	10%	15%	75%
9—13岁	8	0	0	100%

根据下列两个观点，描绘第Ⅱ阶段的这些例子是值得我们重视的。第一，它们需要从下面的三个可能关系的立场上来加以检查。这三个可能的关系是：$A=B$(问题3)，$B>A$(问题1)和 $A<B$(问题2)。第二，它们是有启发性的，因为它们显示了促进以及妨碍正确使用“所有的”一些形象的特性。

就 $A=B$ 这个关系来讲，我们可以看到，在这个阶段，所有的受试者都理解球的出现依赖于重量而不是体积，尽管对于大多数问题来说，①重量和体积的分化事实上是一种相当后期的发展。对于在目前这个非常不合定型的实验中表现出来的这种分化方面的相对早熟，我们认为有两个原因：第一，存在着这么一个事实，即变量的分布是始终如一的(两种颜色、两种体积、两种重量)，这比较容易从感觉上把它们分离开来。第二，

① 参见J.皮亚杰和B.英海尔德：《儿童的数量的发展》。

"所有的"重盒子(A)事实上是"所有的"使球露出来的盒子(B)。于是 $A=B$ 并不涉及不对称的包含关系。

第Ⅱ阶段的儿童常常能成功地解决问题(1):"所有的 B 都是 A(如果 $B=A+A'$)?"假如这个问题被正确地按照这种形式的实际意义来理解,那么,甚至5—6岁儿童的论证也有58%是正确的。泰希(他处于第Ⅰ阶段和第Ⅱ阶段之间)在看到例外情况的时候仍然使用了"所有的"。但是,当讨论红盒子(B)是不是能够使球露出的那些盒子(A)时,他还是作了正确的答复:"不是所有的,因为有一个(A')是轻的。"他并不是唯一的能够排除下列错误断言——所有的 B 不都是 A,因为存在着具有非 a 特性($=A'$)的 B——的受试者。然而,正像我们在第1节中所看到的,在第Ⅱ阶段能做出这种类型论证的原因是,它的基础是对于作为一个总体($B=A+A'$)的 B 的感觉,而且它并不意指逆运算 $A=B-A'$,而这个逆运算才是运算包含的标志。

另一方面,尽管这些问题事实上是在一个现实的、功能性的背景下,而不是以一种纯分类的方式提出的,但有些结果也引人注目地符合于第一节中提到的那些结果。我们提出的所有问题都属于类型〈1〉:"所有的 B 都是 A($B=A+A'$)?"然而,我们接连地发现了作如下回答的儿童:"不,因为有 B(即有非 B 的 C 存在着,在这里,$C=B+B'$)。"①

这种推理的基础还是涉及谓语之错误的数量限定。我们知道这乃是第Ⅱ阶段的特征,尽管它更为经常地出现在对于第Ⅱ种类型问题的回答之中(见第1节)。事实上儿童是在说:"所有的 B 不都是 C(无缘无故地转换成'所有的 C'),因为也有些 B'。"这乃是同在第1节中所见到的那些的完全一样的复制品:"所有的 A 不都是('所有的')B,因为存在着有些 A'!"

这里有几个很恰当的事例。向罗姆提出的问题是"所有的大盒子(B)都使球露出($=$都是 A)?",他的回答是"不,因为也有使球露出来的小而重的盒子(B)($=$也包含了 A 的 C)"。当问到是否所有的蓝盒子都轻时,罗姆并没有答复"不,因为有重的蓝盒子",而是说"不,因为也有些轻的红盒子"。杰恩和菲拉给予同样的答案(重的,红的盒子),罗克也是一样(大的,重的盒子)。博尔(重的,红的和轻的,蓝的)以及加罗(轻的,红的)还是如此。做出这些不正确论证的原因是,儿童们通过将"所有的"扩大到谓语而把"所有的 B 都是 A'"转换为"所有的 B 是所有的 A?"菲拉的例子相当明显;听到"所有的红盒子都是重的?"之后,她把这复述为"它们都是红的,都是重的盒子";并将"所有的大盒子……"改变为"只有这些大盒子"。

不用说,这种类型的回答在目前这个实验中绝不是普遍的,因为没有一个受试者由

① 应该注意,这里处理的那些类别都没有元素的交叉,不像第1节中出现的那些类别。于是,B(如大盒子)容纳或包含了 A(大而重的盒子),但 A 也被 C(重盒子)包含,C 也包含 B'(小而重的盒子)。

于问题的颠倒而将第一类问题扩大为第二类的关系。值得注意的是，外延之自发地、相当经常地出现（这可以从已经引证的第二种类型论题的数目中看到），进一步证实了我们对于错误之原因所做的解释。我们在第1节中已经看到了这些错误，在第1节中所用的问题是属于第二种类型的，即“所有的圆形都是蓝色的”？现在我们非常清楚地看到，这些错误不仅仅是言语的混淆，而是第Ⅱ阶段儿童类包含之复杂性的真正表现。

在重量的实验中，谓语之不正确的数量限定之所以并不普遍，还有第二个原因。感觉的和想象的因素在这里比第1节的实验中更为重要些。它们能帮助儿童决定什么时候用“所有的”是正确的，什么时候不是。“所有的重盒子都是红的”和“所有的红盒子都是重的”这两个问题有着明显不同的难度。因为在人的思想中将一些成分组成一个以颜色为基础的非图形的集合，要比根据它们的重量来组合容易得多。潜在的想象方面的差别比第1节中描绘的颜色和形状的差异也要大些。

这就使我们转向下一个实验，在这个实验中，我们还是利用天平，但该实验的设计完全相同于第1节的实验。这样，这两组结果就可以更加严格地加以比较。

Ⅱ. 在这个实验中，我们询问了另外101个儿童，他们的年龄都在5—9岁之间。但这一次，只有颜色和重量这两个变量，而且将这两个变量分散开来以造成一个无元交叉。换言之，这些变量的逻辑结构完全等同于第1节中所使用的那个结构。盒子要么是轻的，要么是红的；或者要么是轻的，要么是蓝的；或者要么是重的，要么是红的；重盒子能使球从狭槽中露出来。没有重的蓝盒子。

我们提出四个严格地类似于第1节中所使用的问题：(1)“所有的重盒子都是红的?”（下文以 *HR* 代之）；(2)“所有的蓝盒子都是轻的?”(*BL*)；(3)“所有的红盒子都是重的?”(*RH*)；(4)“所有的轻盒子都是蓝的?”(*LB*)。*HR* 和 *BL* 属于第二种类型，或者说是 *AB* 类型的，即“所有的 *A* 都是 *B*（其中 $A<B$）?”（正确的回答是：“是的”），*RH* 和 *LB* 属于第一种类型，或者说是 *BA* 类型的，即“所有的 *B* 都是 *A*（其中 $A<B$）?”（正确的回答是：“不是”）。

由于这些问题的逻辑结构完全等同于第1节中所问问题的结构，所以我们获得的结果也是相同的。不过在第1节中，关键的差别是第一种类型的组合(*BA*)和第二种类型的组合(*AB*)之间的差别，而在这里我们发现，对于一个以颜色来界说的集合所提的使用了“所有的”这个词的那些问题（*BL* 和 *RH*），比以重量来界说的那个集合所提的问题（*HR* 和 *LB*）之间的差别要更大些。*BL* 和 *RH* 比 *HR* 和 *LB* 要容易得多。

下面是我们得自于第Ⅱ阶段的一些例子：

帕尔（5岁11个月）“所有的红盒子都重?”——“不。”——“为什么不?”——“因为有轻的红盒子（正确）。”——“所有的蓝盒子都轻（类型2）?”——“是的（正确）。”——“所有的轻的都是红的（类型2）?”——“不，有些是重的，有些是轻的（他仿佛回答了问他的问题：所有的红盒子都轻或所有的轻盒子都是所有的红盒子?）。”——（同样的问题。）——“不。”

吉恩(5岁6个月) “所有的重盒子都是红的?”——“不,有些(红盒子)是空的,有些是重的。”——“所有的蓝盒子都轻?”——“是的,它们都轻。”——“所有的轻的都是蓝的?”——“是的,所有的(将这同化为前面的问题)。”——“所有的红盒子都重?”——“不都是,有些重有些轻。”——“所有的轻盒子都是蓝的?”——“是(将这个问题颠倒了)。”

迪恩(5岁7个月) “所有的红盒子都重?”——“不,不是所有的,那个是重的,那个也是重的。”——“你怎样来说明?”——“所有的。(他试了试所有的红盒子。)没有重的蓝盒子。”——“所有的重的都是红的?”——“(他指了指所有的红盒子,其中有些是轻的有些是重的。)不。”——“那么,所有的重盒子都是红的?”——“有不重的红盒子(!)。”——“所有的蓝盒子都轻?”——“(他指了指蓝盒子。)不,所有的蓝盒子不都是轻的。前面我说蓝盒子都轻,错了。”

谬尔(5岁8个月) “所有的蓝盒子都轻?”——“(他试了试它们。)是的。”——“所有的轻盒子都是蓝的?”——“(他又试了试所有的蓝盒子。)是的,它们轻(!)。”——“所有的红盒子都是重的?”——“(他试了试它们。)不(正确)。”——“所有的重盒子都是蓝的?”——“(他又试了试所有的红盒子。)不,只有三个。”——“有些重盒子是红的?”——“是的,有些是。”——“有些蓝盒子是轻的?”——“(他指了指所有的蓝盒子。)是的。”——“你怎样向我表明?”——“这些是轻盒子。”

雅克(6岁) “所有的重盒子都是红的?”——“不,因为这些(轻的红盒子)不是重的。”——“所有的蓝盒子都轻?”——“不,有些轻有些重(错误)。”——“所有的轻盒子都是蓝的?”——“不(正确,不过他在试图证明这一点时指了重的红盒子!)。”

罗特(6岁9个月) “所有的重盒子都是红的?”——“不,也有(红的)轻盒子。这些是重的,其余的都是轻的。”——“不过我问的是,是不是所有的重盒子都是红的?”——“不,不是所有的红盒子都不重。也有些是重盒子(!)。”

吉尔(7岁9个月) “所有的重盒子都是红的?”——“不,三个重三个轻。”——“所有的轻盒子都是蓝的?”——“是。(他显示一个轻的红盒子。)”——“所有的轻盒子都是蓝的?”——“是。”——“真的吗?”——“不,有三个红盒子和六个蓝盒子。”——“这是不是说‘所有的重盒子都是红的’以及‘所有的红盒子都是重的’?”——“是的。”

游吉(8岁1个月) “所有的重盒子都是红的?”——“不,也有些轻的蓝盒子……不,是的,它们都是红的。”——“所有的轻盒子都是蓝的?”——“是。”——“你在看哪些盒子?”——“蓝盒子。”——“这是不是说,‘所有的轻盒子是蓝的’以及‘所有的蓝盒子是轻的’?”——“(她对这个问题考虑了好长时间。)是的。”

范尔(8岁6个月) “所有的重盒子都是红的?”——“(他依次摸了摸每一个红盒子。)不。”——“让我看一看所有的重盒子。”——(他指了指三个重的红盒

子。)——“我问的是什么?”——“所有的红盒子都重?”

下面是仅有的两个第Ⅲ阶段的例子：

奥德(6岁6个月)　“所有的红盒子都重?”——“不，有三个重的红盒子。”——“所有的重盒子都是红的?”——“是。”——“为什么?”——“它们都是红的，重的盒子。不过，不是所有的红盒子都重；其中三个是重的，三个是轻的。”——“所有的重盒子都是红的?”——“是，三个，而且它们是红的，没有一个是蓝的，都是红的。”——“所有的蓝盒子都轻?”——“是的。”——“所有的轻盒子都是蓝的?”——“不，有三个轻的红盒子和三个轻的蓝盒子。”——“‘所有蓝盒子都轻’以及‘有些蓝盒子是轻的’这两种说法，哪一种说法好些?”——“有些。”

帕特(7岁3个月)　仍然表现有第Ⅱ阶段的痕迹。“所有的红盒子都重?”——“不，不是所有的。”——“所有的重盒子都是红的?”——“不，不是所有的，因为所有的红盒子不是都重。”——“说‘所有的红盒子都重’同说‘所有的重盒子都是红的’是一样的吗?”——“是的……噢，不！因为有的重盒子都是红的，所有的红盒子不都是重的。”——“所有的蓝盒子都是轻的?”——“是。”——“所有的轻盒子都是蓝的?”——“不，不是所有的。那里也有轻盒子(那堆红盒子)。”

从质的观点来看，这些反应同第1节的那些反应非常相似。不过在这里，儿童真正感兴趣的是“所有的”和“有些”这些问题，因为直到现在才将这些词汇用于相当困难的问题之中。特别是由于在将各种各样的盒子放到天平上，看清了小球是露出来还是固定不动，并由他们自己造成了一个初步的分类之后，情况更是如此。

我们又碰到了这个至关重要的问题：为什么会有这么多的儿童将向他们的问题颠倒过来，以致使“所有的 X 都具有 y 的特性?”变成“所有的 Y 都具有 x 的特性?”。(当问题是“所有的轻盒子都是蓝的?”时，5岁组在回答时颠倒问题的儿童占80%；当问题是“所有的重盒子都是红的?”时，仍然有65%的儿童将问题颠倒。)我们不能再用缺乏注意来解释这个结果。因为我们知道，这些儿童对于做出正确的答复是非常有兴趣的。人们可以争辩说，这种颠倒并不意味着对谓语做出了错误的数量限定。换言之，受试者知道“所有的 X 具有 y 的特性”意指“所有的 X 是有些 Y”，而“所有的 Y 具有 x 的特性”意指“所有的 Y 是有些 X”，不过，他还不能避免使它们产生混淆。另一种解释是，他并没有对它们做出区分，他只不过是将它们同化到下面一种相同的表达方式罢了：“所有的 X 是所有的 Y”(当然，反过来也是这样)。为了在这两种解释之间做出决断，我们直截了当地问了几个儿童，到底这两个问题是否相同(参见吉尔、游吉和帕特)。我们将这个问题问了十来个第Ⅱ阶段的儿童，他们中的每一个人都很自信地答复说，这两个问题是相同的(游吉在对这个问题思考了好长时间之后也作了这样的答复)。当然，达到第Ⅲ阶段的儿童会很自然地答复说这两者是不同的。帕特开始时由于将这两者同化起来而作了转换，后来他非常突然地发现它们是不同的，注意到这一点是很有趣的。第Ⅱ阶段的这种同化事实上将使我们确信，与这种同化并行的颠倒实际上确实是起源于谓语

之错误的数量限定。

不过，如果对于儿童来说这两个问题是完全相同的，那么，他为什么会像他所做的那样经常将它们颠倒呢？这个问题很容易根据实验的设计而得到解答。如果他能够在一个用颜色来加以界说的集合和一个用重量来加以界说的集合之间自由地加以选择，那么他将选择前者，因为那容易些。

表Ⅲ　在现实的背景中涉及"所有的"四个问题；5—9岁儿童正确答复的百分比①

受试者的年龄及人数	*HR*	*BL*	*RH*	*LB*	*AB*	*BA*	+	关于重量的平均数（*HR*+*LB*）	关于颜色的平均数（*BL*+*RH*）
5(20)	35	82	100	20	35	20	5	27.5	91
6(20)	40	91.5	100	53	36.5	53	17.5	46.5	95.5
7(25)	47	100	100	44	47	44	28	45.5	100
8(20)	67.5	97	100	55.5	65.5	55.5	41	61.5	98.5
9(16)	89	98	100	62	89	62	62	75.5	99

同表Ⅰ和表Ⅰa一样，表Ⅲ说明了年幼儿童始终不能正确地限定谓语的数量关系。但是在这个总的特征之外（这个总的特征对于两组结果来说是共同的），我们还发现了一个特有的特征，它在这里是极其重要的。同*BL*栏和*RH*栏的差别相比较，*HR*栏和*LB*栏的差别是突出的。7岁以下（包括7岁）的儿童，对于"所有的"是指盒子重量的那些问题（"所有的重盒子是……"或"所有的轻盒子是……"），比对于"所有的"是指盒子颜色的那些问题所做正确回答的次数要少一半以上！虽然表Ⅰ和表Ⅰa也显示了以形状来界说的比以颜色来界说的略微好些，但其差别却是很小的。

我们在这里看到，当"所有的"用于"蓝盒子"和"红盒子"时，它的意义通常就得到正确的解释；但当它用于"轻盒子"和"重盒子"时，对它的解释常常就会出现错误。这样，*BL*的正确答复达82%至100%，而*LB*的正确答复仅为20%至62%。这同所有的蓝盒子是轻的而不是所有的轻盒子是蓝的这一事实毫不相干。事实上，*BA*类型的那些问题在原理上要比*AB*类型的问题容易些。真正的解释是，在"所有的蓝盒子都轻？"这个问题中，"所有的"容易引起一个直观的非图形集合的想象。由于有这个因素，所以我们看到*BA*栏是不规则的。

---

① *HR*＝所有的重盒子都是红的？
BL＝所有的蓝盒子都是轻的？
BH＝所有的红盒子都是重的？
LB＝所有的轻盒子都是蓝的？

*AB*栏显示对于*HR*和*BL*（类型2）都作正确答复的百分比。*BA*栏显示对于*RH*和*LB*（类型1）都作正确答复的百分比。＋栏显示所有答复都是正确的受试者的百分比。最后两栏分别是（*HR*＋*LB*）和（*BL*＋*RH*）的平均。记分的格式同我们在表Ⅰ和表Ⅰa中所使用的格式完全相同。

由“所有的”加以形容的特性具有潜在的直观性或想象性之重要意义，甚至也出现在前面那个实验的结果之中，而在那个实验中，各种因素都是以每一种可能的方式加以结合的。当我们研究受试者所采用的论证时，这尤其明显。以附加的一些无拘束的讯问来进行的几个对照实验表明：当一组受试者处理“所有的小的（或大的）盒子是轻的？”这个问题时，他们的所有的论证都是正确的（即提出正确的反例），当他们处理“所有的轻盒子都小（或大）？”这个问题时，却只有67％是论证正确的。同样，在只有67％的人正确解决“所有的大盒子都重？”的那一组中，只有25％的人正确地处理了“所有的重盒子都大？”这个问题。但是，同缺掉四个类别中的一个相比较，当所有这四个类别都呈现出来时，这些想象的因素就不太重要。这或许是由于特性的对称的分布使这个问题弄得朦胧不清的缘故。在第Ⅱ阶段，对称本身就是一个类别之直观的特性。所以我们的结论是，对于有关数量词“所有的”真正意义之理解方面的发展，同总的想象的特性有着非常密切的关系。

3. “有些”的绝对用法和相对用法[①]

第1节和第2节研究了“所有的”和“有些”之间的关系，其研究手段是采用一些涉及“所有的”一词之使用的问题。现在我们知道，第Ⅱ阶段的儿童错误地解释了我们称之为第二种类型的问题：将“所有的 A 都是 B”的意思看作“所有的 A 是所有的 B”，而它的真意却应该是“所有的 A 是有些 B”。

我们先要设法弄清儿童们理解的“有些”这个词究竟意指什么，但我们不想考虑下列特殊的情况，即一个集合 A 的成分既是“所有的”A 又是“有些”$B(A<B)$。我们想要知道的是，在一个相对说来为非结构性的情境中，“有些”这个词传达给儿童的准确意义是什么。实验的过程是，让儿童面临各种物体，并要求他拿出“有些蓝色的器材”或“有些黄色的花”等等。我们的试验用了各种各样的材料，它们是：(1)第1节中的那些器材（蓝色圆形，红色和蓝色正方形）；(2)花卉图（白色和黄色玫瑰，白色和黄色郁金香）；(3)彩色图画（水果，树木，带有房屋的风景画等等，其中“有些”成分是彩色的，但不是全部）。我们也要求受试者比较“有些”和“所有的”，或界说“有些”这个词，偶尔也要求他将“有些”同他自己选择的其他一些措辞（如“几乎所有的”等）作比较。

总的说来，在第Ⅱ阶段，儿童们意识到“有些”同“所有的”意思是不同的，但在同时，他们又不能对这个词确定一个稳定的意义。当他们不能发现“所有的”和“有些”之间的差别时，这种摇摆又折回到第Ⅰ阶段。下面是第Ⅰ阶段的一个例子。

贾克（5岁2个月）　实验器材与第1节相同。“你能给我一些蓝色的

① 参加这一部分研究的受试者共21名。

吗?"——(他给我一个。)——"那是一些还是一个?"——"一个。"——"现在给我'一些'。"——(他拿了一个。)——"现在给我所有的蓝色的。"——(他拿了一个。)——"所有的正方形"。——(他拿两个。)——"所有的圆形。"——(他拿了所有的圆形。)——"有些蓝颜色的。"——(两个,接着是三个,随后是所有的。)

在第Ⅱ阶段,无论在言语的界说方面还是在实践方面,都对"有些"和"所有的"做出了一些区分。非常有趣的是,实践并不总是与言语的界说相协调。

卡尔(5岁4个月) 用第1节的器材。"给我一些蓝颜色的。"——(他在六个中拿了四个。)——"有些正方形。"——(他给了两个;随后又放回去,这是在每一个问题之后的标准化的实践。)——"给我所有的正方形。"——(他又拿起同样的两个正方形。)——"现在你给我'有些'相同的东西。这是相同的吗?"——"不。"——"'所有的'是什么意思?"——"很多。"——"'有些'呢?"——"一个或两个。"我们又换了一排(五个蓝色圆形,两个蓝色正方形和两个红色正方形):"给我有些蓝色的。"——(他给我五个圆形。)——"能不能换一种给法?"——"能(他给我最后的两个)。"——"一个圆形和一个蓝色正方形能不能说是'有些蓝色的'?"——"是的。"——"给我一些正方形。"——(他给了一个蓝的和一个红的正方形。)——"有些圆形。"——(他给了三个圆形。)——"一些红颜色的。"——(给了两个红色的正方形。)——"所有的红颜色的。"——(给同样的。)——"两次都对吗?"——"是的,不是非常对。"——"不是非常对是什么意思?"——"应该给一个(=有些)或几个(=所有的)。"——"有些蓝色的。"——"圆形?"——"你喜欢给什么就给什么,只要它们是蓝颜色的。"——(他拿了两个蓝色圆形并似乎要拿一个蓝色正方形,但随后又把它放了回去。)——"将那个给我对吗?"——"对。"

马尔(5岁6个月) 器材同上。"给我有些蓝颜色的。"——"(将所有的蓝色正方形和圆形都拿了起来。)很多!"——"那是'有些'还是'所有的'?"——"所有的。"——"如果我只要有些,你给我什么?"——"圆形。"——"只给两个圆形吗?"——"是的。"——"给我有些正方形。"——(他将红的、蓝的正方形都给了。)——"这是有些?"——"是的。"——"你在给我什么?"——"正方形。"——"它是'有些'呢还是'所有的'?"——"有些。"——"说它是'所有的'也对吗?"——"那是('所有的'都是)相同的颜色(!)。"——"给我有些圆形。"——(将它们都拿了出来。)——"那是有些?"——"是的。"——"是所有的圆形?"——"那是所有的圆形。"——"有些?"——"那是蓝颜色的(=同样!)。"

特尔(5岁2个月) 器材同上。"有些蓝颜色的。"——(给了一个。)——"所有的蓝色圆形。"——(给了它们全部。)——"有些正方形。"——(给了一个红的。)——"你能多给些吗?"——"能,两个。"——"像这样呢(两个红色正方形和一个蓝色正方形,一个蓝色正方形漏掉了)?"——"不,它不是同样的颜色。"——"给我有些圆形。"——(将它们都拿了。)——"有些蓝色正方形。"——(将它们都拿

了。)——"这是有些还是所有的蓝色正方形?"——"只有三个蓝色正方形(由于器材的数目不够多,使有些等同于所有的了。)"——"那是有些还是所有的?"——"所有的。"——"假如我再放进这些(增加三个),要你给'有些',你给我多少?"——"三个。"——"能给四个吗?"——"能。"——"五个呢?"——"不。"——"为什么?"——"因为有五个(事实上有六个;但他认为只有五个,特尔拒绝给最后的一个,这将意味着给了'所有的')。"

罗丝(5岁3个月) 器材同上。"给我有些蓝颜色的。"——"圆形?"——"随你的便。"——(给了一个蓝色正方形和一个蓝色圆形。)——"有些红颜色的?"——(给了四个中的三个。)——"有些圆形。"——(除了一个以外,其余的都给了。)——"有些正方形。"——(所有的蓝色正方形。)——"将蓝色正方形和(两个红色正方形中的)一个红色正方形给我行不行?"——"不,它们不是相同的颜色。"——"所有的圆形。"——(给了它们的全部。)——"'所有的'圆形同'有些'圆形是一样的吗?"——"不,因为'有些'同'所有的'不是一个意思。"

罗丝似乎对于"有些"的用法之相对性有了某种正确的理解。但是,当问到花卉(三枝白色和三枝黄色郁金香,三枝白色和四枝黄色玫瑰)时,情况却不是如此。"有些黄色的郁金香。"——(给了它们的全部。)——"有些白色的郁金香。"——(三枝中的两枝。)——"能不能再给我一枝(最后的那枝)?"——"能,这是相同的。"——"给我有些花。"——(给了几枝。)——"如果再加上这些呢?"——"不,这不是有些。"——"所有的花。"——(给了它们的全部。)——"如果我留下一枝,它还是'所有的'吗?"——"不。"——"有些郁金香。"——(给了它们中的两枝。)——"另一枝(最后的一枝)呢?"——"不。"——"为什么?"——"那就是'很多'了。"——"有些是个数字吗?"——"是的,三。"——"只是三?"——"二或三。"

雷姆(5岁8个月) 器材是花卉。"有些郁金香。"——(给了所有的三枝。)——"所有的黄色郁金香。"——(相同。)——"'所有的'和'有些'是一回事吗?"——"是的。""有些郁金香。"——(给了白色郁金香。)——"加上那一枝(黄的),还是有些郁金香吗?"——"不,因为它是黄色的。"——"所有的郁金香。"——(给了它们。)——"像这样(少一枝)呢?"——"不,因为少了一枝。"后来,"有些黄色郁金香。"——(拿了所有的三枝,又放回去一枝。)——"为什么你放回去一枝?"——"因为要不就一枝也不剩了。"——"所有的?"——(拿了他放回去的那一枝。)

下面的例子属于第Ⅱ阶段的后半期。虽然在"所有的"和"有些"的分化方面有了些进步,但他们仍然不能从根本上掌握"有些"的相对含意。

切阿(5岁6个月) 实验器材与第1节同。"给我有些蓝色的模型。"——(只留下一个,其余的都给了。)——"所有的。"——(给了全部。)——"有些正方形(共四个)。"——(给了两个红色的,一个蓝色的。)——"有些蓝色的模型。"——(给了

它们的全部。)——“有些圆形。”——(又是全部。)——“那是‘有些’还是‘所有的’?”——“所有的,我得拿走一些。”——“如果你将所有的都给我,还是对的吗?”——“不,‘有些’是一半。”——“正好一半还是大约一半?”——“正好一半。”——“六的一半是多少?”——“是四。”——“四的一半呢?”——“四。”——“给我有些正方形。”——(他给了所有的四个,然后又把它们放回原处。)——“四的一半?”——(给了它们全部。)——这里的唯一进步是,“有些”被界说为“一半”,但就切阿的情况来看,即使“一半”也不是一个相对的词语!

李思(5岁8个月) 器材是三个蓝色圆形和几个红色正方形。“有些蓝颜色的。”——(给了它们的全部。)——“有些正方形。”——(给了四个,留下三个。)——“有些红颜色的。”——(经过犹豫之后,给了三个。)——“有些圆形。”——(给了两个,留下一个。)——“当我说‘有些’时你怎么做?当我说‘所有的’时,你又怎么做?”——“‘有些’的意思是不很多。”——“这算是有些蓝色的模型吗?”——“不,那很多。”

鲍恩(5岁11个月) “有些蓝色圆形。”——(给了八个中的三个,但也同意给四个、五个等等。)——“最后的一个呢?”——“不,因为那就是‘所有的’了。”——“所有的蓝颜色的。”——(拿了所有的蓝色正方形和圆形。)——“有些粉红色的正方形。”——(三个中的两个。)——“那一个呢?”——“不行,因为再也没有了。”当利用花卉来做实验时,这个措辞又出现了。“有些玫瑰花”=三枝白玫瑰,留下三枝黄玫瑰。“我能拿那一枝(三枝黄玫瑰中的一枝)吗?”——“不,因为没有太多的。”于是“有些”仍然意指“几个”。

比尔特(5岁11个月) 总起来看正确。但当给了一个小集合的全部,问她那是“所有的”还是“有些”时,她解释说:“那是几枝郁金香。”

卡恩(6岁1个月) 八个正方形。“有些”=一个,然后是二个,再后是三个。“一直到多少个?”——“四个。”——“像那样(五个)呢?”——“不。”——“为什么?”——“那很多。”

法伯(6岁1个月) “‘有些’是‘几个’。”——“一个或两个并不构成‘有些’,但在三和一百之间的任何数都是‘有些’。”

弗拉(7岁4个月) 十个正方形。“将它们中的有些给我。”——(七个。)——“四个是有些吗?”——“是的。”——“五个呢?”——“是的。”——“八个呢?”——“不,那多了些。”——“什么数目之后才是‘有些’(由大至小)?”——“七以后。”——“有些和所有的是一回事吗?”——“不,有些比所有的少。”

尽管这些回答有着模糊和反复之处,但下列三点还是非常清楚的:第一,所有的受试者(包括刚进入这个阶段的儿童)都在“有些”和“所有的”之间作了区分。但只有很少的几个人能用言语系统地阐述这种差别。有时受试者看来并不能区别这两个词语,因而偶有一些短暂的失误;有时情况则要严重些,以致人们可以说他们认为这两个词语意

思相同(参见罗丝和雷姆面临三枝黄色和白色郁金香时的反应)。但值得注意的是,这种混淆只限于由两个或三个成分组成的一些小集合的分析(现在我们就要来弄清其原因)。例如,当罗丝在处理三枝白郁金香时,她将"所有的"和"有些"完全等同了起来;不过在要她给"有些花"时,她拒绝所有的花;此外,她只给少数几枝而不肯给所有的,因为"那不是有些"。对于"有些 A"(如"有些蓝颜色的")和"一些 A",儿童们的反应也没有差别。我们故意地交替使用这两种形式,因为我们希望发现它们是否向受试者转达了某种微妙的差别。① 从语义学的角度来看,这组受试者共同采用的仅有的一般界说形式是罗丝所说的那种:"有些同所有的不是一个意思!"(尽管在面临三枝白色的郁金香时,她将有些完全等同于所有的。)

这些观察导致了第二个结论,这就是:即使在第Ⅱ阶段的后半期,"有些"还是具有一种绝对的意义,它同成分的数目有着紧密的联系,而不是指向部分与整体的关系。于是卡尔将"所有的=许多"对照于"有些=一或二",并把这种区别回复为"一=有些"和"几个=所有的"。马尔对于有关的数目不太关心,因为他强调质的范围。这便导致他造成各种各样的混淆,而这些混淆的基础则是:"有些=几个不同的类型"、"所有的=同一类型中的许多"这一看法。另一方面,特尔却相当明显:对于一些相当大的集合(圆形)来说,"有些"的意思是一或二,而"所有的"则意指整个集合;但对于一些小的集合(三个蓝色正方形)来说,所有的和有些就合而为一,因为"有些"意指一个小数目。运用对比的方法来说就是:如果在其他那些正方形中加上三个蓝色正方形,那么"所有的"和"有些"便又一次显示出差别,现在,"有些"就表示由 $(n-1)$ 个正方形所组成的任何一个集合。对于罗丝来说,"有些"不能意指"所有的",而且她相当简明地表示:"有些"是"二或三"。切阿和弗拉也具有各自的数量界说(一半、几个等等)。

最后,我们来看看这些反应的第三个特征。这个特征要比另两个特征模糊得多,而且其基础是不能在外延和内涵之间做出完全的区分。如果一个集合 B(它的特性 b 具有共同性)包括两个不同的子集 A 和 A'[它们的特性是 a 和 a'。例如,正方形(B)可以是红色的(a),也可以是蓝色的(a')],那么"有些"这个措辞便往往限制于这些子集中的一个(一般是较小的那个,例如特尔,对于他来说,"有些正方形"不能指红色的和蓝色的之混合);在另一些例子中,"有些"可以任意地运用于那些由不同成分组成的集合,而"所有的"却限制于一个由同类成分组成的集合(例如马尔,在他看来,所有的是"指相同的颜色")。总之,"所有的"和"有些"的意义并不限制于由共同特征(内涵)来加以界说的那些集合的外延;与此相反,我们发现,它的意义也包含了那些具有这些特征的同类成分。我们所观察到的这个特征在第Ⅱ阶段的后半期将变得不太明显。

---

① 本书的一个作者在1921年已经发现,儿童们在掌握部分("有些"等)对于整体的关系方面具有一些言语方面的困难。参见 J. 皮亚杰:《论整体与部分之概念发展的几个问题》,《心理学杂志》,1921,第十七卷,第449—480页。

很明显，虽然儿童在第Ⅱ阶段初期开始分化"所有的"和"有些"，但他们还需要克服许多混乱。所以，当有关的集合太小或包括有一些子集时，这些词语之间的混淆还是比较普遍的。在这个阶段，只有"所有的"才具有一个不变的意义（在第Ⅰ阶段，它并非如此，因为"所有的"常常允许有例外——似乎这些例外证实了这个法则！）。在第Ⅱ阶段，"所有的"是一个集合的一组成分，它没有例外。至于"有些"，这个措辞似乎表示一个绝对的数量（如与"许多"相对的"几个"），或者它还是表示各种"内涵"关系的一种。结果它常常与整体相混淆，至少在"外延"方面是如此。现在我们可以较好地理解在第1节和第2节中已经讨论过的对于谓语之不正确的数量限定问题：受试者在理解"所有的 A 都是 B"是意指"所有的 A 是有些 B"而非"所有的 B"方面之所以存在着困难，是因为他们还不能在"有些"和"所有的"之间做出系统的区分。

现在我们转而考虑"有些"的本质上的相对涵义。在这方面，我们检查了6—9岁的32名儿童，让受试者坐在桌子旁边，桌子上放着五枝白色郁金香，四枝黄色郁金香，四枝白色玫瑰，五（或六）枝黄色玫瑰。在介绍了有关语言的区别之后，便要求受试者拿出"有些郁金香"，"所有的白玫瑰"等等（A）。然后我们就进行询问（B）："所有的郁金香"和"有些花"是一个意思吗？这一束（它是由儿童或询问者集成的）能够同时叫作"所有的郁金香"和"有些花"吗？为了解释对于这个关键问题所做答复的意义，我们提出了下面这些问题（每一个问题都利用了一束相对应的花）：（1）如果 X（游戏伙伴的名字）说"所有的郁金香都是花"，而你说"有些郁金香是花"，谁说得对？（2）如果你说"有些花是郁金香"，而 X 说"所有的花是郁金香"，谁对？（3）"所有的花是郁金香"和"所有的郁金香是花"，哪个更对些？（4）"所有的黄郁金香是花"和"所有的花是黄郁金香"，哪个对？等等。最后，我们问了一些涉及包含之数量关系的问题（在第四章中我们还要回到这个论题上来）：在这一束中，郁金香多还是黄郁金香多？在这（混合的）一束中，是花多还是黄玫瑰多？等等。

下面是几个说明第Ⅱ阶段的例子。

班恩（6岁1个月） 问题1："是我对（=有些郁金香是花），因为所有的花不都是郁金香。"问题2至6：正确。问题（B）：班恩不同意由所有的郁金香所组成的一束也是"一些"或"有些"花的一束，其理由是后一种说法还要再加上一些花的种类。

盖拉（6岁2个月） "所有的郁金香是花或仅仅是一些花？"——"所有的郁金香……不，有些郁金香，因为那不是所有的花。"——"所有的郁金香都是花吗？"——"不。"——"为什么？"——"因为还有其他的花。"（比较"所有的 A 是所有的 B"）——"有些花是郁金香，还是所有的花是郁金香？"——"有些花是郁金香，因为有其他的花。"——"所有的郁金香都是花？"——"有些花是郁金香，有些郁金香是花。"——"如果其他的郁金香不是花的话，那么，什么是其他的郁金香呢？"——"……"——"能不能说所有的郁金香都是花？"——"不行，还得有其他的花。"——"你得到过有些花吗？"——"没有。"——"你得到过什么花？"——"郁金香。"——

"所有的郁金香不是有些花吗？(问题B)"——"不，这是所有的郁金香，你得拿掉一枝(才算是'有些花')。"——"为什么？"——"……"——"那么我们得怎么做呢？"——(她拿去白郁金香。)——"这一束是有些花吗？"——"不，它们是所有的郁金香。"不过，当问到"有些花是黄郁金香，还是所有的花是黄郁金香？"时，盖拉同意"有些花是黄郁金香"，因此他拒绝了另一种选择。实验继续进行："能不能说所有的郁金香是花？"——"不能，因为有其他的颜色和其他的花。"

李克(6岁4个月) 将所有的玫瑰集成一束。"所有的？"——"是的，一枝也不剩。"——"你能够说我现在有一些花吗？"——"不，那是有些玫瑰花。"过了一会儿，李克又集成了同样的一束。"能够说这一束是有些花吗？"——"是有些玫瑰花。"——"是不是一些花？"——"是的，如果你在田野里看到它们，而且没有其他的(即没有其他的花)，那么它就是有些。但是如果一枝也不剩，那么就是所有的。"——"如果把所有的郁金香都拿了，还是有些花吗？"——"是的。"——"所有的玫瑰花是有些花吗？"——"如果你将所有的花放在一起，那是所有的花。如果只有玫瑰花，那就是有些，如果你拿所有的玫瑰花，那么它就是'所有的玫瑰花'。"——"那是不是'一些花'？"——"如果你拿所有的玫瑰花，我想那就是有些，同你说的'一些花'相同。"

毛尔(6岁7个月) "所有的郁金香是花，还是有些郁金香是花？"——"所有的郁金香好些，因为所有的郁金香都在一起。"——"有些花是郁金香，还是所有的花是郁金香？"——"所有的花是郁金香。"——"是吗？"——"不，因为还有其他的。"——"所有的郁金香是有些花？"——"不，所有的郁金香是花。"——"我们不能说所有的郁金香是有些花吗？"——"不能，因为郁金香是花而不是有些花。"——"将所有的黄玫瑰给我。"——(她将它们都集成一束。)——"它是所有的黄玫瑰还是有些黄玫瑰？"——"有些。"——"给我有些花。"——(她选了两枝郁金香和两枝玫瑰。)"我手中是花多还是玫瑰花多？"——"一样多。"——"我拿了几枝花？"——"四枝。"——"多少玫瑰？"——"两枝。"——"郁金香呢？"——"两枝。"——"我有的花多还是郁金香多？"——"一样多。"

最后我们举出两个第Ⅲ阶段的例子：

布拉(8岁1个月) "给我所有的黄颜色的花。"——(他拿了一束黄花。)"我有这里所有的黄花，还是有些黄花？"——"所有的。"——"它也是有些花？"——"是的，它是所有的花中的有些。"——"所有的郁金香是花，还是有些郁金香是花？"——"所有的。"——"所有的花是郁金香，还是有些花是郁金香？"——"有些花是郁金香。"——"给我所有的郁金香。"——(他这么做了。)——"'所有的郁金香'以及'有些花'这两种说法哪种更正确？"——"两种都可以！"——"是相同的吗？"——"是的。"

劳斯(9岁2个月) "我曾向一个小男孩要一束所有的郁金香，后来，我要他

给我用有些花集成的一束。两次他都给我相同的那一束。他对吗?”——“有些什么花? 是那里的那些花吗?”——“是的。”——“是的,他对。”

这些有关“有些”这个词的相对涵义方面的结果,同我们已经知道的第Ⅱ阶段的那些结果是相符的。它们进一步证实了儿童不能系统地理解“所有的 A 具有 b 的特性”即包括有“所有的 A 是有些 B”的涵义。于是班恩和盖拉明显地认为“一些花”和“有些花”是指一个集合的内涵而不是它的外延(当问盖拉一个简单的问题“所有的郁金香是花?”时,我们也发现了这一点)。要想得到“一些花”,就必须再加上其他一些的种类(“得有其他的花”,因为所有的郁金香都是“郁金香”)。当毛尔解释“郁金香是花而不是有些花”时,她也不明言地表示了“有些”这个词是指种类(这也是她之所以选择两枝郁金香和两枝玫瑰来说明她的意思的原因所在)。李克在经过许多暗示之后才勉强承认,“所有的郁金香”=“有些花”;但她又不同意“有些花”能够运用于田野里的花的一个部分,而所有的玫瑰花乃是“有些玫瑰”而不是“有些花”等等。我们又一次碰到这个颇为熟悉而不正确的数量限定:“所有的 A 具有 b 的特性=所有的 A 是所有的 B”(如盖拉和其他一些否认“所有的郁金香是花”的受试者)。

至于成功的和失败的数量分布,在6－8岁的所有受试者中,对于“所有的郁金香(或玫瑰)是有些花?”这个重要的问题能立即做出正确答复的仅占21%。在经过犹豫和重新阐述之后做出正确答复的占30%。49%的受试者始终否认这一点。问题1(所有的郁金香是花?)相当于第1节和第2节的问题2(所有的 A 是 B,其中 $A<B$)。对这个问题的正确答复达到47%(受试者的年龄还是6－8岁)。问题2(所有的花是郁金香,还是有些花是郁金香?)相当于第1节和第2节的问题1(所有的 B 是 A,其中 $A<B$)。对这个问题的正确答复是81%。这个差异进一步证实了我们在第1节中所强调的这两种类型问题的差异。为了理解为什么只有21%的受试者接受“所有的郁金香是有些花”,而接受从逻辑学的角度上讲与之完全相同的陈述“有些花是郁金香”的受试者竟高达81%,我们只要回想一下第1节就可以了——儿童能够看清集合 A 和 B 并不一致,所以就要否认“所有的 A 具有 b 的特性”这一陈述,即使他将这理解为“所有的 B 是所有的 A”,情况也是如此。这就是正确答复占81%的原因。“所有的 A 都具有 b 的特性”这个陈述乃是理解包含的一个较好的向导。

最后,我们可能会再次注意到直观或想象因素的重要性。如果将这些问题加以改变以减弱类别 A 的结合性,如“所有的(或有些)花是黄色的郁金香?”以及“所有的(或有些)黄色的郁金香是花?”,那么,(6－8岁的受试者)对于第一个问题(所有的 B 是 A?)作正确回答的仅占68%,对第二个问题(所有的 A 是 B?)作正确回答的仅占37%。

至于最后的那个方面,在6－8岁的受试者中,对那些涉及包含之数量关系的问题(在这一束中是郁金香多还是花多? 在这一束中是花多还是黄玫瑰多?)做出正确回答的只有33%。我们还要在第四章中研究这个问题。

4. 结论:“有些”和“所有的”,包含以及内涵与外延之间的关系

总的来看,这些实验的结果是相当一致的。首先,它们表明:在第Ⅱ阶段不存在“所有的”和“有些”之系统的协调。“有些”仍然具有一种绝对的涵义(它意指一个小数目),而且,当集合非常小时,“有些”就混同于“所有的”。对于“所有的”使用也不总是正确的,即使是采用我们的第一种类型的问题,即“所有的 B 是 $A(B=A+A')$?”,情况也是如此。我们的结果也显示,在解决属于第二种类型的一个问题——“所有的 A 都是 B”($A=B-A'$)——时,第Ⅱ阶段的儿童将把“所有的”扩大到谓语那儿(“所有的 A 是所有的 B?”)。其原因是:首先,他不能理解这个不明言的“有些”的相对特性(“所有的 A 是有些 B”);其次,他不能运用逆运算 $A=B-A'$。其结果就是不能系统地掌握包含的关系。从心理学和逻辑学的角度来看,运用“所有的”和“有些”方面的错误将导致把握包含方面的错误。

如果要对第二和第三两章做一总结,我们还得解释一下这些困难的性质,而为了做这种解释,我们实际上就要了解第Ⅱ阶段的一般特征。在这里,我们还是要看一看对外延和内涵加以分化的性质,以及在一个仍然根据非图形集合来思考的儿童的心目中存在着的外延和内涵之间的关系的种类。

同早期的图形集合相比较,非图形集合的确标志着一个明显的进步,后者的“内涵”不再依赖于作为一个整体的该集合的形状或它的成分之具体的安排。换言之,非图形集合乃是某种与一个集合或复杂对象非常不同的东西。它是物体在思想上的“堆积”或聚合,而这同它的形状是不相干的。但一个非图形集合仍然是一个“集合”而不是一个“类别”。这意味着,它的构成成分必须能够感觉到,而且得非常接近地聚在一起。此外,它们仅仅是依据数量的标准而在儿童的思想中聚拢在一起的,而且必须是可以适当地直观的。这就是说,它们在特征上必须是图形的。所以这些成分的联合是一个稳定的表现形式,因为它缺乏一个运算类别之可逆的机动性。如果我们想要发现这些儿童之所以难以正确地运用“所有的”和“有些”的原因,我们的出发点必须是非图形集合的这种残留的整体性。一个非图形集合仍然是一个定性的实体,而且它的特征附属于“作为一个整体”的这个定性的实体。

基本的问题是,第Ⅱ阶段的受试者是否懂得“所有的”仅仅指向外延,或者说,在非图形集合的水平上,内涵和外延之分化——这在第Ⅰ阶段是完全缺乏的——是否仍然不完全。

在运算的水平上,内涵是一个类别所共有的那组特性;而外延则是那组成员本身。换言之,外延涉及将一个类别看作是成员之联合的考虑;而内涵则从表现共同类别特性

的每一单个的成分中得出。当然，只有当这个类别已经构成并得到清楚的界说时，情况才是这样。要知道某一特性是否作为一个类别之内涵的部分，就是要知道这个类别的“所有的”成员是否具有这个特性(即，是否“普遍”)。于是内涵蕴涵着外延，这同外延暗示内涵是完全一样的。但是，一旦这个类别已经存在，那么该类别中的任何一个成员就都将充分地体现它的内涵，不过从一个成员那里不能看出它的外延究竟该是哪些，它只是外延中的一个未知的分数：$1/x$。

另一方面，处于前运算水平的儿童仅仅按照一定的集合来加以推理，而且外延也仅仅运用于这些集合。“所有的”指一个集合的特性，这同内涵的特性被指派于具体的成分是非常相像的。只要一个集合本身是一个直观的实体(因为年幼儿童不能区分单个类别之间的逻辑关系和部分与整体的亚逻辑关系)，它的一般特性就附属于作为一个整体的这个集合，而不是分别地属于它的单个成员。当“所有的”这个词用于一个集合时，它就引进一个该集合所具有的作为一个实体的特性(见第1节和第2节)。此外，这个特性必须具有充分的图形性或直观性，以使儿童能够很好地理解“所有的……”这一陈述。这样，“所有的圆形都是蓝色的”便意指，这个集合(作为一个整体)“仅仅”而且“完全”是蓝颜色的，并且是由圆形所组成的。这同一个特定的物体必须既是蓝色、同时又是圆形才被叫作“蓝色圆形”是一样的。如果“蓝色的”集合既包括正方形又包括圆形，儿童就容易说，“所有的蓝色的东西不是圆形”，因为蓝色物体的集合并不与圆形的集合相重合。不过他将经常否认“所有的圆形是蓝色的”，因为这个集合的特性“蓝色”并非仅仅“圆形”单独所具有，以致圆形和蓝色这两个集合并不构成同一个加以双重界说的集合。

总之，对于“所有的”之前运算的运用，是由于缺乏内涵和外延之间的分化(而它又是由于缺乏在类别和表示一个前逻辑“集合”之直观性的对象之间的分化)。当然，这并不是说“所有的”对于外延毫无作用。因为缺乏分化并不总是意指内涵居于首位。不过，只要它是指一个整体以及(通常说来是)一个唯一的特性，那么“所有的”就表示一个集合实体的特征，而不是这个集合的成员的数量限定。这就是“有些”和“所有的”之间的分化(见第3节)表现得如此困难的原因。“所有的”这个词语还没有获得一个纯粹表示数量(虽然是逻辑的和非数字的)之符号的特征；这就意味着“有些”同一个模糊的概念有着密切的联系，因为“有些”的真正的数量意义是同表示数量之“所有的”有着功能上的联系的。最后，由于缺乏这种数量限定，包含的关系也就缺乏任何可能具有的意义了。在这一点上，我们发现那不过是该整体之性质区分的问题罢了。

于是，第Ⅱ阶段的受试者的各种各样的反应显示了深刻的统一性。由于这种统一性不够明显，所以我们便仅仅将分析限定在初步的分类行为方面。在类包含的困难的下面，还隐藏着一些机制的问题，而这些机制同非图形集合的外延和内涵之协调问题是有着密切关系的。

第四章 类包含和等级的分类[①]

第二章的非图形集合，乃是具有包含结构之类别的最接近的先兆。这些类别的结构意味着彻底地掌握了“所有的”和“有些”的意思，在上一章中我们已经看到了这一点。我们现在便能够转向对于其特征为类包含的第Ⅲ阶段的讨论。我们将描述有关从第Ⅱ阶段向第Ⅲ阶段过渡的一些新的实验。

我们已经知道儿童在协调外延和内涵方面所碰到的那些困难，所以我们的分析将限于儿童的分类行为。我们也将努力阐明他如何来理解一个类别(或集合)的外延，即在确定外延的数量方面他取得了多大的成功。但这一次我们将不采用含有“所有的”和“有些”的问题。这些问题对读者来说是乏味的，对儿童来说是厌烦的(事实上，那个问题是我们的受试者表现出真正不感兴趣的唯一的问题!)。于是，我们选择了下列形式的问题：假定一个类别 A 包含在另一个类别 B 之中，A 与 B 的整体不相等，那么，是 A 比 B 多还是 B 比 A 多?

可以把这个问题搞得非常具体。第二章中的最后那位受试者(7 岁整的卡拉)告诉我们，由四只鸟(A)和两座屋子(A')组成的六个小玩具“都是动物”，而且它变成“六个动物”(B)。然而他说，鸟比动物多，即 $A>B$ 而不是 $A<B$! 这种类型的问题构成了早先一个实验的论题，而那实验的器材是圆形物体[②]。益发使我们感兴趣的是，目前的这些受试者自发地进行他们自己的分类这一事实，是否影响那些结论。

不过，为了避免可能会出现的一些误解，我们应该首先消除一个小的反论。我们已经看到，“所有的 A 是 B”在第Ⅱ阶段时倾向于被理解为“所有的 A 是所有的 B”。现在我们要问，是 A 比 B 多还是 A 比 B 少(当然，“所有的 A 都具有 b 的特性”)。但是，当儿童在回答第三章的那些问题——“所有的圆形(A)都是蓝颜色的(B)? ——不，因为也有蓝色的正方形(A')”时，他所要否认的恰恰就是这一点。我们期待第Ⅱ阶段的受试者说 A 比 B 多(如果 $A>A'$)，虽然按理他应该说数量一样多或少些(如果他们的答复符合于第三章的那些答复的话)。所以，对于第三章中描绘过的有关“所有的”和“有些”那些问题的答复，同对于以 A 和 B 的数量关系为基础的那些问题的答复之间看来有着矛盾。

---

① 与万·邦、B. 马特隆、B. 雷蒙-里佛(Reymond-Rivier)合作。

② 让·皮亚杰和 A. 斯泽明斯卡(A. Szeminska)：《儿童的数概念》，第八章。

不过，这种矛盾纯粹是形式性的。在这两种情况下，儿童的陈述都不能从字面上来理解；而且都是否定的那一面才具有意义。当第Ⅱ阶段的儿童在答复“所有的A是B?”时，他并没有看清“所有的A是有些B”这个关系，这就是他不能理解包含的原因。在答复“是A多还是B多?”时，他不能将A和B作比较，他是将A和A'来比较，其原因正在于他还没有掌握类包含。当他正确地用数目表示B时，他并没有意识到A和A'(于是“所有的”便正确地用于B而不涉及B的分割)。或者，他能够比较A和A'，而忘记了B(以致“所有的”，甚至“有些”被正确地运用于A)。但他不能比较A和B。他不能同时考虑部分和整体(原因恰恰是他不能处理包含)，这既在“所有的”之不正确的用法中得到表现，又在错误的数量限定中得到反映。于是儿童很容易同意所有的A具有b的特征这一质的说明，甚至当问题以纯粹的数量关系“所有的A是B?”来呈现时，他还是感到困惑。这是由于他对“所有的”这个词语的掌握缺乏准确性的缘故。

1. 对于(混杂于其他一些物体的)花的分类

这一实验利用了二十幅图画，其中四幅是彩色物体，十六幅是花。十六幅花中，八幅是报春花，其中四幅是黄色的，其余的是四种不同的颜色。这种安排形成下列包含次序：

A(黄报春花)$<B$(报春花)$<C$(花)$<D$(花和其他物体)。我们也使用了几何模型，以便同已经描绘过的前面的实验作比较。几何模型由下列类别组成：A(红色正方形)$<B$(红色圆形和正方形)$<C$(各种颜色的木制模型)$<D$(木制模型和玻璃模型)。

提出下列问题，其顺序以相应的罗马数字来表示：

(1) 自发的分类。(Ⅱ)有关包含的一般问题：如果要你把所有的报春花集成一束，那么你是不是要用这些(蓝色报春花)?(Ⅲ)有关类包含的四种类型的问题：(ⅢA)由所有的……(如黄色报春花)所组成的这一束比由所有的……(如报春花)所组成的这一束大些？或小些？或一样大?(ⅢB)是……(报春花)多些，还是……(花)多些?(ⅢC)如果你拿了所有的……(报春花)，还剩下……(花)吗?(ⅢD)如果你拿了所有的……(花)，还有……(报春花)剩下吗?

这里是一些第Ⅰ阶段和第Ⅱ阶段的例子，在这两个阶段，受试者对于(Ⅲ)组的问题都不能作正确的答复。他们通常也不能正确地回答比较简单的类型Ⅱ的问题，要不然就是不能将他们的答复同后面的那些(类型Ⅲ的问题)相协调。

盖依(4岁9个月)　问题Ⅰ：他将四幅黄的和两幅蓝的报春花放入类别A，又加上其他一些蓝色的花；然后用一幅粉红的报春花，另一幅粉红色的花和一幅樱桃花组成A'：“**粉红色的花相配**”；铃兰和绿色的帽子组成C'(他对铃兰的绿色梗评论说)：“**这些颜色很好看**。”问题Ⅱ：“能够把(这)放进(由这些组成的)这一束中去

吗?”无论问题怎样，他总是回答“可以”。这意味着A能够是$B(=A+A')$的部分，A'是A的部分，而B是A的部分，也是A'的部分，等等。问题Ⅲ：在其三种形式中的任何一种都不被理解。

法夫(5岁4个月) 问题Ⅰ：所有的报春花以及其他黄色和橙色的花都归入A；其余的花形成A'，其他的东西组成B。问题Ⅱ：所有的答复都是否定的。问题Ⅲ：“报春花多还是黄色的报春花多?”——“报春花多。”

坦尔(5岁8个月) 问题Ⅰ：他先根据颜色对这些东西加以分类，随后把报春花归入A，剩下的花为A'，其余的物体为B'。问题Ⅱ：“我能把一个(A')放入(A)吗?”——“能，那是花。”——“能将一个(A)同(A')放在一起?”——“能，它也是花。”——“粉红色的花(A')是报春花(A)吗?”——“是的，你能把所有的花放到一起。”于是坦尔接受了类别A和类别A'的混合，但并不理解($A<A+A'$)的包含关系。问题Ⅲ：“这里是黄报春花多还是报春花多?”——“黄报春花多。”——“报春花多还是花多?”——“花多(但他指向A'，而不是指向$A+A'$)。”

布里格(6岁2个月) 问题Ⅰ：所有的报春花为A，剩下的花为A'(不过这些花放在报春花的附近，并仔细地配了颜色)；其他的东西组成B'。问题Ⅱ：对所有的问题都作否定答复。问题Ⅲ：“一个小女孩把所有的黄色报春花集成一束，要不她就用所有的报春花集成一束。这两束花中哪一束大些?”——“黄色报春花那一束大些(他数了数另外的一些)。哦，不，一样的($4=4$)。”——“一束报春花和一束所有的花，哪束大些?”——“它们一样(他将A类的8个成分同A'类的8个成分相比较)。”

拉普(6岁4个月) 问题Ⅰ：将黄报春花和其他黄花归为类别A，蓝报春花和其他蓝花归为A'，樱桃花和剩下的花归为B'，其余的东西为C'。“让我看看哪些花最相像。”——(他指向四枝黄报春花。)——“哪些比较相像?”——(他指向另四枝报春花。)——“让我看看所有的报春花。”——(正确。)——“所有的花。”——(正确。)问题Ⅱ：“这枝(粉红的)报春花是不是这些(黄报春花)中的一枝?”——“不，它不是黄的。”——“这一枝(黄报春花)是这些(所有的报春花)中的一枝?”——“是的，它也是报春花。”——“如果一个小女孩将所有的花集成一束，她能不能把报春花放在里面?”——“能。”——“她能把这(粉红的郁金香)放进一束报春花中吗?”——“不能。”问题Ⅲ：“那么，是花多，还是报春花多?”——“两者一样。”——“报春花多还是黄报春花多?”——“都一样。”

里克(6岁6个月) 问题Ⅰ：将所有的报春花和黄色的花归为A，其余的花(按颜色加以组合)归为A'，其他的物体为B'。后来他把其他黄色的花移到A'。问题Ⅱ：“我能把(A')中的一个放进(A)吗?”——“不，它不是报春花。”——“一枝(A)是不是这些($B=A+A'$)中的一枝?”——“是的，一枝报春花也是花。”——“那是不是说，我可以把报春花放进一束花中?”——“是的，你能把一枝报春花放进一

大束中。"问题Ⅲ:"我怎样来集一大束呢,是拿报春花还是拿黄色的报春花?"——"它们都一样。"——"拿花还是拿报春花?"——"一个样。"

在有关问题Ⅰ的简单分类中,我们可以看出受试者始终在不断地向着逻辑安排的方向发展。这些受试者中最不成熟的盖依所安排的只不过是四个平行的小集合,而且他的标准也有波动不定的倾向。(虽然他将报春花放在一起,但他将其他蓝色的花加进蓝报春花之中,而他的另一个集合的基础又只是颜色,等等。)法夫也是依据相近的标准对花作了安排。但从坦尔开始,我们发现,我们的年龄较大的受试者在他们的第一次或第二次尝试中,都能够自发地构造一些集合,而这些集合的逻辑标准显然是不同的:A =报春花;A'=其他的花;$B(=A+A')$=所有的花;B'=其他的物体;$C(=B+B')$=所有的物体。我们要确定这些分类是否相当于一个真正的"组合"。它既要有包含又要有可逆性($A=B-A'$,等等),或者说,它是否只是一组非图形集合,因为它没有类包含。

类型Ⅱ的那些问题为这一点提供了一些资料,在这方面,我们所得到的那些答复并没有达到明显的分类水平。我们可以区分三个小阶段:在第一个小阶段,所有的物体都是任何其他物体的一部分(盖依),或者,没有任何东西是任何其余物体的一部分(法夫和布里格,虽然布里格的自发分类暗示了一个较高的水平)。在第二个小阶段(坦尔),受试者同意联合 A 和 A' 以获得 B,但他并不理解,虽然所有的 A 是 B,但并非所有的 B 都是 A。在第三个小阶段(拉普和里克),受试者似乎理解了类包含的关系。例如,在里克说报春花"也是花"时,他似乎已经构造了 $A<B$ 的关系;而且他对于下一个问题(一个 A' 是 A 中的一个吗?)所做的答复看来也进一步证实了这一点。

不过,类型Ⅲ的那些问题显示,这些受试者都不能对于部分 A 和整体 B 作真正的数量比较。其原因是,为了比较 A 和 B,他就需要将 B 分割为 A 和 A' 而仍然要保留它的同一性。换言之,$A<B$ 的关系蕴涵着反演关系 $A=B-A'$,以致即使当整体 B 在思想中被分割成它的组成部分 A 和 A' 时,这个整体 B 依然还是存在。然而实际情况是,一旦将它们分离开来,我们的受试者便看不到 B 了,这就是他们之所以将 A 和 A' 作比较的原因之所在。有些受试者(如法夫)认为报春花(A)比花(A'=其他的花)多些;另一些受试者认为 A' 比 A 多些(坦尔);还有一些受试者则相信它们一样多(布里格,拉普里克)。①

这个反应是十足的第Ⅱ阶段的特征,但在这里,使人感到兴趣的是,类型Ⅱ的那些问题居于类型Ⅲ的那些问题之前,而且这应该使后者变得容易回答些。此外,目前的这个实验不同于前面那个用模型做的实验,在那个实验中,A 和 A' 的数量是相等的(同我们的四枝黄色报春花和四枝其他颜色的花等相比较,在前面的那个实验中,这些类别的比率是 10 比 1 或 2)。为什么会有如此多的受试者(如拉普和里克)对于类型Ⅱ的问题回答正确而对类型Ⅲ的问题答复错误呢?我们不能接受这么一种解释,即他们不理解

① 当然,A 和 A' 也可以代之以(包括在 C 中的)B 和 B' 等。

我们使用的语言。在每一个事例中，我们对于他们的所为都非常留神。① 另一方面，如果说存在着一种系统的言语方面的误解，那么，这本身就需要用逻辑结构来加以解释。第三章的结果提到，如果第Ⅱ阶段的儿童对类型Ⅱ的问题做出正确答复，那么他是在作定性的思维，至多是处于定量思考的中途：黄色的报春花之所以属于报春花，是因为“它们是报春花”。我们的受试者只能得到空间的外延（“你能够把一枝报春花放进那大束里去”）。正像我们在第三章中所看到的那样，“所有的”在那时变成了一种内涵的性质，它附属于被看作为一个单元的整体。当不得不处理严格意义上的外延时，儿童便要出错。这意味着，他在解决类型Ⅱ方面的成功是有着严格的限度的。类型Ⅲ的那些问题无须依据外延来加以回答，这一点是至关重要的。因为类包含的本质特征在于这么一个事实，即这个关系要产生外延的等级结构。所以，它的范围与仅仅的质的分化有着相当大的差别。

然而，有一个方面的情况却是自相矛盾的。在错误地回答问题ⅢA和ⅢB的那些5—7岁的受试者中，50%—90%的人正确地回答了问题ⅢC和ⅢD。同一个儿童一方面告诉我们在一束花中的报春花比花多；而另一方面却又承认：如果他采了花园中所有的报春花，花园中还是有一些花存在，但如果他采了所有的花，那么报春花也就剩不下了。

泰依（5岁6个月） “如果我用所有的报春花集成一束，你用所有的花集成一束，哪一束大些？”——“你的。”——（选择四枝报春花和四枝其他的花，问题重复。）——“它们是一样的（$A=A'$）。”——“如果你在田野里采了所有的报春花，那里还有花留下吗？”——“是的”。——“现在，假定你采了所有的花，那么还有报春花剩下吗？”——“是的，……不。”——“为什么？”——“因为你拿了所有的花。”——“好。如果你采了所有的黄色报春花，还有报春花剩下吗？”——“是的，紫红色的报春花剩下。”——“如果你采了所有的报春花，还有黄色的报春花剩下吗？”——“不，因为你拿了所有的报春花，那就什么也不剩了。”不过，对于包含的数量问题仍然未能解决。

奥巴（6岁9个月） “在这一束中，报春花多还是花多？”——“报春花多，因为这里有两枝（其他的花），有三枝（报春花）。”——“这一束中，黄报春花（二枝）多还是报春花多（三枝）？”——“黄报春花多，只有一枝紫红的报春花。”——“你在田野里采了所有的报春花，还有黄色的报春花剩下吗？”——“不。”——“如果你采了所有的黄报春花，还有报春花剩下吗？”——“没有。”——“在这一束中，报春花多还是黄色的报春花多？”——“黄色的多些，因为有两枝黄的，一枝紫红的。”

迪姆（6岁6个月） “假如你采了田野中所有的花，还有报春花剩下吗？”——

① 用模型做的那个实验由巴黎的一些教育心理学家重复进行，实验器材是葡萄（“是葡萄多，还是黑葡萄多？”等等），他们得到了类似的结果。

"不，我已经把它们都采了。"——"如果你拿了所有的黄报春花，还有报春花剩下吗？"——"是的。"——"如果你拿了所有的报春花，还有花剩下吗？"——"是的，还有一些菊花，一枝玫瑰花。……"——"如果你用所有的花集成一束，我用所有的报春花集成一束，哪一束大些？"——"你的。"

虽然其中有些答复仍然有错误（如奥巴对于报春花和黄报春花的回答），但它们通常是正确的，尽管同样的这些受试者始终否认一个集合（"所有的花"）比一个子集（"所有的报春花"）大些。初看起来，这似乎同我们的假定——他们不能在 B 被分割的情况下比较 A 和 B（所以他们便比较 A 和 A'）——是矛盾的。实际上，它看来似乎同第三章的所有发现都矛盾。人们会很容易地提出这样的论证，即不仅对于问题ⅢA 和ⅢB 的答复是错误的，而且在"所有的"和"有些"的使用上也有不当之处，而所有的这些都是言语误解的事例。当问题以一种具体的熟悉的方式加以系统地阐述，受试者似乎就能够掌握类包含，而且他似乎也能理解 $B-A=A'$（花减去报春花等于其他的花）这个减式。

我们在用珠子做实验时发现了同样的情况。[①] 我们让儿童看一只盛有红色珠子的盒子，其中有些是圆的，有些是四方的，并问他："如果你从这个盒子中拿去所有的红色的珠子，那么还有四方的珠子剩下吗？"当然，他的回答是"不"。如果问他："如果你拿走四方的珠子，还有红珠子剩下吗？"通常他回答圆珠子会剩下。他还会继续说，四方的珠子同圆珠子一样多，甚至比圆珠子还多些。尽管事实上他自己能够看见所有的珠子都是红颜色的，而且他的叙述也是明确的。

实际上，"如果一个人拿走所有的报春花（B），那么就没有黄报春花（A）剩下"（陈述1）和"如果一个人拿走黄报春花（A），那么将剩下紫红色的报春花（A'）"（陈述2），这两种陈述都表达了运用于类别 A、A' 和 B 的那些运算：$A+A'=B$ 和 $B-A=A'$。儿童们是这样认为的吗？如果要证明确是如此，人们就得表明 B 还是保留在儿童的思想之中，即那个表面的逻辑的相减实际上是表面的相加的反演。现在，我们从陈述（1）中所得知的所有的东西是，B（报春花）具有两个不同的部分 A（黄色的）和 A'（紫红色的），而且拿去整体便意味着将这两个部分都拿走。陈述（2）仅仅暗指，当 A 部分被拿去时，A' 部分将剩下。它不一定就暗指，尽管做出了那样分割，但 B 仍然保有它的作为这两个部分之联合的同一性。只有在不出现（a）诸部分的流动，（b）诸部分转换（＋和－）的可逆，或（c）整体 B 仍然守恒等情况下，$A+A'=B$ 的联合才能存在。但是，除非所有这些情况都呈现在思想之中，否则这样的一种联合便仅仅相当于对某一由一些不同部分组成的集合之直观的统觉。只有当所有这三种情况都出现时，我们才有理由谈运算的相加。唯一具有决定意义的检验是，要求受试者将 B 的外延和 A 的外延作比较。如果他

① 我们不想详述用珠子做实验的细节，以免使读者感到厌烦。我们所观察到的阶段与用花来做实验是相同的；而且这些阶段出现的平均年龄也是一样的。$A<B$ 和 $B<C$（前面只研究过 $A<B$）的包含的数量关系也是相似的。如果说有差别的话，那也仅在于用圆珠的实验要略微容易些。

认识到，在一束之中报春花比黄报春花多，那么，他肯定就意识到 B 乃是 $A+A'$ 之和，同时也意识到 A 是 $B-A'$ 之差。这种同时的意识乃是运算思维的特征，它蕴涵有整体 B 之守恒的意思。一个第Ⅱ阶段的受试者能够直观地知道整体是其部分之联合（陈述1），以及一个部分不同于另一个部分。即使如此，他还是不能将部分之外延同整体之外延作比较，对于这一点，人们是不会感到奇怪的。因为这种比较并没有在陈述(1)和陈述(2)中得到暗示。受试者只能成功地将 A 和 A' 作比较（因为 B 暂时地不存在），这一事实表明，陈述(2)并没有达到逻辑的类别相减，而只是表达了 A 和 A' 的直观的分离。

如果不能解决包含的问题，那么最常见的错误就是将 A 和 A'、而不是将 A 和 B 作比较。但这并不是唯一可能出现的情况。将 B 变化为 A' 并不总是自动的和无意识的：它可能受到这么一个事实的推动，即人们不能以两种不同的方式来利用同样的那些成分。例如，一个儿童可能会说："如果我将报春花(A)集成一束，由花(B)组成的那一束将不再保留任何报春花，因为它们已经在第一束之中了。"（于是，透过有意识地减去 A，B 变成 A' 了。）我们可以作一点补充——如果 A' 比 A 的数目多，受试者似乎便常常做出正确的答复，尽管在他告诉我们说 B 比 A 多时，他的实际意思是指 A' 比 A 多，他只不过是把 A' 叫作 B 罢了。

更为有趣的是下列两种回答。第一种答复看起来正确，但实际上却是错误的。受试者同意 $B>A$，其基础是 B（相当于 A'）的组成成分的种类多于 A（"有好几种颜色"）。当然，即使整个的 B 类参与其中，这也不是包含；因为它不是作为一个较高等级的类别加以考虑的，而仅仅被看作为一个多种类别的联合。第二种是，在有些情况中，当儿童对"是 A 多，还是 B 多"这个问题作"它们都一样"的答复时，他并不是在考虑 A。他之所以说它们一样多，是因为他认为，"如果所有的 A 是 B"，那么"所有的 B 就是 A"。这便是在第三章第1、2两节中讨论过的谓语之不正确数量限定的一个明显的事例。

这里有两个确定 A 和 B 相等的受试者的例子。

珀尔（8岁3个月） 已经构造了三个类别：黄报春花，报春花和花。"能把一枝报春花放进花的盒子中（而不改变其标签）吗？"——"能，报春花也是花。"——"我能把这些花中的一枝，如郁金香，放进报春花的盒子里去吗？"——"能，它是一枝像报春花的花。"当实验者这么做时，她改变了想法，并把它放回到其他的花那儿去。"一个人想要集成一大束，它用所有的花来集呢，还是用所有的报春花来集？"——"一回事。报春花是花，不是吗？"——"假定我采了所有的报春花，还有花剩下吗？"——"哦，是的，还有紫罗兰，郁金香和其他的花。"——"假如我采走所有的花，还有报春花剩下吗？"——"不，报春花是花。你也把它们采了。"——"花多还是报春花多？"——"一样多。报春花是花。"——"数一数报春花。"——"四枝。"——"花呢？"——"七枝。"——"数目一样吗？"——"（惊讶。）花多些……"

帕格（8岁11个月） "如果你要集一大束花，是用所有的报春花来集呢，还是用所有的黄报春花来集？"——"都一样。"——"你的意思是什么？是一样的数

目?"——"是的,报春花也是花。"

这两个例子都支持了对于有关"所有的"和"有些"那些实验获得的结果所做的解释(见第三章第1节)。

现在我们便列举几个第Ⅲ阶段的例子。

符伯(6岁11个月) 问题Ⅰ:很快地就构成一些类别:A=黄报春花;A'=其他的报春花(在A的下面);B'=其他的花(在A和A'的旁边,显示B乃是报春花的类别);C'=樱桃(离花较远);D'=其他的物体(分开放,显示C'是花的类别,D是花和果的类别)。问题Ⅱ:"能够把一个(A)放进这些(B,指$A+A'$)中吗?"——"能,它是报春花。"——"如果将报春花(B)放进花(C)中呢?"——"能,它是花。"问题Ⅲ:"一个小男孩拿了所有的花,另一个小男孩拿了所有的报春花,谁的花束大些?"——"那个拿了所有花的小男孩(表明集合$C=A+A'+B'$)。"——"一个人拿了所有的黄报春花,另一个人拿了报春花,谁的花束大些?"——"那个拿了这些($A+A'$)的人的大些;他有所有的报春花。"

迪德(7岁5个月) 问题Ⅰ:先作如下分类:A=黄报春花;A'=其他的报春花和一枝橙色的花;B'=其他的花;C'=其他的物体。"这对吗?"——"不,这一枝(在A'中的橙色的花)不是真的合适(他将它放入B'中)。"问题Ⅲ(在Ⅱ之前提出):"如果一个小男孩想采所有的花,另一个小男孩想采所有的报春花,谁的多些?"——"两个人一样多:他们都是八枝。"(这显示了第Ⅱ阶段的残迹,这同他最初的分类错误是一样的。)——"一个人想采所有的报春花,另一个人想采黄报春花,谁的多些?"——"那个拿所有花的人;因为他也拿了黄报春花。"问题Ⅱ:"能把一枝(A)放进这些(B)中吗?"——"当然,它是一枝报春花。"——"这一枝(橙色报春花)放进这些(A)中呢?"——"不行。"——"可以把报春花放进由所有的花组成的那一束中吗?"——"能。"——"这一枝(蓝色的花)呢?"——"当然。"——"我能把一枝铃兰放进这些($A+A'$)中吗?"——"不,它不相同。"问题Ⅲ(重复):"所有的花还是所有的报春花?"——"那个拿了所有花的人也拿了报春花,所以他的多些。"

格尔(7岁6个月) 问题Ⅰ:A=黄报春花;A'=其他的报春花;B'=其他的花;C'=其他的物体。问题Ⅱ:"如果你用报春花集成一束,你也能把一枝(A')放进去吗?"——"能,那也是报春花。"——"一枝(A')放进这些(B)中呢?"——"不,它们不配。"——"你能把这些(A)放进由所有的花集成的那一束中吗?"——"当然可以,它们是花。"问题Ⅲ:"花多还是报春花多?"——"花多。这些($A+A'+B'$)包括了这些($A+A'$)。"——"报春花多,还是黄色报春花多?"——"报春花多,这些($A+A'$)包括那些(A)。"

雷一(8岁2个月) 分类同格尔的完全相同。问题Ⅱ:"能把一枝(A)放进这些(C)中吗?"——"当然,它是花。"——"一枝(B')放进这些(B)中呢?"——"不行,那不是同一种花。"——"一枝(B)放进这些($C=B+B'$)中呢?"——"可以,一枝报

春花仍然是一枝花!"问题Ⅲ:"报春花多还是花多?"——"花多。"——"报春花多,还是黄报春花多?"——"报春花多。"

特里夫(8岁6个月) 同上;对问题Ⅱ回答正确。问题Ⅲ:"一束所有的报春花,一束所有的黄报春花,哪束大些?"——"所有报春花那一束大些。"——"为什么?"——"因为那是所有的报春花。"——"假定你用所有的花集成一束,我用所有的报春花集成一束,谁的大些?"——"我的。"——"你要拿哪些?"——(正确地指向 $A+A'+B'$)"所有这些。"——"这里是花多(指向所有的东西)还是报春花多?"——"花多,是的。"——"树林里怎么样(一个前面未曾提过的新问题),那里是花多,还是报春花多?"——"报春花多。"——"假如有一个人采走了所有的花,还有报春花剩下吗?"——"一枝也不剩。"——"那么树林中是花多还是报春花多?"——"报春花多。"——"如果我拿走所有的黄报春花,你拿走所有的报春花,谁的花多些?"——"我。我将有这里(A)和那里(A')的所有的报春花。"——"数一数它们。"——"不(几乎等于说,不是那回事),报春花多些!"

阿尔(9岁2个月) 分类和对问题Ⅱ的回答都正确。问题Ⅲ:"一束所有的报春花,一束所有的黄报春花,哪一束大些?"——"当然是所有的报春花。你也得拿所有的黄报春花!"——"所有的报春花和所有的花呢?"——"如果你拿所有的花,你也得拿报春花。"

无须说,对于问题ⅢC和ⅢD的回答常常也是正确的。

在5—10岁的69名受试者中,正确回答的百分比如下。$A<B$ 栏表示问题:"在这一束中,报春花多还是黄报春花多?"$B<C$ 表示问题:"花多还是报春花多?"

表Ⅳ 正确回答有关花的类包含问题的百分比①

年 龄(受试者人数)	5—6(20)	7(19)	8(17)	9—10(13)
$A<B$	30	38	67	96
$B<C$	46	47	82	77
上述两个问题	24	26	61	73

下面是关于问题ⅢC和ⅢD的结果。$\overline{B}A$ 表示:"如果所有的 B 都被采去,还有 A 剩下吗?"$\overline{A}B$ 表示:"如果所有的 A 都被采去,还有 B 剩下吗?"$\overline{C}B$ 和 $\overline{B}C$ 表示有关 B 和 C 的相对应的问题。

① 在受试者之间,回答的总数略有差别。

表Ⅴ 对于 $\overline{B}A$,$\overline{A}B$,$\overline{C}B$,$\overline{B}C$ 问题作正确回答的百分比

年 龄	$\overline{B}A$	$\overline{A}B$	$\overline{C}B$	$\overline{B}C$
5—6 岁	71	83	71	71
7—8 岁	66	75	85	88

我们注意到,8 岁和 8 岁以上的受试者明显地不同于第Ⅱ阶段(5—7 岁)的受试者。他们不仅以一种附加组合的形式正确地加以分类,而且还认识到那个结构所暗指的包含($A+A'=B$;$B+B'=C$;$C+C'=D$)。对第Ⅱ种类型的问题不再出现任何困难。此外,同第三章(第 1 和第 2 两节)的情况一样,在这种情境中,第Ⅲ阶段的受试者能够将一个部分的外延同整体的外延相比较。这意味着,虽然整体在思想中被分割为它的一些组成部分,但整体还是守恒的。许多答复是相当明显的。例如迪德说,"那个拿走所有的花的人(有的花将多些),因为他也拿了报春花"。外延最终同内涵协调起来了!

然而,这些受试者的推理也有大大落后的时候。一个受试者(如特里夫)对于放在他面前的那些物体可以做出相当正确的推理,然而,如果人们要求他将有关花和报春花的包含关系运用于"树林里",他就做出类似于前面的那些不正确的推理!虽然特里夫毫不犹豫地告诉我们,在他面前的那些东西中"花比报春花多",但他却将生长在树林中的报春花同其他那些花(非报春花)作比较,而不能将报春花的类别同包括这个类别的较高等级的花的类别作比较。然而,他却能解决问题ⅢC:"假如有人采了(树林中的)所有的花,还有报春花剩下吗?"这引起了一个问题,而这个问题将在下一节着手处理。

2. 对于动物的分类

向另一组儿童提出三种类型的问题(见第 1 节),这组儿童的总人数是 117 名,这个实验同前面实验的唯一差别是,我们利用了动物的图片,而不是花的图片。这组儿童的年龄是七至十三、十四岁。将这些实验结果分离开来的原因是,它们落后于上面已经讲过的那些结果,尽管那些阶段基本上是相同的。这里有一个值得注意的实例,它说明,具体运算推理的出现非常紧密地依靠于它的内容之直观的特征。我们得了解之所以如此的原因。对于形式运算来说情况似乎并非如此。

当利用动物的图片来做实验时,便得到不同的结果。这一情况肯定是由于下列事实——这些类别比较远离日常的经验,因而就比较抽象。确实,圆形、正方形,或报春花和花是用词语来标示的(这些词语引起一般类别的一些概念),因而它们是抽象的。但是,儿童们在五至九岁期间要玩弄一些圆形和正方形,而且,除非他们居住在城市,否则他们会经常在花园中或在远足时采花或报春花。现在使用鸭子或其他的鸟和动物的图

片，如果问题仍然局限于桌子上的那些实际的图片，这将造成细小的差别。每一幅图片都代表了一个非常熟悉的对象，所以在称呼它们时将毫无困难。这当然没有明显地涉及在这个名称后面的高度概括的概念结构。但事实上(这是我们“事后”的对于结果的解释)，儿童并不能仅仅依靠从他自己的行动中抽取的经验来说出鸭子是鸟，鸟是动物，这同他能说出他画过的圆形和正方形以及他采过的花是不同的。他得在很大的程度上依靠纯粹的言语概念，而这些概念之构造和发展则需要他在实际经验的过程中来完成。这就解释了时间滞差的原因。我们面临的问题实际上是：引进这种材料(它是有限的和可感知的，但却依赖于比较抽象的知识)的作用是什么？说得比较详细一点就是，同前面的那种使用比较容易掌握的物体的实验相比较，这个实验在等级的分类和类包含的数量关系方面有什么差别。

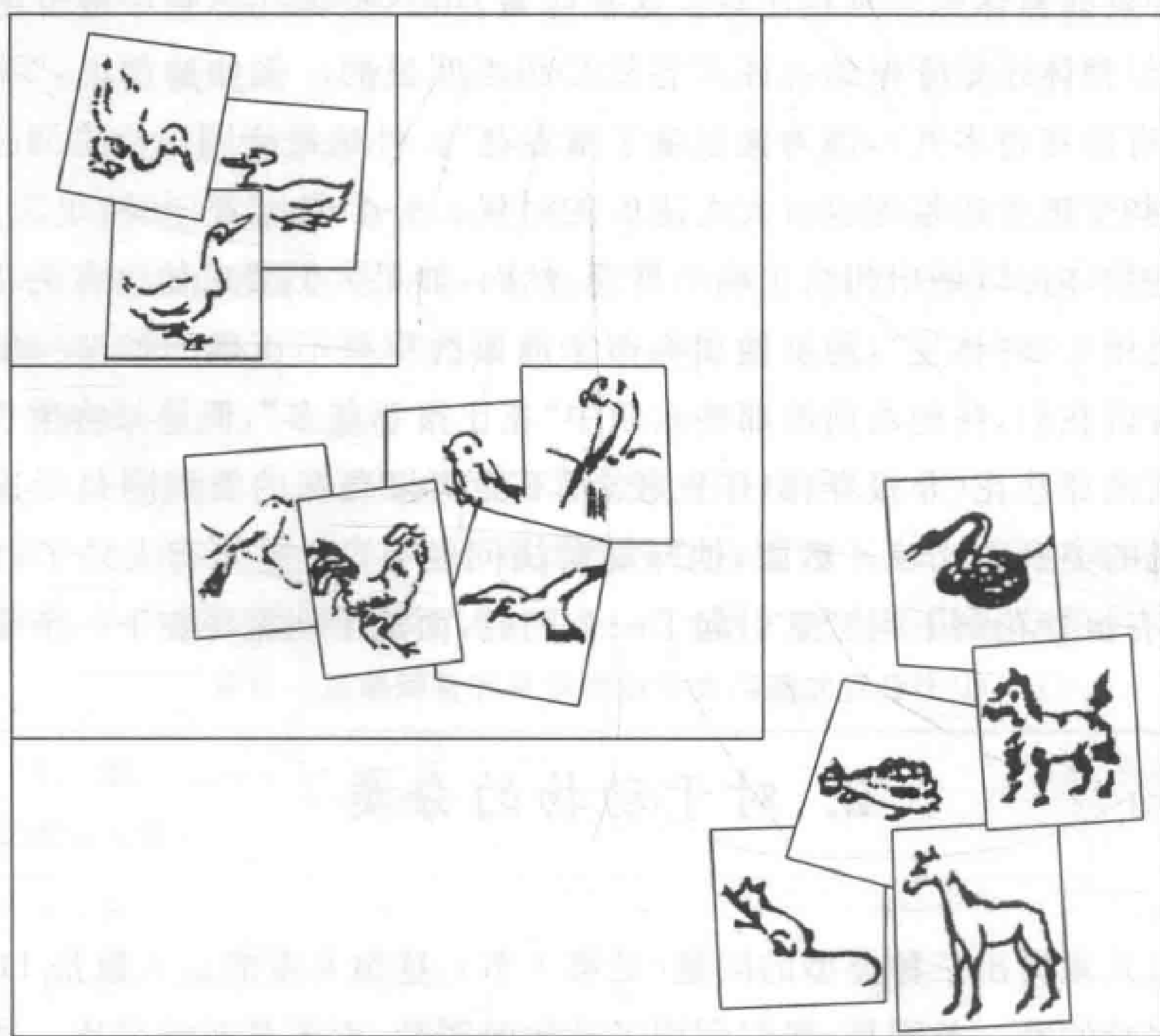


图 9

该研究的这个部分使用了下列物体：(1)第Ⅰ组包括三只或四只鸭子(类别 A)，三至五只鸟(类别 A'：公鸡，麻雀，鹦鹉等)，五个不是鸟的动物(类别 B'：蛇，老鼠，鱼，马，长卷毛狗)。图 9 说明了这组物体。最基本的类别①是鸭子(A)，鸟(B)和其他动物(C)。(2)第Ⅱ组包括三只鸭子(A)，四只其他的鸟(A')，四只不属于鸟的有翼的动物(B'：蜜蜂，蝴蝶，蜻蜓和蝙蝠)，三个非动物的物体(D')。这里的最基本的类别是鸭子

---

① 这些最基本的类别是界说包含顺序的那些类别：$A<B<C<\cdots$，次级类别是由这个顺序界说的那些补充：$A'=B-A, B'=C-B, \cdots$

(*A*),鸟(*B*),飞行动物(*C*),动物(*D*)以及总的类别(*E*)。我们使用了不同体积的透明的盒子(用透明的盒子是为了使那些关系可以感知到),而体积小的盒子可以装进略大于它的盒子里面去,以便使它们同那些最基本的类别(*A*,*B*,*C* 等等)相对应。每当一个类别根据物体定了名称之后,这个名称就写在透明的标签上。谈话的过程与利用花做实验的过程(参见第1节的开始部分)完全相同。特别强调的问题是"能不能将 *A* 放入 *B* 或将 *B* 放入 *A*?"

我们发现,在第Ⅲ阶段后半期之前,无论是等级的系统($A<B<C$,等等)还是包含的数量限定都没有被适当地理解。许多受试者在接近形式运算阶段时才显示出这种理解。有些在回答其他问题时表现出第Ⅲ阶段的水平的受试者,在处理有关动物的问题时,所做答复的水平往往只相当于对其他问题所做回答的第Ⅰ阶段的水平。我们将用 *D*Ⅰ,*D*Ⅱ,*D*Ⅲ[1]来表示在动物实验中所发现的那些阶段,这些阶段落后于在其他情况下所发现的那些阶段。

于是,*D*Ⅰ的特征是,初步的分类不适当,而且不能理解外延的关系;然而,对于问题Ⅲ*C* 和Ⅲ*D* 的回答可能会部分的正确。

毕叶(7岁11个月) 第Ⅰ组。"这是……中的一个?"——"动物。"——"你能分成两堆吗?"——(她将鸭子放在一边,将其他的动物放在另一边。)——"现在,你能将这些(其他的动物)分成两堆吗?"——"能,鸟和动物(似乎鸟不是动物)。"——"鸭子是鸟吗?"——"是的……不是。"——"它们都有羽毛吗?"——"有。"——"如果我将它们都放进这个盒子里,你在标签上写什么?"——"动物。"毕叶将鸭子放入 *A*,将其他的鸟放进 *B*。"鸭子是动物吗?"——"是的。"——"鸟是动物吗?"——"是的。"——"能把鸭子(*A*)放进(*B*)吗?"——"不,它们不是鸟。"——"能把它们放入(*C*)吗?"——"不。"——"(*C*)是什么?"——"所有的动物。"——"那么能把鸭子放入(*C*)吗?"——"不能。"

"如果一只狐狸咬死了所有这些鸭子,还有有羽毛的动物剩下吗?"——"有,鸟。"——"如果它咬死了鸭子,还有其他的动物剩下吗?"——"有,鸟、猫(等等)。"——"如果一个人杀死了所有的动物,还有鸭子剩下吗?"——"有……不,它们也被杀死了。"——"如果一个人杀死了所有的动物,还有有羽毛的动物剩下吗?"——"没有,因为他杀死了所有的动物。"

"在这个盒子里,鸟多还是动物多?"——"鸟多。"——"为什么?"——"不,一样多(四只鸟和四个其他的动物)。"

艾思克(7岁6个月) 对于所有动物的分类是:双翼张开的为(1),双翼闭合的为(2),无翼的为(3)。给他盒子以后,他将鸟放进盒子 *A*,三只昆虫和海鸥放进 *B*,无翼动物放入 *C*。"这种分法(*A* 和 *B* 之间分开)行吗?"——"行,因为它们有翅

---

① 符号 *D*Ⅰ,*D*Ⅱ,*D*Ⅲ同类别 *D* 没有任何联系。字母 *D* 表示"推迟"的意思。

膀。"但他不同意把海鸥放到鸟那里,还坚持说鸭子无翼。他同意鸟是动物。"在这个盒子里,鸟多还是动物多?"——"动物多,不,鸟多。"

梅一(8岁10个月)"将相同的动物分离开来并摆在一起。"——[四堆:(1)鸭子;(2)其他的鸟;(3)一只猫和一只老鼠;(4)一匹马和一只猫。]——"能将(1)和(2)放到一起吗?"——"它们都是鸟。"——"(3)和(4)呢?"——"它们都是动物。"给了盒子之后,梅一将鸭子放进A,其他的鸟放进B,所有余下的放入C。然后实验者问(实验者利用了可活动的隔板):"能将所有这些都放进(C)吗?"——"能,都是动物。"——"鸭子是鸟?"——"是的。"——"它们是动物吗?"——"是的。"——"能将它们放入(B)吗?"——"能。"——"放进(C)呢?"——"不行。"——"能将这马放进(A)吗?"——"不,这同将鸟放进(C)是一样的(请注意这种错误的互反)。"——"为什么?"——"马不是鸭子。"——"能把这些鸭子放进(C)吗?"——"能,它们都是动物。"

"如果一只狐狸咬死所有的鸭子,还有鸟剩下吗?"——"有。"——"其他动物呢?"——"有。"——"如果它咬死所有的鸟,还有鸭子剩下吗?"——"有。"——"如果它咬死所有的动物,还有鸟剩下吗?"——"没有,它们都是动物。"

"在这只盒子里(四只鸭子和四只其他的鸟),鸭子多还是鸟多?"——"一样多。"——"数一数所有的鸟。"——"连鸭子吗?(同意鸭子是鸟)?"——"所有的鸟。"——"有八只(正确)。"——"鸭子呢?"——"有四只(正确)。"——"鸟多还是鸭子多?"——"一样多!"

斯涛德(8岁11个月) 第Ⅱ组:将图片划分为动物和无生命物体。"你也可以将野生动物集在一起,驯养动物集在一起。或者你能将它们按照大小来划分。"——"放一些到盒子(A)里;当我将隔板拿掉以后,它们必须要与(B)盒里的相配。"——"(A)蜻蜓,蜜蜂,蜘蛛,蝴蝶;(B)较小的动物和鸭子;(C)鸟和蛙;(D)大动物。""如果一个猎人捉到了所有的鸟,还有动物剩下吗?"——"没有。"——"还有蚊子剩下吗?"——"哦,是的;如果你只杀死所有的鸟,那就还有蝴蝶剩下。"——"世界上是会飞的动物多还是动物多?"——"我不知道。"——"这个盒子里的怎么样(共八个动物,其中四个是会飞的)?"——"一样多。"

这些答复很像是4—6岁儿童对于有关花和几何模型问题所做回答的片断。不过毫无疑问,如果用花或几何模型来做实验,这些受试者是能够根据利用了类包含关系的等级的分类结构来正确推理的。

然而,在这里他们却不能回答问题ⅢC(如果拿走了所有的A,还有B剩下吗?)和问题ⅢD(如果拿走了所有的B,还有A剩下吗?)。因此,对于他们不能理解包含之数量关系这一点,人们也不该感到奇怪。

在这个实验中,部分与整体之所以难以比较,是因为这些受试者不能十分清楚地界说动物的类别这一事实。在毕叶看来,鸭子不是鸟;而艾思克却认为鸭子没有翅膀,海

鸥不是鸟等等。自发的分类常常是按照熟悉的特性而不是对于鸟和动物抽象的词语类目来做出的。例如，斯涛德曾提出可以将动物划分为野生的和驯养的，或大的和小的。艾思克的比较有把握的标准是审视这些卡片以搞清这些动物的翅膀是张开的(归并成一个包括了昆虫和海鸥的类别)还是闭合的。最常见的对于动物的分类是划分为飞行的和步行的。但有时也有一些非常奇怪的混合，例如，斯涛德开始时分了一个昆虫的类别，但继而又将鸭子和老鼠放在一起("很小的动物")，将鸟和蛙放在一起。

引导受试者用盒子来构造包含关系也无多大帮助。有时偶尔会给人以一种概括的感觉，如艾思克谈到"有翅膀的动物"($A+A'$)时就是如此。但年幼儿童之屡见不鲜的困难似乎同这个实验所使用的材料有关。梅一正确地拒绝将马和鸭子放在一起，但他却认为将鸭子归入所有动物的那个类别同样也是荒唐的(尽管他最后确实是同意这么做了，但他最初的想法无疑是，类包含是一种互反的关系：所有的 A 是 B = 所有的 A 是所有的 B)。毕叶反对将鸟归为动物，似乎不存在包含这回事；而斯涛德也没有构成任何 $A<B<C<D$ 的等级包含关系。

这些结果再次证明，这种分类并无形式的机制作为其基础。这也是我们称之为具体运算的原因。推理的水平，随着推理内容之特征的变化而变化。除非这些物体很容易归入一个类别的结构，而且在这套结构中，各个类别都很容易根据一个显而易见的感觉标准来加以区分，否则分类就会失败。在这里，儿童并不试图利用一些结构(如果用比较容易的材料来做实验，他们是能够运用这些结构的)，而是退回到用并列的方式来分类，并且犯了与作为早期阶段之特征的错误相同的那些错误。

第二个(即 DⅡ)阶段表现了一定的进步，这个阶段出现在 9—12 岁之间。它乃是第一(即 DⅠ)阶段的彻底的失败与第三(DⅢ)阶段之完全成功之间的过渡。

路易(9 岁 11 个月) 先分成许多相同等级的集合，这些集合并未显示出任何有条理的结构(参见 DⅠ阶段)。但是，在给他盒子以后，他将鸭子归为 A，其他的鸟为 B，其他的飞行动物(昆动)为 C，所有余下的动物为 D。"将这块(A 与 B 之间的)隔板去掉行吗？"——"可以，它们都是动物(鸟)。"——"把这块(B 与 C 之间的)隔板去掉行吗？"——"可以(犹豫地)。它们都是飞的动物。(他将蜘蛛拿出来放进 D。)"——"如果我这里还有一条鱼，你将它放到哪里？"——"放进(D)。"——"世界上是飞行动物多还是鸟多？"——"我不知道。"——"如果你用飞行动物造成一个集合，我用鸟造成一个集合，谁的多些？"——"动物的集合，因为动物比鸟多。"——"能将鸟放到动物的集合里去吗？"——"不能。"——"它们是不是动物？"——"哦，是的。"

贾克(9 岁 1 个月) 将母鸡放进 A 盒，"各种鸭子"(鸭子和火鸡)放进 B，"各种动物"放进 C。"我能不能将这些母鸡也放进中等的盒子(B)？"——"能，它也是鸟。"——"放进这个大盒子(C)呢？"——"能，它是动物。"——"猫怎么样，我能将它放进(B)吗？"——"能，它也是动物。"——"为什么？"——"哦，不，它是动物，但

它不是鸟。”——“这里(B盒中),母鸡多还是鸟多?”——“一样多(四只母鸡和八只鸟)。”——“这里(C)是鸟多还是动物多?”——“鸟多……噢,不!动物多。母鸡也是动物。”——“那只盒子里的母鸡多还是鸟多?”——“鸟多,因为母鸡也是鸟。”——“如果一只狐狸咬死了所有的母鸡,还有鸟剩下吗?”——“不……是的。”——“如果它咬死所有的鸟,还有动物剩下吗?”——“不,是的,有狗。”——“如果一个人杀死所有的动物……”——“不,什么也不剩。”

傅拉(10岁2个月) 将动物分成“飞行的”(B)和“在地上的”(B′),再将鸟分成“飞得好的”(A:鹦鹉和燕雀)和“飞得不太好的”(A′:鸭子和一只公鸡)。“我们怎样来称呼所有这些(C盒)?”——“动物。”——“我能将这块(B与C之间的)隔板去掉吗?”——“不行,这些不都是家禽……能,它们都是动物。”——“我能将蛇放进(B)吗?”——“能,它也是动物…… 不,它不是家禽。”——“我能将这只公鸡放进(C)吗?”——“能,它们都是动物。蛇不是家禽,但公鸡是动物。”对问题ⅢC和ⅢD(“如果拿走所有的B,还有C剩下吗?”等等)的所有答复都正确。“世界上是家禽多还是动物多?”——“动物多,因为家禽也是动物。”——“外面是家禽多还是不会飞的家禽多?”——“我不知道。这两种都很多。”——“(问题重复提出)能告诉我吗?”——“能,不过很困难……哦! 它们都是家禽,所以家禽多。”

蔡思(10岁2个月) 反应方式与第一节中的帕尔和帕格相同。“鸭子多还是家养动物多?”——“一样多。鸭子也是家养动物。”——“家养动物多还是动物多?”——“一样,它们也是动物。”——“所有的家养动物都是动物?”——“(他看了看其中的一张图片)那张是动物,那也是,那也是。是的,它们都是。”——“所有的动物都是家养动物?”——“(他看)我看看! 不,蛇不是。”——“动物的数目和家养动物的数目一样多?”——“肯定是动物多。”

诺夫(11岁5个月) 将第Ⅱ组分为无生命(D′)和有生命的(D);然后分成不飞行动物(C′)和飞行动物(C);然后分成昆虫(B′)和鸟(B);鸟再分成鸭子(A)和其他的鸟(A′)。他同意A和B合并,以形成所有的鸟等等。“在这些盒子里,鸟多还是鸭子多?”——“鸟多。”——“会飞的动物多还是鸟多?”——“(他看了看B和B′里的数目。)一样多。”——(重复提出这个问题。)——“噢,不! 会飞的动物多,因为鸟也是会飞的动物。”

梅姆(12岁9个月) 对同样的问题:“鸟多,因为鸟的种类多些……哦,不! 会飞的动物多。”——“动物多还是飞行动物多?”——“动物多,因为动物包括所有其他的种类。”

我们看到,伴随着等级分类的逐步发展,在包含之数量关系的掌握方面也相应地熟练多了。但在DⅢ阶段,正确的答复是立即做出的:

皮特(10岁2个月) 将第Ⅰ组分为鸭子(A),飞行动物(B),“混合的”动物(C)。他拒绝将一只狗放进B,但同意将鸭子、公鸡等放进C。“世界上动物多还是

飞行动物多?"——"动物多,因为它们的数目较大。"——"动物多还是鸟多?"——"动物多。"

詹尔(10 岁 11 个月) 对第Ⅱ组的分类与诺夫相同。"世界上动物多还是鸟多?"——"动物多,因为鸟是动物。"——"鸟多还是飞行动物多?"——"飞行动物多,因为有鸟,也有昆虫。"

戴特(11 岁 11 个月) 将第Ⅱ组分成鸭子(A),其他的鸟(A')。一只羊、一匹马和一只象(C),无生命的物体(C')。"能将 A 和 A' 合并吗?"——"它们都是鸟(B)。"——"B 和 B' 呢?"——"它们都是动物(C)。那些都是有生命的。"加上昆虫:"对这些会飞的昆虫和蝙蝠,应该再分为一个部分。"——"飞行动物多还是鸟多?"——"飞行动物多。"

特拉(12 岁 4 个月) 一开始将鸭子和蛙分为 A,鸟和蝙蝠为 A',昆虫和其他动物为 B'。但他决定重分,将昆虫放入 A,在先把蜘蛛拿走后,鸟和蝙蝠为 A'(这样 $A+A'$="飞行动物"),其他的动物为 B'。"昆虫多还是飞行动物多?"——"飞行动物多,因为昆虫都是飞行动物。"——"飞行动物多还是动物多?"——"动物多,因为那些会飞的还是动物。"——"飞行动物多还是鸟多?"——"飞行动物多,因为有鸟和昆虫。"

表Ⅵ显示了 8—13 岁期间对我们的各种问题作正确答复的比率。这些数字是利用第Ⅰ组实验器材,从总数为 117 名的受试者那儿得到的。

表Ⅵ 对于有关动物的类包含问题作正确答复的百分比

年 龄 (受试者人数)	8(17)	9(22)	10(14)	11(17)	12—13(14)
$A<B$	47	50	50	46	67
$B<C$	38	66	62	82	75
两 者	25	27	42	46	67

得自于问题ⅢC 和ⅢD(以 $\overline{B}A$,$\overline{A}B$,$\overline{C}B$,$\overline{B}C$,$\overline{A}C$ 和 $\overline{C}A$ 的形式表示——参见第 1 节的表Ⅴ)的相应结果如下:

表Ⅶ 对 $\overline{B}A$,$\overline{A}B$,$\overline{C}B$,$\overline{B}C$ 等问题作正确答复的百分比

年 龄 (受试者人数)	$\overline{B}A$	$\overline{A}B$	$\overline{C}B$	$\overline{B}C$	$\overline{A}C$	$\overline{C}A$
7—8(14)	75	94	75	90	100	88
9(13)	94	100	100	100	100	88
10(10)	100	100	90	100	100	100

11 岁以上的儿童对于这些问题的答复都无错误,这比有关类包含的情况提前很多。

当用动物来代替花时，在这个年龄以后还出现有错误的回答。最可能的原因（我们已经指出过）是这种分类比较难些。因为，它并不与诸如摘采花朵并将它们集成一束那样的分类的行为一致。人们可以想象，这种行为是比较容易完成的。然而，虽然人们可以将动物的图片集合起来加以分类，但对实际的动物却不能这样做；等级的包含和它们数量关系的表达之所以有如此大的困难，其原因似乎就在于此。

我们有理由结论说，类包含的格式乃是一种真正的逻辑运算，而不仅仅是一个言语的熟练程度问题。许多著者发现，2—4 岁的儿童会告诉他们一只狗是一个动物，一位太太是一个人，一枝雏菊是一枝花，于是他们便结论说，这些儿童已经达到了等级分类的水平。① 对于这些，我们不能同意。这些事实所表明的是，当这些幼小的儿童面对某些熟悉的成分时，他们能够达到超出图形集合的水平，而且相应的言语也能够被构造成部分与整体的结构。但是，这个结构并不是运算分类的结构，而是一个非图形集合的结构，它与显示出来的分化的程度是完全一致的。这里的结果表明，进行表达为 $A+A'=B$ 的联合是一回事，而理解这种联合与它的反演 $A=B-A'$ 在逻辑上相等则又是另一回事，这种理解意味着整体 B 保留了它的同一性，而且整个的关系可以用 $A<B$ 这种形式的数量关系来加以表达。整体的守恒以及整体与部分的数量比较是真正的类包含的两个本质特征；应该强调指出，这种思维并不是专业逻辑学家所特有的，因为当儿童达到运算水平时，他们便会很自信地运用它。正因为儿童的正确谈论和言语概念的使用反映的是成人语言所蕴涵的包含，所以就这个意义上说，包含还没有获得。相反，包含在本质上具有运算的特征。这就是它之所以是任何分类之基础的原因。这种分类是对一些类别作真正的整理，而并非仅仅在这些类别之间加以区分。

为了研究儿童如何从直观的联合 $A+A'=B$ 过渡到反演 $A=B-A'$，我们就得研究上行的分类法（受试者从一些小的集合开始，构造大的集合）和下行的分类法（受试者从一些大的集合开始，然后再划分它们）的逐渐协调。这就是说，我们得研究追溯的灵活性和预见的灵活性；这是第七章的主题。我们要把这个研究推迟进行，在此之前，首先检查一下补充类别概念的发展（第五章）和交叉类别的发展（第六章）。

① 参见 L. 韦尔奇（Welch）和 L. 朗（Long）：《普通心理学杂志》1940 年第 22 期，第 359—378 页。《心理学杂志》1940 年第 9 期，第 59—95 页。

第五章 补充类别[①]

现在我们打算研究补充类别概念的发展。补充类别乃是这样一种类别：它可以同一个特定的类别 A，B 或 C 相结合以产生下一个较高等级的类别 B，C 或 D。例如，如果 A 是类别鸭子，B 是鸟，C 是动物，它们各自的补充类别就是那些我们在描绘"基本的组合"时，称之为"辅助的"类别：A'(鸭子以外的鸟)是与 B 有关的 A 的补充，B'(不是鸟的动物)是与 C 有关的 B 的补充，等等(在格构理论中，这些类别被称为"第一类的补充")。这个关系的重要性在于，它将引起更为一般的命题之否定问题。假定有一个类别 A，那么类别非 A 就是与 Z 有关的 A 的补充，而 Z 是这个系统中最大的类别(完整的说法就是：$Z-A=$非 A 或 $\bar{A}$)。心理学者想要了解儿童是如何理解类别非 A 的。儿童是不是认为"非鸭子"这个类别包括卵石、星星和神话故事中的人物？或者说，他通常是否将它同其他的鸟(A')或其他的动物($C-A=A'+B'$)联系起来？

显然，发现一个类别之补充的问题同次序关系的问题和类包含问题不是没有联系的。这些关系在逻辑上先于补充类别的关系，这也就是我们先来研究那些关系的原因。但从心理学的角度来看，补充类别可能是一个更为基本的概念，无论它是采取具体补充的形式(A'，B'等)或是采取一般的命题之否定的形式($Z-A$)，情况都是如此。

再者，补充类别的概念关系到许多相当具体的问题，如单类、空类、绝对数在补充关系和一般分类关系中的作用等。所有这些问题都同在分类时采用上行法(进行连续的合并)或下行法(进行连续的再划分)的问题有联系。

本章的安排基于下列事实——在讨论补充类别本身之前，应该先阐明两个基本的问题。第一个是单类问题，可以设计一种使受试者得在其中发现规则的情境来导入这个问题(第 1 节)；第二个是数字在分类中的作用问题(当 $N=1$ 时，便又要碰到单类，不过它的背景是分类行为本身)(第 2 节)。在此之后，我们便转向"辅助的"类别或第一类之补充的问题(第 3 节)，这个问题将导致命题之否定的研究(第 4 节)和二元的法则(如果 $A<B$，那么非 $B<$非 A)(第 5 节)，最后是空类(第 6 节)。

---

① 与 A. 爱梯纳，F. 弗兰克(Frank)，J. 马罗(Maroun)，B. 马特隆，A. 莫夫和 B. 雷蒙-里佛合作。

1. 实际背景下的单类

我们看到，在 8 岁或 9 岁以前，儿童在认识一个包括单一成分（在逻辑学中称为“单类”，如太阳、月亮等）的类别或在直观上分离的集合方面是有困难的。另一方面，论述“唯一样本”或“不同样本”的论文已经大量发表，尤其是在动物心理学方面①。如果有充分的动机，一只无尾猿或一个年幼儿童能够从几个其他的物体中拣出一个种类中的唯一的一个成分，即使当这个唯一的物体从未在两种场合中以相同的面貌出现，情况也是如此。这种行为同分类的机制有什么联系？为了搞清这个问题，我们就要努力发现，当一个儿童的动作实际上表示他已经解决了一个问题时，他是如何来理解情境中的那些关系的。问题之解决，最初可能是由于感知-运动的知识和感觉信号分化的结果，但最终还是要导致对于分类结构，尤其是对于单类的理解。

我们所使用的材料由三至六个数量不等的三角形组成。在有些情况下，我们增加一个或数个菱形。问题是猜测在这些物体中，哪一个的背面有一个十字形。这个物体常常是可以认出来的，因为它往往是这种物体中的唯一的一个成分。如果我们使用六个而不是三个成分，这对有些儿童是有帮助的，因为它突出了感觉的对比（其余的五个物体完全相似，而有十字形的那一个则与它们不同）。不过也有些人发现用三个成分比较容易些。要测定儿童究竟理解了些什么，我们首先就要求他对自己的选择加以推论，然后便要求他自己也编一个类似的问题，但不能采用我们已经用过的这些器材和安排方法。

我们观察到三个阶段。首先，在相应于第Ⅰ阶段和第Ⅱ阶段的 5－7 岁期间，成功率是 50％，不过，他们对这个系统或者是根本不理解，或者只有部分的理解。这些成功完全是由于感知-运动的知识。第Ⅲ阶段（A）相应于 7－9 岁，成功率是 75％，但对这个系统有了理解。第Ⅲ阶段（B）相应于 10－12 岁，成功率跌至 33％，这是因为出现了一种想象的复杂情况的倾向。表Ⅷ显示了各年龄组成功地解决问题的频率。

表Ⅷ　成功地解决发现“不同成分”问题的百分比②

年龄组	人数	两对一				五对一			
		成功	＋	－	＝	成功	＋	－	＝
5 岁 2 个月—6 岁 7 个月	18	55	55	27	18	48	50	41	9
7—9	14	76	78	14	8	66	70	22	8
10—12	12	33	—	—	—	—	—	—	—

表中“＋”栏表示成功多于失败儿童的百分比，“－”栏表示失败多于成功儿童的百

① 人们常常把这个问题归诸为“古怪的问题”。

② 向 5－6 岁受试者呈现的第一组物体数为 110，第二组为 61；向 7－9 岁受试者呈现的第一组物体数为 59，第二组为 9；向 10－12 岁受试者呈现的两组物体总数为 23。

分比,"="栏表示儿童的成功和失败相等的百分比。

第Ⅰ和第Ⅱ阶段的受试者要么是不能解决问题,要么就是他们的成功并不伴随有对该系统的理解。

下面是一些例子:①

摩尔(6岁) 是一个在不理解的情况下直接地解决问题的好例子。用 Y, BK, BK 做实验时,他拿了 BK_1。用 B, Y, Y 时,他指向 Y_1,然后是 Y_2:"哦,那么它在那里(B)。"用 BK, BK, Y 时,他拿了 BK_1,然后是 BK_2,再后是 Y。用 Y, BK, Y; R, BK, BK 和 B, B, G 时,他拿了 BK, R 和 G。"你是怎么知道的?"——"因为每次你都将它放在这儿,这儿或那儿。"——"好,看一看这个(Y, R, Y, Y, Y, Y)。"——"(他拿 R)因为有许多黄的和一个红的。"但用 BK, BK, BK, G, BK, BK, BK 时,在选择 G 之前,他试图拿 BK_1。在自己编造问题方面,他的确是构造了 $2A+1A'$;但他故意将 A' 先放在左边,然后是中间,最后是右边。"你是怎么放的?"——"因为它总是这个放法(指了指这三个位置的次序,这个次序我们已经改变过,不过那是任意改变的)。"——"经常是哪一个?"——"有时它是红的。"这并未使他认识到,有十字形的往往是那个独一无二的物体,尽管他的实际行为表明他已模糊地意识到了这一点。

艾加(6岁3个月) Y, Y, R:拿了 Y_1,接着是 Y_2,然后是 R。BK, Y, BK:他又像上一次那样。"为什么?——……"Y, Y, G:拿 G。B, Y, B:拿 Y。然后要他自己摆出类似的排列:他摆出 R, B, R,其中 R_1 带十字形。我们再试一遍。用 B, R, B, B, B, B 时,他先一次次地试拿了所有的 B,最后拿 R;但对 Y, Y, B, Y, Y, Y,他一上来就拿了 B,"现在你知道这是怎么回事了吗?"——"是的。"我们用 G, BK, BK, BK, BK, BK 来试他,他直接地选择了 G。要他自己来构造相似的问题时,艾加构造了 R, BK, R, BK,带十字形的是 BK_1,然后是 R, Y, B, BK,带十字形的是 Y。他并没有理解。我们故意地让他看 Y, G, Y, Y,带十字形的是 G,但他还是摆出 BK, R, Y, Y,而带十字形的却是 R!

里益(6岁3个月) Y, Y, R:先试 Y,还是 Y,然后拿 R。对于 R, B, R,他指了 B。"为什么?"——"我知道这个颜色(!)。"——"像这样的呢(G, BK, BK)?"——(他拿 G)——"你是怎么知道的?——……"他自己的构造是:BK, Y, G,带十字形的是 BK,然后是 B, G, BK,带十字形的是 R,再后是 Y, BK, Y,带十字形的是 BK。"为什么?"——"它们都是相同的颜色。"实验继续进行,他又发现了规律,但还是不能解释它。

下面是处于第Ⅱ阶段和第Ⅲ阶段之间的情况。在这期间,他们部分地理解了这个原则。虽然在开始时他们没有正确地构造自己的问题,但最后还是取得了成功。

---

① 字母 BK, B, G, R, Y 分别代表黑色,蓝色,绿色,红色和黄色。

鲍特(5 岁 6 个月)　对于 BK,BK,G;Y,BK,Y 和 Y,R,R 这三组，他的选择都正确；但还是不能成功地构造形式为 $2A+1A'$ 的一排(其中 A' 带十字形)。实验继续进行：BK,BK,R(正确)。“你是怎样猜的?”——……——“Y,B,Y(他连续两次拿 B)”。——“为什么是那一个?”——“因为有两个其他的。”——“现在呢(BK，R,BK)?”——“(他拿 R)因为有两个黑的。”——“这个呢(B,B,G,B,B,B)?”——“(他拿 G)只有一个绿色的。”鲍特从开始就选择那个独一无二的成分，而且总是发现有十字形。他在这么做的时候，开始并不理解，而且他不能重新构造这种情境。最后他似乎发现了这个原则，但那不过仅仅是对这种结构的描绘，这同分类的格式绝不是一回事。

迈特(6 岁 8 个月)　Y,R,Y：他拿 R。“为什么?”——“我想它大概是红色的。”——“这个呢(BK,B,B)?”——(他拿 BK。)——“(Y,BK,Y)?”——(他指了 Y_1，然后指 BK。)——“这里(G,R,G)?”——(指向 R。)——“为什么?”——“我就是那么猜的。”——“(G,Y,Y)?”——(指向 Y_2，然后指向 G。)——“你怎么知道?”——“我不知道。”——“这里(BK,BK,BK,BK,R,BK)?”——“那一个(R)。”——“为什么?”——“我不知道”。他自己的构造：Y,Y,Y，带十字形的是 Y_2。“你能使它容易些吗?”——“(BK,B,BK，带十字形的是 B)我用了不同的颜色。一个蓝的和两个黑的。”然后是 B,BK,B，带十字形的是 BK。“为什么它在那里?”——“因为它们都是相同的颜色。”

这些例子极其有趣，因为它们显示，尽管并不理解类别格式，但儿童还是学会了。摩尔只需试验四次就能每次都选择独一无二的成分，不过他仍然认为他的选择是由位置决定的。他自己的构造考虑了这两个因素。在这些受试者中，只有一个人意识到这个原则，但事实上他并未用这个原则来解决我们的问题；另一位受试者虽然并没有意识到这一点，但他的实际表现却是正确的。艾加自称已经理解了这个原则，但他并不能重新构造这种情境。里益正确地重新构造了它，但他却说带十字形的那些成分往往颜色相同。鲍特可能稍微落后于里益。他一开始时碰巧做出了正确的选择，而且从那以后便坚持了这个正确的原则。不过他不能重新构造这种情境，而且只是到了最后他才正确地阐述了这个原则。迈特相当快地发现了这个原则，而且正确地重新构造了这种情境，但他不能作概括的阐述。

我们不想在这里对这种学习作理论的解释，毫无疑问，它涉及以成功的强化为基础的感觉对比的转变。然而，我们得认识那些解决办法，而这些解决办法在整个非图形集合阶段是属于部分的感知-运动和部分的直觉的(正像我们在第三章中已经指出的那样，这种前分类本身在某种程度上乃是直观因素和想象因素的作用)。下列例子说明了第Ⅲ阶段(A)(在这个时候，儿童们能够构造一个等级的分类，也显示出一些对于类包含的理解)的情况。它们同已经举出的那些例子有着显著的差别，虽然有几个受试者的年龄还不到 7 岁(这同第四章第 1 节的情况是一样的)。

多姆(5岁6个月) Y,B,Y:选择Y,然后是B。Y,B,B和B,B,R:直接拿Y和R。"为什么?"——"因为我知道,我考虑过它。"——(BK,B,B)——(拿BK)。——"为什么?"——"我考虑过它。"他自己的构造是,R,Y,Y;R,BK,BK和B,Y,Y;带十字形的分别是R,R,B(正确)。"你是怎样构造它的?"——"每次我都将带十字形的放在这里,而不是放在其他地方。"

克拉(6岁11个月) "(R,B,B)。"——"这里(R)。"——"(G,G,BK)。"——"这里(BK),因为它的颜色不同。"——"(Y,R,R)。"——"红的,不是黄的,因为它总是另一种颜色。"B,G,B和R,R,B都解决了。他自己的构造是正确的:BK,R,BK和Y,B,Y,带十字形的分别是R和B。对于六个成分的(B,B,B,G,B,B),他指向G:"因为它同其他的颜色不同"。对于Y,Y,Y,Y,R,他指了R。

艾利(7岁7个月) Y,G,Y:他先试了Y,然后是G。BK,R,R:拿BK。Y,Y,R:拿Y_2,然后拿R。BK,R,BK,BK,BK,BK:拿R。"这容易吗?"——"容易,因为有许多黑的,只有一个红的。"——"(B,B,B,B,Y,B)。"——"那是黄的,因为只有一个是黄的。"他自己用三个成分和六个成分组成的构造是正确的。"有两个是相同颜色的,一个是不同颜色的。"

李姆(7岁11个月) 每次都正确,"因为它总是不同的颜色"。

威尔(8岁3个月) Y,B,Y;G,B,B;R,BK,BK和Y,G,Y:分别指向B,G,R和G。"为什么?"——"因为只有它是绿的。"——"(五个Y和一个R)。"——"那是红的,因为其他的都是黄的。"——"这一个和(Y,R,Y)相比较,哪个容易些?"——"一回事,因为除了一个之外,都是黄的。"

达姆(8岁4个月) 每次都正确,"因为只有一个是一种颜色"。他自己的构造都正确。

拉克(8岁6个月) "你只放下一个黑的,其余的都是黄的。这次它们都是黄的,一个绿的!"他自己的构造也正确。

劳尔(9岁) 试了几次之后:"这些相同颜色的没有十字形,那些不是相同颜色的有十字形。"

季尔(9岁2个月) "因为它是唯一的一个。开始时我不知道。"

柯格(9岁5个月) "因为一种颜色的只有一个,因为就是它一个。"

里夫(9岁5个月) G,BK,BK:"它是绿的。"——"你是怎么知道的?"——(耸耸肩。)——"这里(Y,R,Y)。"——"红的,因为往往有一个(这是第二种描述!)颜色不同。"

泽帕(9岁6个月) "它常常是另一种颜色。它们都是黑的,黄的是不同的。"

摩斯(9岁9个月) "你总是拿单独的那个。"

几乎在每一个例子中,受试者都陈述了一个规则,并把它概括为"往往是"对的。这是一个本质的标准,我们能够据此认识基本的分类格式,而这种格式同那些常常需要部

分地依赖于想象的单纯的集合是不同的，即使当这些集合并不是严格意义上的“图形”，情况也是如此。

里夫的例子比较突出，他只需两个实例就得出这个规则“往往”正确的结论。此外，这个规则本身必须涉及类包含的机制，因为它的完备的表达将包含如威尔所说“除了一个以外，所有的……”这样的短语。

这些发现确实是值得注意的，因为有关的分类机制是比较复杂的。由于这些颜色每次都有变化，受试者就必须不仅仅是将这些成分划分为 A 类和 A' 类。他还得将这种分类形式从 A_1 对 A_1' 变换成 A_2 对 A_2'，A_3 对 A_3' 等等。这相当于一种概括了的“交替—概括”，因为它不是在一个特定集合范围内的运算，而是要连续地对一些不同的集合（其中的每一个集合又表现有共同的结构）进行运算。

儿童必须运用两种论证，而且，这两种论证的基础都是 A 和 A' 的互补性：(1) 基本类别 A 是单类，“其他的”则形成辅助类别 A'；如一个黑的和“所有其余的”（拉克）；“它是红的 (A)，因为其他的 (A') 都是黄的”（威尔）。(2) 或者，基本类别 A 包含几个成分，在这种情况下，辅助类别 A' 就是单类。这是一种更为平常的形式（这种情况的例子有克拉，艾利，李姆，劳尔，里夫和泽帕）。

在这个水平上，“唯一样本”是通过分类的运算构成的。由于有相关的互补性，因此，它便呈现出单类的特征（不管它是基本类别或是辅助类别）。这一点可以从诸如“其他的”或“不同的”等表达中得到说明，虽然这些表达也可能是否定的，如“不是同样的颜色”（劳尔），但它们一般都是肯定的。

我们还得谈谈第Ⅲ阶段 (B)，它相应于 10—12 岁。令人非常难以理解的是，这个阶段有着明显的倒退现象。但这种倒退绝不是由于分类的机制，而只意味着儿童有一种期待比他实际面临的情境更为复杂的“难题”的倾向。

> 贝尔（10 岁 2 个月）　Y, BK, BK：先试 BK_2，然后是 Y。R, B, R：先试 R_2，然后是 R_1，最后是 B。B, R, R：先试 R_2，然后是 B。“你是怎么选的？”——“我不过是随便拿。”BK, G, BK：先拿 BK_2，然后是 BK_1，最后是 G。Y, Y, G：他拿 G。“为什么？”——“我告诉过你，我还没有弄清它的诀窍。”他自己的构造：经过几次错误的尝试之后，摆出 BK, G, BK，带十字形的是 G。“哦，我知道了！它一定得是只有它一个是一种颜色的。”
>
> 符离（11 岁）　Y, R, R：拿 Y。BK, BK, R：拿 BK_1，然后是 BK_2，最后是 R。B, Y, Y：先拿 Y_1，然后 Y_2，最后 B，等等。他提出了一个法则：“先是在一边，然后在另一边，再后是在中间。”继之而来的排列并未进一步证实这一点，他根据位置试了另一个法则。最后：“哦！因为只有一个。”

贝尔通过先试最后那个成分，然后选第一个，最后拿中间的那个来发现一个法则。事实上，尽管他嘴上说他只是随便拿，但他将这个法则试了五次。

符离是另一个试图发现位置法则的受试者。在考虑正确的假设（这个假设是最简

单的)之前,他们似乎想发现几个有关位置的假设。这种迹象表明在将一些假设联合起来的方向上已经有了进步。换句话来说就是有了更多的灵活性。但就这个最简单的问题来说,我们并未发现智慧的更适当地运用,因为人为的复杂性只会将问题弄得朦胧不清。然而,正像我们在前面(第四章第2节)已经看到的那样,这个小阶段的确会导致较高水平的等级分类。

2. 分类和类别的相对规模

下列实验有两个目的:第一,搞清儿童构造单类是否完全像构造包括几个成分的类别那样容易;第二,发现数目的不平衡对于分类究竟有多大的影响。

Ⅰ. 第一个问题使我们回到"唯一样本"的问题上来。差别在于,现在我们不是要一个实际的解决问题的办法,而是要求我们的每一个受试者都构造一个分类的系统。将实验器材显示给受试者,这些器材有:四个大的蓝正方形(5cm×5cm),四个小的蓝正方形(2.5cm×2.5cm),三个大的蓝色圆形(直径为5cm),四个小的蓝色圆形(直径为2.5cm)和一个大的红色圆形(直径为5cm)。然后我们提出下列几个问题:(1)要受试者将这些物体按他的想法分类;(1b)如果他没有这么做,就要他将这些物体只分成两类。(2)要求他利用不同的标准将这些物体再分成两类。(3)促使他们用第三个标准再这么做。(4)增加三个红色的物体(一个大正方形、一个小正方形和一个小圆形),要求他作一个新的分类。

我们希望发现的是,儿童在前三种分类中是否利用了颜色,因为这么做将会把一个大的红色圆形构造成一个单类。总的说来,在年幼儿童作自发的分类时,他们利用形状同利用颜色的次数大体上相等,而利用大小的标准则是后来的事。因此,对于第一种和第二种分类来说,利用颜色的可能性是相同的,而对于有关单类之构造的问题则不同。如果我们发现受试者选择形状而不是颜色作为他们分类的基础,这只能意味着他们不承认有单类这样的东西存在。增加三个红色的物体将加大基于颜色分类的数目。如果不是这样,那么它意味着由前面那种颜色情境造成的抑制作用扩展到这个新的情境中来了,或者意味着这种持续的忽视颜色的标准是由于固执而不是主动抑制。

尽管有关的受试者人数不多(5—9岁的36名),但结果是明确的。在第一组的分类中,22个分类的基础是形状,3个是大小,只有1个是颜色。除此之外,5—6岁的受试者还构造了4个复杂对象,有6名受试者没有造成任何的分类。(Ⅰb)在第一次将物体分为两类的方面,28个分类的基础是形状,4个是大小,1个是颜色,3个是失败的分类。(2)第二次分类中有17个分类的基础是大小,4个是形状,1个是颜色,6个复杂对象,8个失败。(3)第三次有5个分类的基础是颜色(都是7—9岁的这一部分受试者),6个的基础是大小,其余的是复杂对象,或者拒绝分类。对于增加新的红色成分,基于

颜色分类的数目同拒绝分类的数目差不多。

显然，儿童有一种强烈的避免单类的倾向，只是在7岁或8岁时；他们才开始构造这样的划分。在第Ⅰ阶段，最常见的儿童的反应是忽视独一无二成分（红色圆形）的特性，而且在处理它时，似乎它同其他的成分是完全一样的。

凯娜（5岁3个月） 将所有的正方形放到左边，其中小正方形在上边，大正方形在下边。圆形以同样的安排方式放在右边，红色圆形同三个大的蓝色圆形混在一起。"这些都是圆形，这些都是正方形。"——"能将所有的圆形混在一起吗？它们相配吗？"——"是的。"——"你还有其他想法吗？"——她构造了一排正方形，其中所有的大的放在前面，小的放在后面，她对着这一排又放了一小排大的和小的圆形。然后她将所有的大的成分——正方形和圆形——放在左边，所有的小的成分放在右边，她又一次将红色圆形当作蓝色的加以对待。要求她作第三种安排。这一次她造成了一个复杂对象，一个正方形和圆形的式样，但是红色圆形仍然混杂在蓝色的之中。最后，我们增加三个红色的成分，凯娜用另一组蓝色和红色成分构造了一个新的复杂对象。受试者将所有的蓝色成分放进一个盒子中，将所有红色成分放进另一个盒子。"这样行吗？"——"行，所有的蓝颜色的在这里，所有的红颜色的在那里。"

史帕（5岁10个月） 根据形状对物体分类，"因为所有在这里的都是圆形，所有在那里的都是正方形"。在要求作第二种分类时，他继续根据形状分："不，你用另一种方法来分。你为什么这样放？"——"这些小圆形，小正方形，大正方形都是同样的颜色，但它们中有一个是红的（显然史帕已经注意到这独一无二的成分，但他决定不去理会它）。"——"那么，另一种分法是什么？"——"（他按照大小对这些成分作了正确的分类。）我将所有的大的放在一边，所有的小的放在另一边。"——"它们都相像吗？"——"这个大的红色圆形不像其他的。"——"那么，想出第三种安排它们的方法。"——（他还是按照大小来对这些物体分类。）——"你这种分法有什么不同？"——"这同前面的完全一样，除了那个红色圆形之外（他的意思是：除了我不知道红色圆形该怎么处理之外）。"——"再想一种方法。"——（他又是根据形状对它们分类。）——"你怎么做的？"——"它同开始时完全一样。"实验者试图暗示根据颜色来对这些成分加以分类，但史帕抵制了这种暗示："蓝色的不太相配，但只是一点儿不配，因为它们都是相同的颜色。"至于红色圆形："你无法（根据颜色）适当地安排它们，因为只有一个（是红的）。"然而，当增加了更多的红色成分时，史帕接受了根据颜色的分类。

彪尔（6岁1个月） 同史帕一样。彪尔开始时根据形状对这些成分分类，然后便根据大小，但对红色圆形不加理会。增加了红色的成分之后，她将颜色交替，构造了一个复杂的对象，但在经过暗示之后接受了根据颜色分类的暗示。用原先那些成分来重新实验。现在，实验者提出这么一种分类——将所有的蓝颜色的集

在一起放到左边，将红色圆形放在右边。——“这样行吗？”——“不，那里只有一个。”——“(加上第二个红色成分。)这样呢？”——“不。”——“(加上第三个。)这样呢？”——“不，它们不够多。”——“需要多少个？”——“(她数了数另一边。)九个。”

下列受试者(他们的发展水平稍微高些——第Ⅱ阶段)在红色的成分增加进来之后(但不是在此之前)自发地采用了根据颜色的分类。

米尔(6岁10个月) 对于这些成分的分类先是根据形状，然后根据大小，但没有想出第三种标准。然后，加上一个红正方形，于是她将一个蓝正方形和一个蓝色圆形放进右边的盒子，将一个红正方形和一个红色圆形放进左边的盒子。在要她加进剩下的那些成分时，她回复到根据颜色的分类。

福恩(7岁3个月) 先是根据形状，然后根据大小来对这些成分分类：他试图发现第三种标准，但未成功。当增加了三个红色成分时，他问道：“能不能将所有蓝颜色的放在一边，所有红颜色的放到另一边？”

乔布(7岁6个月) 在根据形状或大小进行分类方面也毫无困难，但不能想出第三种标准。一旦另一些红色成分增加进来，他便根据它们的颜色进行分类：“为什么你以前不这样分？”——“我不知道。”

杰克(7岁9个月) 同上。“为什么你以前不这样分？”——“不知道，因为我没有想到它。我从未见过它。”

顾益(8岁4个月) 同上。“为什么以前不这样？”——“因为红颜色的不够多。”将增加的红色成分拿掉，顾益确认那个根据颜色的分类(15个蓝色成分对1个红色成分)就不能成立：“因为这里不够多，而那里有很多。”

忽视红色圆形的原因是清楚的：划分类别就是构造集合，而单独的一个红色圆形并不能形成一个集合。在第Ⅰ阶段和第Ⅱ阶段，儿童们拒绝构造单类或单一成分的集合。这同他们依赖于想象而不是依赖于分类格式之运用的解决“唯一样本”问题的方式是一致的。另一方面，同他们在7岁或8岁时能够扩大互补性的概念，并将这个概念运用于单类一样，在目前的情境中，7—8岁儿童所表现出来的这种能力也将大大地超过前面那些受试者。

尤里斯(6岁11个月) 是在第二次尝试时按照颜色来加以分类的受试者之一。然后：“你能发现另一种方法吗？”——“(他将所有的蓝色成分放到左边，将那个红色圆形放到右边)我已经将这些(1)红颜色的放进一个盒子，蓝颜色的放进另一个盒子。”只是在此之后他才继而采用大小的标准。

伊索(7岁4个月)和赛尔(7岁4个月) 继形状和大小之后，非常自发地选择了颜色。

李尔(8岁4个月) “因为这些是蓝的，这一个是红的。”

艾姆(8岁7个月) “这些蓝色在一起，红色在另一边。”

劳思(8岁10个月) “我将所有的蓝的放在一起，红的分开。”

费帕(8岁11个月)　自发地选择颜色作为他的第一个标准:"我已经将这些(1)红颜色的放在这里,所有其他的放进另一个盒子。"

对于这些受试者来说,互补性压倒了数目的广延性。他们中有几位(如尤里斯和费帕)甚至还说到"这些红的"。他们恰当地考虑了这么一个事实,即只有一个红色的物体对于证实红颜色这个内在的特性是无关紧要的,而且这只是实验者愿意这么做罢了。

Ⅰb. 由于我们已经知道在具体推理的水平上,问题的内容是至关重要的这一事实,所以我们便用不同的内容做类似的研究。现在我们不采用红色的圆形和蓝色的模型,而是利用人物图片:三个女人,两个男人,一个小男孩。我们已经知道(参见第四章第4节),儿童根据年龄对人分类与根据性别对人分类是同样经常的。因此,我们可以预期,如果在这个情境下这两个分类出现的次数不同,那就是因为这个小男孩要构成一个单类。事实上,20名7—8岁的受试者自发地做出的10个分类都是根据性别,没有一个根据年龄,他们还做出了10个叙事性的安排(父母带着孩子等)。当要求他们只分成两个类别时,15名儿童的分类基础是性别,没有一个是根据年龄来划分的。9—10岁的受试者根据性别和根据年龄所做出的分类分别是七对二。但是,当这个集合中增加了两个小女孩时,半数以上的受试者便接受基于年龄的分类(尽管成人的图片数事实上大大超过儿童的图片数),其原因是儿童图片的数目大于一。我们也用五个动物和一个植物做过实验,同前面的那些情况相比,那种单一成分的类别大大超过了不同成分的类别。在这种情况下,三分之一的7—8岁的受试者将这些物体自发地分成动物(一只老鼠,一只长颈鹿,一只蜗牛和两只鸟)和植物(一枝郁金香)。三分之一的受试者在增加了四种植物以后才这么分类。还有三分之一的受试者甚至在那以后也拒绝这种两分法。在9—10岁,三分之二的受试者在加上四枝花之前就将这些卡片分成动物和植物了。

这两个实验指出了内容的重要性,但它们也进一步证实了对于单类的抵制。

Ⅱ. 研究数目之作用的那些实验证明了否定的作用。实验器材还是一些几何模型。它们是16个正方形和8个圆形.其中12个是大的(5cm),12个是小的(2.5cm)。这些物体中,12个是红的,12个是蓝的。我们希望弄清是不是有一种避免以形状作为分类基础的倾向,因为这将造成数目的对称性。我们发现,在5—8岁的受试者中,根据形状和根据颜色的分类出现的频率是相同的。我们已经显示,年幼受试者利用形状和颜色的频率通常是相同的,而大小的标准却很少采用。因此,圆形的数目较少这一点并没有影响我们的结果。

3. 在被迫的两分法中的"辅助"类别

现在我们转向互补性和命题之否定这两个中心问题。我们先讨论"第一类别的补

充"或"辅助"类别。

假定 A 是一个包含在类别 B 中的类别，并由它的种 b 和特定的差 a 来加以界说。那么，除非 $A=B$，否则就存在一个类别 $A'=B-A$，它可以用否定的形式界说为非 A 的 B 类。在某种特殊的情况下，它也能够以肯定的形式用它自己的特定差 a_2 来加以界说。在这里，第一个类别 A_1 便由它的特定差 a_1 来加以界说；这可以用于下列情况，即 B 的外延全部包括在它的两个组分类别之中，以致 $B-A_1=A_1'=A_2$ 以及 $B-A_2=A_2'=A_1'$①。在 A 和 A' 之间有着"另一种"的关系，在这种关系中，A' 乃是由于不同于 A 而作为"另一种"的 B 的成分，虽然它们都具有一般的特性 b。"另一种"的特性依赖于 A 以及刻画其成员之特征的特性 a。我们说，一旦 B 和 A 得到确定，如果受试者能够将 A' 的成分集合在一起，那么他就知道了"辅助"类别。这意味着他能够根据作为这种两分法之外延方面的互补性以及根据它的内涵方面的"另一种"去思考了。

我们想要考虑的这个特殊问题，乃是辅助类别和类包含之间的关系。在我们刚才界说过的辅助类别的意义上讲，它们显然意味着包含，因为它们依赖于 A 包含在 B 中以及 $A'=B-A$ 的逆运算。不过我们已经看到(第四章第 1 节和第 2 节：问题ⅢC 和ⅢD，表Ⅴ和表Ⅶ)，儿童非常容易理解如果所有的报春花都被采去，那么田野里还剩有一些花；如果采走所有的花，那么报春花也就剩不下。但是，如果要他们在整体和部分之间做出像"花比报春花多"($B>A$)这个判断一般的数量的比较，那就困难些。这意味着有一种直觉的或想象的互补性，它先于运算水平上的包含之掌握。同样地，也可能存在着一个直觉的或前运算的"另一种"的概念，它由诸如"其他的"这些词汇表达出来，相应的前运算的补充则由短语"所有其余的"来表达。我们将努力追溯辅助类别概念不断发展的一些阶段，以便搞清"另一种"的哪些方面先于类包含的机制，以及后者对于辅助类别之完全理解必不可少的原因。

我们进行了两个实验。在第Ⅰ个实验中，我们利用了相同于前面研究包含的那些物体(第四章第 1 节)。它们是各种花的图片：包括一些不同颜色的报春花，一枝三色紫罗兰，一枝玫瑰，一枝郁金香和一枝铃兰。要求儿童将这些图片划分为两类，一个常见的两分法是报春花和其他的花。在第Ⅱ个实验中，我们利用了几个苹果，一个或两个梨，两个樱桃，一个香蕉，一个甜瓜，一串葡萄，一个橘子等等。因此，儿童可以把它们分成苹果和其他的水果。在做出分类之后，可以再增加一些水果，这样得出的结果就更能说明问题。有些儿童将把任何水果作为辅助类别的成员，因为这能够包含任何"非苹果"的水果；但许多年幼受试者却不允许任何没有出现在原先的类别 A' 中的任何种类。

这个实验有四个步骤：(1)先要求儿童将这些成分划分为两类。可以用各种阐述的方法，如"请你将所有这些东西分成两堆好吗？"——"你能将那些一致的东西放在一起吗？"或者"这里有一些一致的图片，你能将所有这些图片分成两伙吗？"然后便要求儿童

① 这样，模型 B 的集合的组成成分便只有正方形 $=A_1=A_2'$ 和圆形 $=A_2$ 和 A_2'。

说出他的选择的理由。(2)再增加一些成分,要不就拿走一些现有的东西。拿走一些东西以后,可以只剩下两个苹果以及几种其他水果(每种水果各留一个),也可以留下四个苹果与一个梨,一串葡萄,一个樱桃和一个甜瓜。(3)采取对比的方法,只用一个苹果,但有好几个梨来做这个实验。(4)最后,一旦这些成分被分了类,便询问儿童怎样给第一个盒子贴标签,他会很容易地回答说:"报春花"或"苹果"。然后再问他如何用一个或两个词来给第二个盒子贴标签——我们不让他列举所有的品种。

在这个实验中,儿童被迫进行两分法,因为他可能不会自发地去做这件事。这是一个不利的条件;但这个方法也有其有利之处,它能使我们看清该方法是导致分类,还是造成将这些成分任意地分配到两个盒子之中的结果。如果出现分类,我们就可以看到究竟这两个类别的界说都是肯定的,还是一个类别的界说是肯定的,而另一个却是否定的。在后一种情况下,我们就得确定那个否定的界说是否表达了与那个肯定地加以界说的类别的关系。最后,我们还有一个困难的任务——确定对于 A 和 A' 的界说是不是同整个的 B 有联系。

在5—10岁的总数为63名的受试者中,只有7个抵制两分法,其中有2名是智力迟钝者。我们不打算再来描绘构造图形集合方面的那些基本的反应,也不想描述并列地放置的小集合(参见第一章和第二章第2节)。当处于这个水平的受试者被迫采用两分法时,他们便任意地加以构造,看不到任何分类的规则,即要么是没有将所有的成分都分完,要么是在这两个集合中都没类似的物体。例如,可能在一个集合中有一个苹果,一串葡萄,一个甜瓜和一个柠檬;而在另一个集合中则有两个苹果,两个樱桃,一个香蕉和一个梨。在第Ⅱ阶段,即自五六岁之后,我们不再发现任何拒绝两分法的情况。对于这个任务所做出的那些反应,现在可以归为一个或两个范畴。许多儿童相当快地将所有这些物体分为两个集合,并继而对其中的一个作肯定的界说,对另一个作否定的界说。其余的反应通常是试图对这两个集合都作肯定的界说。无论如何,他们都不能通过借助"另一种"的特征来指出辅助类别的特征。第一组看来在向着根据类包含来对互补性和辅助类别作运算的理解方面有了进一步的发展。事实上我们也发现,这一组儿童具体地说明了每一个可能的过渡的变化。第二组看来要落后一些,他们的反应并没有达到第Ⅲ阶段,事实上是处于真正的两分法与并列地放置一些小集合之间。我们先举出第二组的一些例子。

列伯(5岁8个月) 开始时用黄色的,紫红的和粉红的报春花构成三个小集合。当要求构成两堆时,他将所有这些放到一起,并将另一些花放成第二堆。"我该在标签上写什么?"——"这里写'报春花',我不知道这里到底是什么:一枝玫瑰,一枝三色紫罗兰,一枝郁金香……"——"你能将所有这些用一个词来称呼吗?"——"或许是'郁金香'。"——"假如有人要找一枝玫瑰呢?"——"'花'。"——"能将报春花放进这个花的盒子里吗?"——"能……不。"——"这枝银莲花怎么样,它该放到哪里?"——"(将它与报春花放到一起)或许它该单独放。"

水果：他先用苹果和梨构成一个集合。然后他摆成三堆：(1)梨和苹果；(2)一个柠檬；(3)所有剩余的。

弗尔(6岁1个月)　两堆：(1)粉红的雏菊和粉红的报春花；(2)其他的报春花、玫瑰等。“它们是一致的吗?”——“不(将所有的报春花放在一起，其余的分开)。”——“在标签上我该写什么?”——“这里：‘报春花’。”——“那里呢?”——“玫瑰，雏菊……”——“你能用一个词来称呼吗?”——“雏菊。”

梅游(6岁3个月)　先摆成两堆，然后将报春花放成一堆，其余的构成第二个集合。他为第一个盒子写了“报春花”，但对第二个他只同意一一列举。

水果：(1)樱桃，苹果，草莓；(2)其他的水果和青的、黄的苹果。“为什么将这些(1)放在一起?”——“因为它们是红的。”——“假如我加上一个橘子呢?”——“它放进第二堆，因为那里没有红颜色的水果。因为那里黄颜色的(比这一堆中其他颜色的)多。”

当然，儿童将很自然地努力发现第二个集合的肯定的特征。而且正像我们已经说过的那样，在儿童没有自发地作两分法的倾向时，是人为地让他这么做的。但是，分成了两类之后，人们就有充分的理由来要求界说那个由剩余物体组成的类别，以便搞清这种界说是否体现它所具有的下列两个特征，即(1)水果或花的特征；(2)一个非苹果的水果或一枝非报春花的花的特征。虽然问题可能稍微有点形式化，但答复是极其自然的，而且第Ⅲ阶段受试者的回答是相当出自于自然的。

有趣的是，那些不借助第一个类别来界说辅助类别的受试者也就是那些在最初采用两分法方面有困难的受试者。有些受试者只用种来界说辅助类别(如列伯，他就将它界说为“花”)，而没有认识到这种界说也适用于第一类别；另一些受试还是根据虽然普遍但又不是其成员共同具有的总的特征来加以界说(例如，梅游说它具有“较多的黄颜色的”)。这些反应同包含相去甚远。这是由于这么一个事实——对于“所有的”这个最容易的问题(即界说由两个子集的联合而形成的整个类别的问题)往往不能作正确的答复。虽然有些受试者将这个集合正确地称呼为“水果”(B. G，6岁1个月)，或“所有的花”(J. P，6岁2个月)，但另一些受试者却继续求助于水果或花的种类。他们可能称这个类别为“梨”(E. R，6岁9个月)或“香蕉”(P. J，6岁2个月)；他们也可能说“梨和水果”(B. O，6岁2个月)，将这两个名词一起用，似乎其中的一个并不包含另一个。

然而，从5岁11个月开始，我们开始发现一些两分法，其中的一个集合由几个比较相似的成分组成，而另一个集合则参照第一个集合来加以界说。参照物可能是明确的(“其他的”)，也可能是不明确的(对照于第一个类别，它可以称为“混合的”)。下面的几个例子说明，在理解类包含之前，儿童是怎样达到对“另一种”的较好的认识的。

顾比(5岁11个月)　先将一枝黄色的紫罗兰和除了一枝之外的所有的报春花归类为(1)，其余的为(2)。然而，他自己作了纠正，将所有的报春花归为(1)，其他的为(2)。“你为什么要这样来分?”——“这里(1)是相同的，它们是报春

花。"——"那里呢?"——"它们是其他的。"——"如果我想给这个盒子写标签,你看我写什么好?"——"报春花。"——"那里呢?"——"其他的。"——"如果我加上一枝雏菊,你将它放在哪里?"——"这是(2)。"——"一枝郁金香呢?"——"也是这里。"——"这一枝(紫罗兰)呢?"——"也是这里。"——"这一枝(蓝报春花)呢?"——"这里(1)。"——"能将报春花放进(2)吗?"——"不能。"

"你能换一种方法来安排所有这些东西吗?"——"……"——"假如我们将玫瑰花放在这里(1),所有这些(指向其余的花)放在(2)里,我们该在盒子上写什么?"——"这里(1),它们是玫瑰花。"——"这里(2)呢?"——"我不知道……其他的!"

水果:"我已将苹果放在这里,其他的放在那里。"——"如果我加上一个杏呢?"——"这里(2),因为它不是苹果。"——"你能作不同的安排吗?"——"能,梨在这里(1),其余的在那里(2)。"——"再换一种方法呢?"——"能,葡萄和樱桃在这里(1),其他的在那里(2),"等等。

奥布(6岁2个月)"我已将报春花放在这里,其他的花放在那里。"——"你告诉我,在这些标签上写什么?"——"'报春花盒'和'其他花盒'。"——"菊花放在哪里?"——"那里(2)。"——"长寿花呢?"——"也在那里,"等等。"你能对它们作不同的安排吗?"——"能,紫罗兰放在这里(1),其他的花放在这里(2)。"——"你能将你所喜欢的任何花做那样的安排吗?"——"能。"——"如果你将它们都放进同一个盒子,在标签上写什么?"——"花。"

水果:苹果放进(1),"这里(2)是一堆水果。"——"如果我加上几个樱桃呢?"——"你可以将它们放到那里(2),因为那里已经有一些了。"——"草莓呢?"——"也是。"——"如果你将它们都放进同一个盒子,你写上什么?"——"我要写:苹果和水果。"——"如果两堆都在里面,用一个词不行吗?"——"水果。"——"能对它们作不同的安排吗?"——"梨和其他水果。"——"假如我加上一个香蕉呢?"——"(1)里面没有香蕉,(2)里面也没有,所以你得再找一个盒子。"

波尔(6岁4个月) 将报春花放进(1),"因为它们都是同样的东西"。其余的放进(2)。"如果我们得在这些盒子上写出里面的东西,怎样写呢?"——"这里写'报春花',那里写'混合'。"——"如果加上雪花莲呢?"——"放进另一个盒子(3),因为它是另一种花。"——"将它放到这里(2)可以吗?"——"不,里面的同它不像。"——"这个(玫瑰)呢?"——"可以,因为里面已经有几个像它的。"——于是,这个"混合"只同最基本的物体集合有联系。

水果:"梨(1)和混合(2)。"——"加上一个杏,放在这里(1)还是那里(2)?"——"不,里面没有其他的水果像它。"——"这个(樱桃)呢?"——"可以,放进混合的(因为那里已经有了几个)。"——"你能对它们作不同的安排吗?"——"两个樱桃,一个混合。"——"你能将你所喜欢的任何水果作这样的安排吗?"——"能。"

西姆(6 岁 6 个月) 将花分成报春花和其他花。——“什么名称?”——“这里(1)是‘报春花’,那里(2)是‘雏菊’。”——“不过那里不是只有雏菊,是吗?”——“是的。”——“好,一个词?”——“其他的。”——“如果有人给我一枝雪花莲,它该放到哪里?”——“那里(2),因为它不是报春花。”

水果:“苹果放进(1),其余的放进(2)。我已经将每一种只有一个的放进这里(2),几个相同的放到那里(1)。”但他后来想将一个花生加到苹果那里,“因为那里(2)有许多,那里(1)只有几个”。这是放弃了原先的分类以达到数目的对称。

符益(6 岁 6 个月) 将梨和香蕉放进(1),其余的放进(2),因为“那里(2)都是圆的,那些是不圆的水果(1)”。

亨特(7 岁 6 个月) 分成苹果和水果。——“苹果与水果相配吗?”——“是的。”——“是吗?”——“那里(1)是苹果,那些(2)是其他水果,那里没有苹果。”——“你能作不同的安排吗?”——“能,梨(1)和不是梨的水果(2)。”

花:“报春花和其他的花。”——“再想一种办法。”——“两枝玫瑰和其他的花。”

这些受试者有两个方面比第一组受试者更发展些。他们从一开始就接受两分法,而且他们认识到,A'只能界说为不在 A 中的 B 的成分,也就是说,A'只能通过刻画 A 之特征的特性 a 的否定来加以界说。于是符益将水果分为“圆的”和“不圆的”。波尔将 A'界说为“混合”,而 A“都是同样的”,其含义是,通过与 A 的同类成分相对照,A'构成了一个混合。实际上他也是用“另一种”的形式来界说了 A'。

这个证据清楚地表明:互补性和“另一种”都在直观的或前运算的水平上出现,尽管它们是以一种简化了的形式出现的。它们并不是仅仅作为类包含的产物而出现的。如果将这些受试者看作是处于具体推理的最后阶段,即第Ⅲ阶段的早慧儿童,那是错误的。有几个迹象表明,一旦 B 被分割开来,他们便忘记了整体 B,而且,他们的“另一种”的概念只是一个部分的相对概念。只要将这些物体分割为“A 和其他的(A')”,他们就常常拒绝往 A 增加物体,除非被增加的这个种类已经呈现,例如奥布想用第三个盒子来放香蕉,因为香蕉并未出现在梨和“其他的水果”之中。波尔想将雪花莲放进第三个盒子,虽然他同意将一枝玫瑰(以及后来的一个杏)放进第二个盒子,“因为里面已经有几个像它的”。在将一些新成分交给西姆时,他完全忘记了“另一种”,而且回到了数目的对称上去。这些答复显示:“另一种”的概念仍然是微弱的。或者说,它是绝对的而不是相对的。即它是由最初的那些成分一次性地决定的,而且是不能扩展到任何新成分的(注意,这个错误并不普遍,这组受试者中最年幼的顾比并不是如此)。此外,这些受试者常常忘记,整体 B 是由 A 和“另一种”(A')所构成的,并有一种将 B 完全等同于 A'的倾向。甚至 7 岁 6 个月的亨特也将这个集合划分为“苹果和水果”,而且奥布对于得自于 A 和 A'之联合的整体集合也作如是阐述。这些答复使我们清楚地想起了第四章描绘过的整体之不守恒性。在那个时候,受试者将 B 完全等同于 A',并结论说 A 比 B 多。

然而,在第Ⅲ阶段,包含构造了互补性。从这个阶段往后,辅助类别 A'具有了 $B-$

A 的准确意义，而且 A 和 A' 都被理解为包含在 B 之中。

布拉(7岁4个月) 将花划分为“报春花(1)和除了报春花之外的所有的花(2)。”——“你能对它们作不同的安排吗?”——“能，玫瑰花在这里(1)，除了玫瑰之外的任何花在那里(2)。”对于水果也作了类似的划分：“苹果(1)和所有种类的一盒(2)。”——“能将柑橘放进去吗?”——“能。”——“任何水果?”——“是的，除了苹果。”——“你能对它们作不同的分类吗?”——“能，梨在这里(1)，所有种类的水果，但不是梨，在那里(2)。”——“能加上一个香蕉吗?”——“能，任何水果，除了梨。”

弗拉(7岁4个月) “苹果(1)，这里是其他的水果(2)。”——“能换种方法吗?”——“能，香蕉在这里，不是香蕉的水果在那里(2)。”——“假如我们将这两个盒子并起来呢?”——“水果。”

费游拉(8岁11个月) “所有的苹果在一起，所有其他的水果在一起。”——“换一种方法呢?”——“梨在一起，然后所有其他的水果在一起。”

赛益(8岁6个月) “所有的大的在这里(1)，其他的在那里(2)。”——“换一种方法呢?”——“梨和其他的。”——“你将榅桲放到哪里?”——“这里(2)，因为这是不是梨的水果盒子。”——“无花果呢?”——“那里(2)，因为那是所有不是梨的水果。”

布雷(9岁4个月) “没有皮的水果和有皮的水果。”——“换一种方法呢?”——“圆的和不圆的。”——“这么放怎么样[将一个梨放进(1)]?”——“行，苹果和没有苹果的水果，”等等。

格雷(10岁1个月) “可以将小的放在这里，其他的在那里。”——“看看是不是有某些真正一致的?”——“苹果在这里(1)，不包括苹果的所有不同的水果在那里(2)。”

他们所使用的这些词汇显示了是如何将互补性和包含结合在一起的。诸如“除……之外，所有的”，“任何你喜欢的，除了……”(布拉)，“所有其他的”(费游拉)，“不是(A)的(B)”(赛益)，“没有(A)的(B)”(布雷)和“不包括(A)的所有不同的(B)”(格雷)等表达，都说明了整体 B 的存在和辅助类别 A' 对于基本类别 A 的相对性。当然，尽管7—8岁的受试者在处理诸如花和水果等明显而熟悉的类别时能够将互补性和包含结合起来，但是，在对于植物或盾形纹章的分类方面就要落后一些(事实上，我们搞过这方面的一个实验)。

考虑一下这些辅助类别的准确意义还是值得的；它们是否具有一种功能的意义?在一个有6—14岁的83名受试者参加的实验中，我们试图比较上行的分类法(连续地结合)和下行的分类法(连续地划分)。最初的材料包括4个无生命物体和20个有生命生物，其中4个是人，16个是动物：4条鱼，4个野生动物，8个饲养动物(4个哺乳动物和4只鸟)。然而，我们发现，根据它们的用途将无生命物体和人联系起来的倾向相当强烈，以致我们只得放弃使用这些物体。

我们发现,虽然这些两分法未被非常年幼的儿童采用,但是,自它们从具体运算水平初期第一次出现的时候开始,就显示了稳定的上升。假定采用了两分法,那么辅助类别就具有其本来该有的意义,而这种意义是完全符合于互补性与包含之结合的。年幼的受试者有一种满足于直率的否定的倾向(A'是具有非 a 特性的 B)。后来,这种否定便进而导致对于某种刻画 A'之特征的肯定特性的搜求。下面是两个例子:

季艾(8 岁 8 个月) 将这些物体划分为无生命物体和动物,后者分为"凶猛的"和饲养的,饲养的再分为生活在屋子里的和生活在农庄中的等等。当加上一只松鼠时,他的肯定的界说(非饲养=凶猛)使他将松鼠加到农庄动物那儿。这使他不高兴:"虽然它不是凶猛的,但仍然不是像其他的那样是饲养的。"

赫思(10 岁) 将这些物体分为无生命的和有生命的,后者再分为动物和人,动物分为"所有的行走的和所有的生活在水中的",那些行走的又分为"能飞的和只能行走的"。然后将后者再分为"野生的和饲养的"。

这两个受试者都在结合否定的和肯定的特性:非饲养的=野生的或凶猛的,而非飞行的=只能行走的,等等。

4. 否　定

刚才我们已经看到,互补性先于包含,而且在非图形集合的水平上是以一种直观的形式出现的。现在我们便来看一看否定对于儿童的意义。假定有一个类别 A,那么,"非 A"这个表达方式是否表示 A 的"一切"方面(即 Z,它是这个系统的最一般的类别)的补充?或者说,它是否表示 A 在 B(高一级的类别)方面或中间类别即 C 或 D 方面的补充?以这种方式来提出这个问题,我们实际上便是在表达借助类包含关系的愿望。但是,我们有理由问:这对于外延的表达方式非 A 的意义是什么,对于内涵的表达方式非 a 特性的意义是什么,以及当非 A 的成分并不存在时,对于内涵的表达方式非 a 特性的意义是什么。

Ⅰ. 我们以一个实验开始,受试者是 4—7 岁的 78 名儿童,利用 18 个几何模型。这些模型包括三个大的和三个小的正方形,三个大的和三个小的圆形,三个大的和三个小的三角形。每三个成分组成一组,每一组都包括一个蓝色的、一个白色的和一个红色的成分。提问下列问题:Ⅰ(下行的顺序):(1)将所有的非圆形给我;(2)将所有的非蓝色圆形给我;(3)将所有的非蓝色小圆形给我。Ⅱ将非大而红的那些给我。Ⅲ(1)将除了……和……的所有的给我;(2)将除了……的……给我。Ⅳ(上行的顺序):(1)将那些非小而白的三角形(或"屋顶形")给我;(2)将那些非小三角形给我;(3)将非三角形给我。Ⅴ将一个不完全像……的给我(或将一个与……不一样的给我)。Ⅵ如果你将……给 x,将……给 y,你还剩下什么?Ⅶ将所有的非绿色的给我。此外,在开始时或者在结

束时，要求作一次分类。

下面是当一个特性被忽视时所获得的结果。（我们的研究限制于两个特性，圆形和三角形，以便使实验过程适当地短些。）

表Ⅸ 4—7岁儿童单一属性之否定（%）

	非圆形				非三角形				平均			
年龄	4	5	6	7	4	5	6	7	4	5	6	7
（受试者人数）	(20)	(24)	(21)	(13)	(20)	(24)	(19)	(13)				
非 A	80	64	95	100	100	70	100	100	90	67	98	100
非 A 的部分	5	0	0	0	0	20	0	0	2.5	10	0	0
无理解①	15	36	5	0	0	10	0	0	7.5	23	2	0

几乎所有理解这个问题的儿童都将否定归诸整个的集合。5岁儿童例外的是20%，他们只认为圆形是非三角形而忘记了正方形，这可能是由于圆形在前面的问题中提到过的缘故。4岁的受试者很少犯这样的错误，不过这很可能是由于人为的选择。因为受试者都是在校儿童，而那些不特别聪明的4岁儿童可能还未入校。然而也可能有这样的情况，即在5岁时对这类问题的解决实际上的确有退步，因为年幼儿童往往作总括的推论，而5岁儿童则开始分析各种形状，并自问哪些包含在“非圆形”之中，哪些排除在外。

由于类别 A_1A_2 的否定由两种特性来界说[如蓝色的(A_1)圆形(A_2)或小的(A_1)三角形(A_2)]，所以就有三种类型的反应：(1)否定被归诸为整个的集合[即，除了 A_1A_2 之外的所有的＝(A_1 非 A_2)＋(A_2 非 A_1)＋(非 A_1 非 A_2)]；(2)它被归诸为一个中间的类别[即(非 A_1 非 A_2)＋(A_1 非 A_2)；或(非 A_1 非 A_2)＋(A_2 非 A_1)，这等于(非 A_1)或(非 A_2)，如除了蓝色之外的所有的或除了(1)之外的所有的，或除了圆形之外的所有的，或除了三角形之外的所有的]；(3)它被归诸为这个等级系统中最接近的一个类别[即(非 A_1A_2)＝(A_1 非 A_2)或(非 A_1A_2)，(非 A_1A_2)＝(A_2 非 A_1)，如“非蓝色的圆形”就是红色的圆形或蓝色的正方形和三角形]。

下表显示了关于问题Ⅰ2加Ⅳ2仅仅根据形式分析（即它不考虑有关的特定属性）的结果。

表Ⅹ 对于两种属性之否定的综合反应（%）

年龄（受试者人数）	4(10)	5(25)	6(21)	7(14)
(1)除了 A_1A_2 之外的所看的	37	36	63	40
(2)非 A_1 或非 A_2	50	25	12	16
(3)A_1 非 A_2 或 A_2 非 A_1	13	39	25	45
(4)无理解	—	—	—	—

① 这些受试者将所有的 A 的成分当作非 A。

可以将这些结果同问题Ⅱ（“将不是大而红的那些给我”）的结果相比较。

年龄（受试者人数）	4(10)	5(20)	6(20)	7(14)
(1)除了 A_1A_2 之外的所有的	14	20	58	25
(2)非 A_1 或非 A_2	72	30	21	8
(3)A_1 非 A_2 或 A_2 非 A_1	14	40	21	67
(4)无理解	—	10	—	—

对于由三个特性来界说的一个类别之否定，有四种可能的解释方法：(1)否定可以从所有的物体的方面来理解，这样，在由 $A_1A_2A_3$ 界说的那八个不相连的类别①中，除了一个之外，非 $A_1A_2A_3$ 都包括；(2)非 $A_1A_2A_3$ 可能被看作是非 A_1A_2 或非 A_1A_3 或非 A_2A_3，因而产生六个不相连的类别；(3)从一个与 $A_1A_2A_3$ 相去甚远的方面来看待否定，这样它就包括八个基本的不相连的类别中的三至五个类别（例如，非 $A_1A_2A_3$ 可以被看作是非 A_1）；(4)最后，这种否定可能看作是 $A_1A_2A_3$ 的下一个等级的那些类别中的一个（例如，非 $A_1A_2A_3$ 可能被作为 A_1A_2 非 A_3 或 A_1A_3 非 A_2）。

在表Ⅹ至表Ⅻ中，存在着几个一致的倾向。(a)在否定考虑一个中间等级的类别（这个类别不是整体，也不是被否定类别的下一个等级的类别）方面，在稳定地减少（见表Ⅹ和表Ⅺ的第二行和表Ⅻ的第三行）。(b)相反地，考虑下一个等级（互补性采取第3节所谈到的那个意义上的辅助类别的形式）的否定却随着年龄而稳定地增加（对于一个两种属性的类别之否定从13%增加到45%，见表Ⅹ；对于“大的红的”之否定从14%增加到67%，见表Ⅺ；对于一个三种属性的类别之否定从零增加到25%，见表Ⅻ；该表方括号中显示严格意义的辅助类别的数字相等于7岁时没有括号的数字，但不与7岁以前的相等）。(c)最后，考虑整体的否定在6岁时上升到顶点，然后便开始下降。在4—5岁之间之所以增加，是因为4岁和5岁的儿童难以同时考虑两种或三种特性。随后在7岁时的减少是由于这么一个事实，即处于这个水平的受试者决心要将他正在考虑的那个类别同它的近邻区别开来。

这些结果给我们的启发是，否定的发展依赖于包含关系的发展。这两种否定的类型在类包含的等级系统或次序系统中都具有一般的意义，它们都是整体方面的否定（即绝对意义上的非 A）和下一个包含类别方面的否定（这形成辅助类别 $A'=B-A$）。处于这两者之间的一个类别的否定，只有在受试者自己提出的某种特别的问题方面才有意义。于是，在当前的这个实验中（它并未暗示任何目的），解释就自然地越来越倾向于这两种否定的类型。那些中间的类型（4—5岁的儿童比处于运算水平上的7岁儿童更常出现这些类型）只是年幼儿童不能处理有次序的包含这一事实的表现。

① 它们是 $A_1A_2A_3$，$A_1A_2A_3'$，$A_1A_2'A_3$，$A_1'A_2A_3$，$A_1A_2'A_3'$，$A_1'A_2A_3'$，$A_1'A_2'A_3$，$A_1'A_2'A_3'$。

表Ⅻ 由三种属性界说的一个类别($A_1A_2A_3$)之否定(%)

	小的蓝的圆形				小的白的三角形				平均			
年龄	4	5	6	7	4	5	6	7	4	5	6	7
(受试者人数)	(10)	(25)	(21)	(14)	(10)	(25)	(21)	(14)				
(1)除了 $A_1A_2A_3$ 之外的所有的	14	18	72	50	30	44	68	33	22	31	70	42
(2)8 个基本类别之中的 6 个	14	22	4	17	15	5	17	42	15	13	11	29
(1 和 2)	(28)	(40)	(76)	(67)	(45)	(48)	(85)	(75)	(37)	(44)	(81)	(71)
(3)3—5 个基本类别	72	23	10	9	55	12	6	0	63	18	8	4
(4)1—2 个基本类别	0	37	14	24	0	40	9	25	0	38	11	25
									〔0〕	〔18〕	〔9〕	〔25〕①

Ⅱ. 第二个实验(它更为微妙)只能看作是尝试性的。在这个实验中,我们用了一些可以安排为表示一个农庄的各种物体。这些物体是:(a)人;(b)动物,包括饲养的哺乳动物和鸟;(c)植物,包括花;(d)无生命物体(工具、设备等)。询问的问题如下(有时在物体呈现时问,有时是在物体没有出现的情况下问):

(1) 让我看看(或告诉我)那些不是动物的东西。说人不是动物或说太太不是动物,哪一种说法更准确些(或是对的)? 为了引起儿童证明他们的理由是正当的,我们甚至还问:说一个人是一个动物或说一位太太是一个动物,哪一个更可笑,为什么?(2)让我看看哪些东西不是鸟(同前面一样,我们通过询问"还有吗?"来促使儿童作详细的论述)。说猫不是鸟和说桶不是鸟,哪一种更准确些? 说……哪一种更可笑些?(3)让我看看除了"东西"之外的那些(或不是一个"物体"的那些)。(4)让我看看不是郁金香的那些,等等(参见 1 和 2)。(5)不是鸟的那些多,还是不是动物的那些多(在这一点上,我们也提出那个包含之数量关系的问题:动物多还是鸟多)?

我们将不拘泥于 1 至 4 那些问题的结果,因为除了受试者在目前的情境中显出一种比较落后的倾向之外,这些结果同得之于用几何模型做实验的那些结果是相似的。这可能是由于有关的包含关系之结构的微弱,或者是由于受试者考虑的是否定而不是即刻进行一个简单的动作这一事实。当我们将 13 名 8 岁儿童组同 12 名 13 岁儿童组相比较时,我们发现,前者趋向于取绝对意义上的否定,而后者则更为经常地考虑高一级的类别。在问到哪些物体是"非动物"时,13 名 8 岁的儿童中有 8 名使用了整个的集合,而在 12 名 13 岁的儿童中有 8 名使用了最邻近的类别(有生命的物体)。在指出"非鸟"方面,13 名 8 岁的儿童中有 9 名引进整个集合,12 名 13 岁的儿童中有 11 名限制在动物类别之中。这里有两个典型的例子:

哈尔(8 岁 11 个月) 表明任何人、植物或无生命物体都是"非动物"。"一个

① 方括号里的数字是将否定同 $A_1A_2A_3$ 下一个等级的一个类别联系起来的受试者人数。

小男孩告诉我‘这个男人不是动物’，另一个小男孩告诉我‘这位太太不是动物’，他们是同样的正确，还是一个比另一个正确些？”——“那个说男人的不太正确。”——“为什么？”——“太太更像真的，这个太太是木头做的，这个男人有腿；他比这个太太更像动物。”关于非鸟，相应的选择是一头牛和马车（在最初的选择中，哈尔将这两样都选了）。“那个说马车的比较正确。马车没有腿，它有轮子。牛有腿，鸟也有腿。”

在要求说出哪些东西是“非郁金香”时，哈尔没有说他面前的任何东西，而仅仅提到花和农作物（即接近于郁金香类的一个类别的成分）。当要求他确定对于说牛或兰花都不是郁金香，哪一个更正确些时（是他自己提到兰花的），哈尔回答说：“当然是牛，牛的形状同花差得远些。它有角和耳朵。花没有。它有一条尾巴（辫子）……哈！不过花也有①！”——“一个墨水瓶和一棵兰花呢？”——“那个说墨水瓶的比较正确些……”等等。

罗思（12岁3个月） 提供了一个联系邻近类别的否定的例子。“说男人不是动物和说太太不是动物，哪个比较正确些？还是两个同样正确？”——“两个都对。不过，还是那个说男人的更对些。”——“为什么？”——“男人有点像动物。他有腿。他的身体多少也有点像。”——“说男人是动物和说太太是动物，哪个更可笑些？”——“说太太是动物更可笑。”——“说牛不是鸟和说马不是鸟，哪个更正确些？或者，它们是不是一样的正确？”——“说马不是鸟有点滑稽。”——“牛呢？”——“它是动物。”当提到非郁金香的东西时，罗思只报了一些花的名称，还补充说：“人们可以报出所有不是郁金香的花的名称。”——“说动物不是郁金香和说玫瑰不是郁金香，哪个正确些？”——“两个都正确，不过第二种稍微更正确些，因为它也是属于花。”——“说‘雏菊不是郁金香’和说‘狗不是郁金香’，哪个更可笑些？”——“说狗的更可笑些，因为它更(1)不像郁金香。”——“说雏菊的可笑吗？”——“是的，不过它不像那个可笑。”

应该说，举这两个例子已经足够了，因为它们具有充分的代表性。它们说明了理解否定的方式。哈尔和罗思俩人都认为否定包含有许多不同的程度。罗思说狗“更不像郁金香”。哈尔解释说，“与一棵兰花相比，牛的形状同花（郁金香）差得远些”。罗思（实际上也是大多数年长儿童）得出结论，最有用的否定乃是那些指明邻近类别之间差异的否定（即非$A=B$非A，或C非A）。另一方面，同大多数8岁儿童一样，哈尔则认为最有力的否定是最富有意义的否定，因为它指出了广泛的差别（即非$A=Z$非A）。

这种与一些邻近的类别的联系，看来是随着年龄的增长而增加的。它肯定是由于有次序的包含关系之发展的缘故。因此我们认为，向年龄为10—13岁的一些受试者提出这个否定类别之外延的问题或许是有益的。在下一节中我们将讨论它。

---

① “辫子”＝“花梗”。

5. 补充种类的包含和两重性原则

在类别的顺序和它们的补充的顺序之间，存在着一种两重性，它可以表达为：

$$(A)<(B)\rightarrow(\text{非 }A)>(\text{非 }B)$$

[例如，如果动物这个类别(B)包含鸟类(A)，于是类别非鸟(非 A)就包括非动物(非 B)；结果非鸟就比非动物多，因为前者包含着非鸟的动物加上非动物]。

向 10—13 岁儿童提出一些以这个涵义为基础的问题，有两个理由。第一个理由相当简单，即这个问题填补了我们对于互补性和否定研究方面一个间隙。不过，从我们的总的理论的观点来看，第二个理由更为重要些。我们在其他地方①说过，在具体运算水平上出现的那些结构，受到基本的类别“群”和关系的限制。这些“群”实际上仅仅是一些半格构。而且，虽然它们在一些特定的方面类似于数学的群，但结合的原则却只是部分地相符。在形式推理或命题推理的水平上，我们发现，青少年的思维开始显露格构和群的类别结构——在命题结合为符合四元群 INRC 的许多事例中，情况尤其如此。然而，这并不意味类别和关系逻辑的贬损。它的意思是，只要儿童的推理局限在有关具体事物之安排和再安排的那些运算的范围之内(“具体”推理的水平)，他们就只能达到这种逻辑的一个部分。我们所说的那些“群”，便构成了这种逻辑的那个部分。这些群并不包含我们目前正在考虑的那种两重性。其理由是：它们不是涉及以一般的否定类别(非 A_1 非 B 等)为基础的关系，而是只包括那些邻近类别(A 和 A'，B 和 B'等)之间的比较有限的互补性关系。然而，一个完全的类别逻辑的确包括两重性原则，因此，它不仅接近于格构结构，而且也包括 INRC 群。于是，我们有理由期待儿童在形式推理阶段的初期掌握类别逻辑方面的两重性法则，这同我们已经知道的下列情况是完全相像的，即他们在命题逻辑方面掌握了相同的原则：$(p>q)=(\bar{q}>\bar{p})$。这正是我们希望得到证实的东西。

为了使我们的观点表达得更清楚些，我们要补充说，两重性法则本身乃是 INRC 群的一个实例。换言之，$A<B=$ 非 $B<$ 非 A 这个陈述将反演运算(N)(它将 A 转换成非 A)同互反运算(R)(它将 A 和 B 的顺序颠倒过来)结合了起来。现在，虽然这两种可逆的形式都出现在具体的“群”之中，但是，反演只出现在类别群之中，而互反只出现在关系群之中。在这个水平上，我们并没有发现一个足以容纳这两者的结构。形式推理的主要特征恰恰就是，它呈现了反演和互反的综合。我们知道，对于命题逻辑来说，这是真实的，我们现在将看到，这也同样地适用于类别逻辑——这是由于两重性法则。

---

① 英海尔德和皮亚杰：《逻辑思维的发展》，1959；皮亚杰：《逻辑学与心理学》以及 W. 梅斯(Mays)的“导言”，曼彻斯特大学出版社，1952。

我们进行过一个实验,受试者是28名10—13岁的儿童。我们利用了得通过连续的两分法加以划分的一些动物的图片(如划分为鸟和其他动物,然后再分为鸭子和其他的鸟)。提出的问题如下:(1)"让我看看所有不是鸭子的东西,所有不是鸟的东西"等等;(2a)"不是鸭子的有生命的东西多,还是不是鸟的有生命的东西多?"(对于鸟和动物也是如此);(2b)"能够列举出来的不是鸭子的东西多,还是不是鸟的东西多?"(对于鸟和动物也是如此)。对于被问到问题(2a)的那些受试者,在开始时先直接提出一些包含之数量关系的问题("鸟多还是动物多?"等等)。对于那些被问到问题(2b)的受试者,要先询问一些有关否定的问题(第4节)。如果一个受试者对于问题(2a)有困难,就用一些有关减法的问题来帮助他(如果一个人拿去所有的鸭子,还剩下什么?如果一个人拿走所有的鸟,还剩下什么?如果一个猎人杀死了所有的鸭子,还剩下什么?等等)。我们在第4节中看到,这些问题比有关包含的问题容易回答。

受试者划分为四组:(1)不能回答形式为$A<B$以及非$B<$非A的问题;(2)对上述第一类问题的回答成功,在经过许多预备性的组合之后最终能解决第二类问题;(3)毫无困难地解决了上述两类问题。

列举显然属于第(1)组的例子没有什么意义。但这里有一个介于第(1)组和第(2)组之间的例子:

艾游德(11岁7个月) 在进行过几次两分之后:"动物多还是鸟多?"——"鸟是动物,它是同样的东西。"——"不过,如果有一个人数了所有的鸟,然后数所有的动物,哪一次数的数目大些?"——"那个人数所有动物的那一次。"——"鸭子多还是鸟多?"——"鸭子属于鸟;鸭子也是鸟。"——"一个人有一次只数鸭子,另一次数鸟,哪一次他得到的数目大些?"——"一样大,因为鸭子是鸟。"——"那里有几只鸭子?"——"(他数了数)四只。"——"鸟呢?"——"八只。"——"鸭子多还是鸟多?"——"一样多。"——"有没有不是鸭子的鸟?"——"有。"——"有没有不是鸟的鸭子?"——"没有。"——"那么,鸭子多还是鸟多?"——……——"那里有几只鸟?"——"八只。"——"鸭子呢?"——"四只。"——"数目大些还是一样大?"——"鸭子是鸟(他又数了数它们),一回事。"——"在世界上,……多?"——"你无法说;你不能将它们都数遍。"——"如果一个人数了鸟,也数了动物,那么他发现数鸟时得到的数目比数动物得到的数目大些还是小些?"——"一样。"——"你有几只鸟?"——"八只。"——"动物呢?"——"十五只。"

"不是鸭子的活的东西多,还是不是鸟的活的东西多?"——"不知道。"——"如果你将鸭子拿走,剩下什么?"——"(其他的)鸟和(其他的)动物。"——"如果你将鸟拿开呢?"——"剩下(其他的)动物。"——"好,那么你将它们比较一下。"——"一回事,因为鸭子是鸟,(在数鸟的时候)人们将所有的鸟都数了。"——"将不是鸟的全部拿开。"——(他正确地这么做了。)——"(将它们放回原处以后)将不是鸭子的全部拿开。"——(正确。)——"你哪一次拿走的多些?"——"一回事;鸭子是

鸟。”——“不是动物的活的东西多，还是不是鸟的活的东西多？”——“鸟是动物，所以是一回事。”

这个事例看来颇有意思。虽然艾游德已经11岁7个月，虽然他能够看出包含关系（他知道有不是鸭子的鸟，但没有不是鸟的鸭子）并因此而数出了四只鸭子八只鸟，但他仍然坚持认为这两者数目一样多。他不能摆脱赋予包含的不正确的对称性（参见第三章），而这种对称性将“所有的A是B”转换成了“所有的A是所有的B”。当然，这意味着他也不能处理补充的包含，将“非B是非A”等同于“所有的非B是所有的非A”。

下面是第(2)组的三个例子。

德游夫（11岁6个月）“鸭子多还是鸟多？”——“不过鸭子也是鸟。”——“是的，哪个多些呢？”——“鸟多。”——“鸟多还是动物多？”——“动物多，因为鸟也是动物。”

“让我看看桌子上的所有东西中，哪些不是鸭子。”——（指出那些非鸟的东西。）——“就这些？”——“不（正确）。”——“让我看看所有的不是鸟的那些。”——“动物，那些是不会飞的。”——“这些都是活的东西？”——“是的。”——“不是鸭子的活的东西多，还是不是鸟的活的东西多？”——“一回事，因为鸭子同鸟是一样的东西。”——“假定一个猎人想杀死所有的鸭子，另一个想杀死所有的鸟。杀死所有的鸭子之后剩下的多还是杀死所有的鸟之后剩下的多？”——“当我杀死所有的鸟的时候剩下的多。”——“为什么？”——“如果一个人杀死所有的鸭子和所有的鸟，鸭子也是鸟。”——“不是鸟的活物多，还是不是动物的活物多？”——“一回事，什么也没有。”——“你的意思是什么？”——“鸟是动物。所以什么也不剩。”

艾尤比（11岁10个月）“不是鸟的活物多，还是不是动物的活物多？”——“不是动物的活物多些。”——“为什么？”——“因为有不是动物的人。”

李益尔（13岁6个月）“能列举出来的不是鸟的东西多还是不是动物的东西多？”——“不是动物的多些。”——“为什么？”——“首先鸟就是动物。”——“所以就怎样呢？”——“……”

最后，这是有一个第(3)组的例子和三个第(4)组的例子。

罗奥克（11岁7个月）“鸭子多还是鸟多？”——“鸟多，因为鸭子是鸟。”——“动物多还是鸟多？”——“动物多，因为鸟是动物。”——“在世界上呢？”——“动物多，因为鸟是动物。”

“不是鸭子的活物多，还是不是鸟的活物多？”——“（犹豫）不是鸟的多……它们一样多。”——“假定一个猎人杀死了所有的鸭子，另一个杀死了所有的鸟……？”——“不是鸭子的多，因为有不是鸭子的鸟和不会飞的动物。”——“不是鸟的活物多，还是不是动物的活物多？”——“不是鸟的活物多，因为有不飞的所有的动物。那些不是动物的也不是鸟；它们不是任何东西。至于不是鸟的那些，是所有不飞的动物。”——“在世界上呢？”——“（犹豫）不是鸟的多。”——“为什么？”——

"不飞的动物和人都剩下了。"

史铁尤(11岁4个月) "鸭子多还是鸟多?"——"鸟多,因为鸭子是鸟。"——"世界上呢?"——"一样多。"——"鸟多还是动物多?"——"动物多,因为鸟都是动物。"——"世界上呢?"——"一样多。"

"不是鸭子的活物多,还是不是鸟的活物多?"——"不是鸭子的多些。"——"世界上呢?"——"一样多,因为所有的鸭子都是鸟。"——"不是鸟的多,还是不是动物的多?"——"所有的鸟都是动物。是动物的活物多些;不是鸟的多些。"

路思(11岁8个月) "鸭子多还是鸟多?"——"鸟多;鸭子是鸟。"——"鸟多还是动物多?"——"动物多,因为鸟是动物。"——"不是鸭子的多,还是不是鸟的多?"——"不是鸭子的多。鸟有许多种类。鸭子只是一种。"——"不是鸟的多,还是不是动物的多?"——"不是鸟的多些,因为鸟是一种动物,有几种不同的动物。"

德里(13岁4个月) "能列举出来的不是鸟的东西多,还是不是动物的多?"——"不是鸟的多些。"——"为什么?"——"鸟是一种有限的东西(=子类),动物是许多东西(=整个类别)。"——"将它说得更清楚些。"——"对于'不是鸟的',你可以说牛和马,对于'不是动物的',你就不能说牛和马!"——"世界上是动物多,还是鸟多?"——"动物多,因为它们是整个的一群,鸟就不是。"

这些儿童不仅在形式推理水平的初期解释了两重性原则的含义,而且还尽可能地用最清晰的方法来阐述它。所以,当史铁尤说"是动物的活物多些;不是鸟的多些"时,他就是在将否定和互反结合起来,显示了他熟悉两重性原则。这意味着类别的等级的次序现在是完全的。基本类别的直接包含是第一阶段,而且附属于具体运算水平;两重性原则是第二个,也是最后一个阶段。

6. 空　类

分类运算在第Ⅲ阶段,也就是在具体运算的水平上确立。这些运算直接运用于物体,它与形式运算运用于言语的陈述是不同的。这种论证往往是从一项进行到下一项,与之一致的结构往往是类别和关系"基本群"中的一个。正像我们刚才看到的那样,这些并不包括类别逻辑和关系逻辑的全部,因为后者将包含两重性原则,它是INRC群的一个形式(INRC群运用于命题的类别)。这就是 $A<B\rightarrow$非 $A>$非 B 这种包含直到第Ⅳ阶段(即形式运算阶段)才被理解的原因。

还有一个与具体运算和形式运算之间的分界线有关的问题:空类或零类的问题。类别的"基本群"包含了这个概念,因为如果 $A=B-A'$,那么 $B-A-A'=0$(或者,比较简单一些,$A-A=0$)。$A\cap A'=0$ 也是如此。换言之,一个类别同它自身相减就变成零,而且两个不相连的类别的相交也是零。从严格意义上的运算的观点来看,可以说

7－8岁的儿童理解了$+A-A=0$这个运算，这是就他知道加上A，然后再消去它，等于什么也没有做(即$+0$)这个意义上来说的。但是，既然具体运算运用于物体，而空类又无任何物体，所以我们就要问，儿童是否可能像思考其他一些类别那样地思考它？这完全不是一个运算的操作问题。我们知道，零是算术中最后发现的数字，而且，承认它是一个真正的数字，要远远晚于加法和减法的发明(在减法中由于$n-n=0$的问题，零便产生了)。所以，我们将在研究了互补性和否定之后，随即就来发现处于不同水平的儿童如何处理有一个补充类别作为一个类别存在，但它又不包含任何物体，因而是空类的情形。

我们进行了一个实验。在这个实验中，问题是以极其自然的形式提出来的。要求对一些正方形的、圆形的和三角形的卡片进行分类，这些卡片中有些有树、水果、屋子等的图画，而另一些则是空白的。先要求受试者对所有这些卡片按他选择的方法加以分类，然后要他将这些一分为二。问题在于，他是否立即接受有些卡片是空白的这一事实，或者说，他是否将他的分类限制于肯定的特征(如形状)。

儿童们的反应非常清楚。只有在10－11岁时，儿童才采用那种在我们看来是最自然的分类：分为空白的卡片和有图画的卡片。到那时为止，我们发现了三种不相关联的反应类型，尽管它们并不代表不同的成熟水平：(1)空白卡片的分类标准不同于其他卡片的分类标准(形状，而不是内容)；(2)空白卡片可能混进有图画的卡片的那些集合之中；(3)不理会空白卡片，并让它们乱放在那里，而只对有图画的卡片加以分类。在所有这三种情况中，受试者都拒绝构造一个空类。这里有几个例子：

戴皮(5岁8个月)　摆成三堆：樱桃、屋子和树，对空白卡片不加整理[第(3)种反应]。“你准备对这些怎么办?”——“不管。”——“能将它们放在一起吗?”——“能(他将它们归为三堆：正方形，圆形和三角形——第一种反应)。”——“将所有的卡片都安排一下，使它们少占空间。”——(有图画的三个集合和空白卡片的三个集合。)——“你能将所有这些放成两堆吗?”——[他将有图画的分成两个集合，再加上空白的——第(2)种反应。]——“这样行吗?”——“不，因为这些上面没有图画，那些上面有图画。”(这等于是那个空类的言语反应。但并没有进行实际的分类。)

丹恩(6岁5个月)　根据卡片的图画和它们的颜色加以分类，这使他形成一个空白卡片的集合[第(1)种反应]。“你能将它们摆成两堆吗?”——“(他将空白卡片和绿的放在一边，红的放在一边)我决定将所有的绿的都放在一起，所有的红的放在一起[注意，没有提到空白卡片——第(2)种反应]。”——“这些(空白的)怎么样，它们是绿的吗?”——“不[他将它们放到一边——第(3)种反应]。”——“不过，我要求分成两堆。”——“现在我有个主意，我要把它们(有图画的)翻过来，那么它们就都是空白的了(他这么做了，然后将它们分成有图画的和没有图画的)。”

波奥(7岁)　仅对有图画的分类。“那些呢?”——“我没法弄；它们上面没有图画[第(3)种反应]。”——“将它们都作安排。所有的卡片都要利用。”——(她按

照形状分别对它们作了分类。)——"它们不是在有些方面相同吗?"——"是的,它们都是空白的。"

贾阿克(8岁3个月) 将红色的卡片形成一堆,绿色的卡片形成一堆。"这些呢?"——"它们什么也不是,它们都是空白的[第(3)种反应]。"——"你能将它们放在一起吗?"——"能。"——"告诉我,你现在怎么分?"——"一堆红颜色的,一堆绿颜色的,一堆什么也没有的(这似乎是空类的定义)。"——"那么,按你的喜欢来安排它们。"——(她根据它们的图画作了分类,空白的没有分。)——"你能摆成两堆吗?"——"(她开始拒绝,然后:)能,这些有图画,这些没有。"——"这样行吗?"——"它们是空白的,人们不能摆成空白的一堆[又是第(1)种反应,它利用了肯定的特性]。"——"你还能怎么做?"——(她根据图画和颜色以矩阵的安排对这些卡片作了分类,但未利用空白卡片。)——"空白的怎么办?"——"我不管它[第(3)种反应]。"——"你还有什么主意吗?"——"有[分别按形状对它们分类——第(1)种反应]。"——"能不能这样做(将有图画的放成一堆,空白的放成一堆)?"——"能,空白的在一起,因为它们没有图画(这显示了她理解空类的可能性)。但我没有利用这些空白的,因为它们与另一堆不相配。"

德尤尔(9岁5个月) 同样地在最后提出一个两分法的建议:"这里的都有图画,那里的都没有图画。"但他也不甚满意。"如果问你为什么像这样地划分它们,你怎样来解释?"——"我说:如果你喜欢将这些(空白的)放在一起,你可以这样。不过这不是真正地摆成两堆,因为这里有三种颜色(而那里却不是)。"

下面的说法并不夸张,即尽管明确地提出了要将所有的成分加以分类,但对于将卡片划分为有图画的和没有图画的,有着一种并非偶然的抵制现象。这正是忽略空白卡片的否定特性[第(2)种和第(3)种反应]或者利用空白卡片的肯定特性的原因之所在。最后那种反应的最好的例子是丹恩的例子,他将卡片翻过来以使它们都成为空白的,然后再根据形状来对它们分类。

人们可能会反对说,儿童是正确的,在一个"好的"分类中,空类是没有地位的。但是,我们不是在努力发现符合逻辑的过程。我们仅仅是在将儿童互相比较。从10—11岁开始,他们的态度便完全不同了:

贺夫(10岁) "能摆成两堆吗?"——"能,将有图画的放在一起,这些(空白的)分开。"

乔比(10岁5个月) "你已经摆成三堆,怎样将它们放进两个盒子?"——"那些没有图画的放进一个盒子,那些有图画的放进另一个。"

布拉尤(10岁8个月) "假如要你将它们都放进两个盒子呢?"——"一个盒子放有图画的,一个放没图画的。"

皮格(11岁4个月) "所有带图画的放进一个盒子,让它们在一起,没有图画的放进另一个。"

我们得解释一下这种简单的两分法之所以这么晚才发展的原因。其原因肯定在于态度的不同，而这些态度竟造成了具体运算水平同形式思维阶段，甚至同大约从 10 岁或 11 岁开始的预备期如此巨大的差别。具体运算同它们运用的那些事物是联系在一起的。可以料想，如果这些物体确实存在，那么空类的概念就要被排斥。另一方面，形式思维处理的是不依赖其内容的结构，即使是在分类的领域中，情况也是如此，于是，对那些 10－11 岁的儿童或我们看来是非常自然的事情，对于 5－7 岁、甚至 7－9 岁的儿童来说却并非如此。

7. 结　论

虽然本章的那些实验结果不够连贯，但有一条线索贯串始终，它显示在每一个年龄上，互补性的发展是如何同包含的发展相联系的。

首先，在包含确立之前就存在着“另一种”的前运算形式（参见第 3 节）。这表现为将一个集合划分为 A 和“其他的”（A'）。但是，由于“另一种”并不是联系着整体（即 $B=A+A'$）来加以考虑的，所以它们往往便呈现出一种绝对的意义（以致即使有些新成分并不属于 A，但许多受试者还是拒绝往 A' 上增加这些新的成分）。后来，“另一种”获得了一种与整体 B 有联系的意义，这意味着认识到 A 和 A' 包含在 B 之中。只是到了这个时候，A' 才具有界说为互补性运算的真正的辅助类别的特征。

由于这种机制的发展，辅助类别便概括成包括单一成分的事例。在处于前运算水平的时候，“类别”只是通过直观和前运算的“集合”来预示，单类的概念尚未被掌握，原因是它恰恰与一个“集合”的观念相抵触（参见第 2 节）。当然，5－7 岁的儿童，可能会解决在成分之间关系变化的一系列的描述中选出的“一个不同的”实际问题（第 1 节）。但这并不存在任何有关的内涵的分类。只有到了 7－8 岁，即到了运算的互补阶段时，才能以对待其他类别的方式来处理单类（第 2 节）。

空类（第 6 节）是一个类似的问题，因为空类也是与“集合”的概念不相容的。但是，它的困难程度更大些，因为一个没有任何成分的类别也是与具体运算的逻辑，即形式与内容有着不可分离之关系的那些运算不相容的。这正是在包含关系的结构开始同它们的具体内容相分离之前（即在 10－11 岁之前）空类之所以被拒绝的原因。

最后，在我们对于否定的分析中，我们能够看到，最初的否定是未被分化的（以致将非 A 完全等同于任何不具备属性 a 的任何成分，第 4 节）。这种分化的缺乏同对于“另一种”的直观的理解有着“血缘”的关系，它与依靠包含的运算的理解是相对的。随着儿童年龄的增长，他们越来越倾向于从邻近的类别中挑选那些特别适合否定的成分。不过，他们始终清楚地意识到，差别是比较大的，这些差异就像在一个等级系统中被远远分离开来的那些类别之间的差异一样。事实上，正是由于儿童知道差别的这种程度，他

才能区分了否定的各种细微的差异。这个方面的发展最终导致发现两重性法则(第5节):$A<B\rightarrow$非 $A>$非 B。我们指出,这个法则乃是INRC群四种转换的一个表达方式,在形式推理阶段之前它之所以不被理解,其原因即在于此。

所有这些都意味着,无论从心理学或是从逻辑学的角度来看,互补性同类包含有着密切的联系。事实上,正像在第二章至第四章中所概述的那样,前者的完善经历了与后者的发展完全平行的一些连续的阶段。

第六章　倍增的分类(矩阵)[①]

迄今为止,这个研究仅限于附加的分类。现在我们要转向两重和三重倍增的分类,这些分类常常表现为一些矩阵,即两个或数个项目表。

它们也具有一个比较复杂的逻辑结构,并引出了一个有趣的心理学问题:当受试者的发展水平超过(第一章意义上的)图形的集合时,附加的分类便有了改善,而倍增的分类本身却非常容易提供某种空间的描绘。毫无疑问,这种安排最终将变成纯粹的符号,但在开始时,它很容易等同于那种碰巧显示出与有关的逻辑结构相一致的图形的集合。

这种情况有点自相矛盾。从逻辑的观点来看,倍增的分类比附加的分类要复杂些。但另一方面,它们又得到图形描绘的支持,而这种图形的描绘是很容易转变为我们在年幼儿童处发现的那种类型的思维(图形的集合)的。大约在7—8岁时,儿童们同时掌握了倍增分类的附加分类。我们需要确定的问题是,图形的因素补偿了附加的逻辑复杂性,还是这两种系统同时出现这一事实主要是由于这两种类型运算的互相依赖。在后一种情况下,我们就要把倍增结构的图形特性看作是次要的:最初时,从某一角度来说,它们对于做出可能的分类是有帮助的,但这种帮助不久就变成与其说是真正的还不如说是表面上的,而且,这种描绘最终将仅仅变成一种符号的形式。

1. 问题的陈述

假定我们有一组成分(如红色的和蓝色的正方形和圆形),根据一个标准可以将这些成分划分为两个类别 A_1 和 A'_1(如 A_1=正方形,A'_1=圆形),也可以根据第二个标准将它们划分为另外两个不同的类别 A_2 和 A'_2(如 A_2=红色的成分,A'_2=蓝色的成分)。我们可以用 B_1 这个名词来表示前两个类别的联合,即 $B_1=A_1+A'_1$;用 B_2 来表示后两个类别的联合,即 $B_2=A_2+A'_2$。倍增的分类就是按照两个附加的类别 B_1 和 B_2 同时地对每一个成分加以分类。这种分类产生了四个子类:

$$B_1\times B_2=A_1A_2+A'_1A'_2+A'_1A_2+A_1A'_2=B_1B_2$$

① 与Y.费勒(Feller),F.弗兰克,F.麦克尼尔(MCNear),F.马修(Maffhieu),A.莫夫,G.诺尔丁,B.雷蒙-里佛和W.西尔斯(Sears)合作。

如果我们想把这些成分划分为这四个类别，以使属于最初那些子类（如 A_1）中任何一个子类的那些成分相互贴近，那么，唯一可能的空间形式就是 2×2 的矩阵形式。

	A_1	A_1'
A_2	A_1A_2	$A_1'A_2$
A_2'	A_1A_2'	$A_1'A_2'$

在这个图表中，A_1 和 A_1'相当于两个纵列，A_2 和 A_2'相当于两个横排。当然，倍增的分类不一定非要用空间的形式来表示，它可以用一种纯抽象的方式来加以描绘。但是，倍增的包含则可以，而且必须用矩阵来象征性地表示。正像类包含可以通过拓扑学的欧拉圈来加以表示一样。

检查本章开始时提出的那两个陈述并不困难：这种类型的结构比附加分类的结构要复杂些，但它符合于一个空间的构造，而第Ⅰ阶段的受试者则将这个空间的构造解释成“图形的集合”。

就第一个陈述来讲，我们回想起附加分类的十个标准（第二章第 1 节），所有这些标准都可以在第Ⅲ阶段看到，而且除了类包含的一个标准之外（第 7 个标准），所有这些标准都在第Ⅱ阶段期间得到运用。现在，这些标准中的每一个都同样适用于倍增的分类（因为它是两个或数个附加分类的复合）。但是还得增加两个新的标准。我们将把这两个标准及其结果编号为(11)至(14)。

(11)所有的 B_1 的成分也属于 B_2，反过来也是如此。这样，所有的 B_1 的成分都被 B_2 乘。如果存在着不属于 B_2 的 B_1 的成分（例如，如果有黑色正方形和圆形，也有红色和蓝色的），那么就得增加一个新的类别 B_2'（黑色成分）以完成这种分类，这样就会有六个子类：

$$B_1 \times C_2 = A_1A_2 + A_1A_2' + A_1B_2' + A_1'A_2 + A_1'A_2' + A_1'B_2'$$

(12)所有的 A_1 的成分也必须属于 A_2 或者 A_2'（但不是属于这两者，因为 $A_2 \times A_2' = 0$）。对予类别 A_1'，A_2 和 A_2'来说，情况也是如此。

(13)A_1 和 A_1'只包括属于 A_2 或者 A_2'的那些成分。同样地，A_2 和 A_2'也只包括属于 A_1 或者 A_1'的那些成分。

(14)A_1A_2，A_1A_2'等基本的联合中的每一个联合，构成一个，而且只有一个倍增的类别。

另一方面，一个矩阵显然是一种空间的结构，因为有对称性，它尤其要求感知的作用。如果 A_1 和 A_1'是正方形和圆形，A_2 和 A_2'是红色和蓝色，那么，A_1A_2 中的那些正方形就与 A_1A_2'中的那些均等，而 A_1A_2 中的那些红色成分就与 $A_1'A_2$ 中的那些均等。这种对称性是双重的（相当于图表的横轴和竖轴），但（通过否定）它也与逻辑结构中的两种类型的互补性相一致。

这种感知的因素是相当重要的，它促进甚至造成了问题的解决。这些解决问题的

方式看起来是运算的，但其基础却是“图形集合”的方法，这确实是一种通常被称为矩阵测验(如拉芬的“累进矩阵”)的测验。在这些测验中，交给受试者一份乘法表，在这个表中，除了一个地方已经填写了之外，其余的都是空白；要求受试者通过填写最后一个空白来完成它($A_2 \times 2$ 矩阵符合于我们的倍增的标志：$B_1 \times B_2$；$a_3 \times 2$ 矩阵只是一个扩展的矩阵：$B_1 \times C_2$)。用我们的术语来说，如果已知 A_1A_2，A_1A_2' 和 $A_1'A_2$，那么受试者就必须发现 $A_1'A_2'$。这意味着前十个标准已经预先通过实验者而得到满足；同时，第十至十三个标准也部分地得到了满足。于是，给定的这三个成分已经同时地划分为类别 B_1 和 B_2；A_1 的两个成分已经属于 A_2 或 A_2'；给定的 A_1' 的那个成分属于 A_2，剩下来要做的事情就是发现一个属于 A_2' 的 A_1' 的成分；子类 A_1 只包括 A_2 和 A_2' 的成分，子类 A_2 只包括 A_1 和 A_1' 的成分。总之，对于已知的成分来说，运算的倍增分类的条件由矩阵的感知结构得到满足。为了发现第四个成分，受试者只需按照这个矩阵安排的纵向和横向的对称性来扩大这些图形的特性。

于是，运算的倍增分类的这些条件已经包括在矩阵的空间布局之中。这意味着在没有任何一种逻辑运算的情况下，这些问题也能够通过这些图表的双重对称性所展现的相似和相异来加以解决。

心理学的分析之所以变得如此复杂，是由于这么一个事实——受试者也可以通过利用或多或少的运算关系，即前逻辑的或逻辑的关系(它们是在受试者从第Ⅰ阶段向第Ⅲ阶段发展时所出现的)来完成这些图形的结构。将运算的因素同感知的因素分离开来是非常困难的，而且它们的相对重要性很可能由于有关的特定情境之不同而变化。我们知道，如果一个儿童是在根据类别而不是根据感知来进行推理，那么他就是在运算的水平上而不是图形集合的水平上来解决问题。反过来说，儿童的这种推理又只是将相似性和相异性归诸这些成分本身，而并没有考虑它们的空间位置。但是，要想知道他什么时候是这么做的，什么时候又是那么做的，则是一件非常困难的事情。一个显而易见的解决办法是，要求受试者构造他们自己的分类，这一点我们已经做过。然而在这里，受试者还是可能使用倍增的运算，也可能使用图形的集合或中间的方法。

尽管做出解释肯定是困难的。然而，我们一定得解决的这个问题也是相当简单的。我们必须在下列三种假设中做出决定：

(1) 运算的结构不是从图形的结构中发展出来的。这将意味着倍增运算的出现同空间的构造是完全无关的。我们还要发现这种空间构造引起运算的顿悟的时刻，它暂时阻抑运算的顿悟的时机，以及由于有了这种空间结构而无须进行运算的条件。

(2) 运算的结构在空间的结构中得到预示，而且是从与它们有关的活动中直接产生的。

(3) 无论是倍增的分类或是附加的分类，在运算分类的发展中都存在着一个阶段。在这个阶段中，图形的集合发挥了一种占优势的作用。然而，它们的最终形式在极大的程度上要归之于它们可能产生的那些不适当的资料协调。协调乃是一件对于任何同整

个的分类有关的经验加以同化、构造和概括的事情。这将意味着我们可以在倍增的分类方面期待一种与附加的分类完全平行的渐进的过程。

第(1)种假设含有在最初阶段和最后阶段之间有明显间断的意思;第(2)种假设意指完全的连贯;第(3)种假设则暗示了一种相对的不连贯,因为空间构造的作用将逐渐由运算逻辑的一致性所取代。如果将受试者对于矩阵测验的反应同他们的自发的倍增分类加以比较,那么,第(1)种假设预示了这两种情况中的间断性,第(2)种假设预示了两者的连贯性,而第(3)种假设则预示了第一种情况中的相对的不连贯性以及第二种情况中的连贯性。

2. 矩阵测验,Ⅰ:结果

我们利用了14个矩阵,每一个都包括4个或6个物体,其中有一个得加以确定。物体是按照形状、颜色、大小、数目或方向(这最后一个特性是在动物的事例中造成的,这些动物的头或者向左或者向右)加以组合的。①

受试者人数如下:4—5岁的14名;6—7岁的16名;8—9岁的17名。75%的8—9岁的受试者对除了两个测验之外的其余所有的测验都做了正确的答复。

我们的结果中最有趣的特征是,对有些测验的答复,4—5岁的儿童比6—7岁的儿童要好些(参见表ⅩⅢ,它显示了临床研究的结果,在其之后还有一个更为标准化的调查研究)。

表ⅩⅢ 矩阵测验的结果(正确答复的百分比)

Sh=形状,C=颜色,S=大小,N=数目,O=方向,Ⅰ=三个成分的选择,Ⅱ=六个成分的选择(在不给指示时,Ⅰ能被理解)。项目的数字列在括号里。

年龄	shc(3)	shs(2)	co(2)	shn(2)	shco Ⅱ(2)	shco Ⅰ(1)	shcs Ⅰ(2)
4—5岁	46	43	45	76	26	60	53
6—7岁	76	89	67	74	55	46	44
8—9岁	84	89	80	95	86	64	61

涉及三种特性的那些测验结果,显示了自相矛盾的情况。这些测验比较复杂和困难,而4—5岁受试者的答复比6—7岁的更为成功些。比较简单的那些测验,显示了有规律地随着年龄的增长而有所改善(除了4—7岁期间对于涉及数目的那些项目没有显示改善之外)。然而,具有三种特性的那些项目,即使在8—9岁往往也很少得到解决,

① 最适宜填补在空白位置的那个成分必须从同一张卡片上描绘的三或六个成分中挑选出来。要求受试者挑选"使它在这个方向上(横向)和那个方向上(纵向)都适合的"东西。

这进一步证实了这么一个假设，即它们涉及一种比两个特性的项目更为复杂的运算格式。

这个规律有一个例外，就是年幼儿童对于比较困难的那些测验取得的成绩要好些。当需要从 6 个或 7 个成分中进行选择时，4—5 岁的则比 6—7 岁的差些。这很可能是由于情境中有一个新的因素，即他们的理解广度有限。

至于涉及三种特性的三种选择的那些项目，数字表明：4—5 岁时正确的答复为 53％至 60％；6—7 岁为 44％至 46％；8—9 岁为 61％至 64％。换言之，即使是年龄最大的受试者几乎也不比最年幼的好些，而中间的那一组则差得很多。一个显而易见的推断是：最年幼的那一组肯定运用了不同的解决问题的方法；中间的那一组开始运用与年龄最大的那一组相同的方法，而且遇到了困难。我们知道，最年幼的那一组处于第 I 阶段，而且自然会倾向于根据图形的集合来思考问题。这就解释了他们完全不受第三种特征之妨碍的原因。相反，当存在着三种特性时，这种安排的对称性是比较强烈的，所以我们发现他们对于两种特性的那些项目作正确答复的百分比，就从 53％至 60％下降为 43％至 46％(当这两个特性中的一个特性是数目时，正确答复的百分比又会上升，因为这尤其涉及明显的感知的差别)。但是从第Ⅱ阶段往后，儿童便开始思考物体本身以及用两个或三个特性加以界说的定义。他们就会很自然地感到联合三个特性比联合两个要困难些。

所有这些都给人非常强烈的启示：即在受试者发展到掌握运算的解决问题的方法之前，三特性的矩阵有时能够以一种感知的或图形的方法加以解决。现在我们希望能够通过个别的询问来证实这个假设。为了了解儿童如何着手发现那些他们用以解决问题的方法，我们使用了我们的临床法。困难在于，虽然比较年幼的儿童一旦发现那第四个成分之后能够相当准确地描绘这个成分，但通常并不能论证他们的选择。研究运用于这些描绘中的那些措辞容易造成误解。看上去似乎他们运用的方法必定同年长儿童的方法是完全一样的，尽管事实上他们远不能分析他们着手发现那第四个成分的方法。然而在开始时，我们仅仅将年长儿童的错误和年幼儿童的正确解决办法做一个比较(在下一节中，我们要描述一个比较详细的实验，在那个实验中，为了确定受试者之选择的稳定性和论证其选择的能力，我们将向受试者提出其他的一些选择)。

我们从第八项测验开始。从逻辑学的角度来看，存在着三对特性：A_1(正方形)和 A_1'(圆形)；A_2(大的)和 A_2'(小的)；A_3(无装饰的)和 A_3'(有条纹的)。已知的联合有三个：$A_1A_2A_3(1)+A_1A_2'A_3'(2)+A_1'A_2A_3(3)$，留待发现的是 $A_1'A_2'A_3'(4)$(这意味着这个表只包括九个可能的联合中的四个。因为 A_2A_3 乃是一个复合的单一特性，对于它的整体之否定便产生 $A_2'A_3'$)。从心理学的角度来看，为了发现一个非 A_2A_3(大而无装饰)的 A_1'的成分(圆形)，受试者就得考虑 A_2'(小的)和 A_3'(有条纹的)这两个特性。我们想要探明的是年幼儿童能够考虑这两个成分，而 8—9 岁的受试者却常常不能考虑这两者的原因。下面是三个例子：

巴布(5 岁 7 个月) 只是说:"你得在这里放一个圆的有条纹的。"他没有提到大小,但却毫不犹豫地选了一个小的。

查普(6 岁) 正确地作了选择。"为什么选那个?"——"那里(1)是一个没有线条的正方形,那里(2)是一个有线条。那里(1)是一个大的,那里(2)是一个小的(提到了所有的三种特性)。(然后他又自发地补充)如果那个大而圆的(3)是有条纹的,就得将这一个(小的、无装饰的圆形)放到那里(4)。如果大的正方形(1)是有条纹的,那个小的有条纹的正方形(2)就得是无装饰的!"

海益(7 岁 9 个月) 先为(4)选择了大的有条纹的正方形 $A_1A_2A_3'$。他只考虑颜色(A_3'),忘记了形状(A_1')和大小(A_2')。然后他选了大的有条纹的图形($A_1'A_2A_3'$),仍然忘记大小(A_2')。"那对吗?"——"对,因为这一个有条纹(4),这一个也有(2=$A_1A_2'A_3'$)。"——"从横的这一行看它适合吗?"——"哦,不!这个小的有条纹的圆形($A_1A_2'A_3'$)应该在那里,不是这个大的(他将它们作了改变)。"——"现在适合吗?"——"是的,有无装饰的和有条纹的(指向 1 和 2),无装饰的和有条纹的(指向 3 和 4)。"

如果将海益的困难同另两个立即做出的解决办法相比较,人们便不难看到,这两种方法是有差别的。海益忘记了有关的三个特性中的一个或两个,他很可能是在进行推理,而且,考虑三个特性比考虑一个或两个要困难些。在巴布和查普立即发现那个正确的成分时,他们可能根本就没有严格意义上的推理。他们不是在思考,而是在觉察。他们是在对图形的对称性做出反应,而不是在作概念的转变。然而在做出了选择之后,他们便根据适当的言语概念来解释这四个成分。有一些使人惊奇的事情,例如,海益自己并不认为他的选择($A_1A_2'A_3'$)在横向上不适合,而且还得要别人问他那是否合适。看来他似乎没有意识到那个作为一个整体的构造。年幼的受试者从空间的形式开始,并将它作为一个不完全的式样来对待,这有助于他们按照对称性来填补那个遗缺。于是,表达方式的表面上的相似便掩盖了方法上的差异。海益试图通过协调这三个类别来对这些物体加以推理,而另两位则是对一个模式及其感知的对称性做出反应。

我们可以将这些答复同第五项测验相比较,而第五项看来是这三项(五、八和十)中最难的一个。因为,8—9 岁时的改进是最不明显的(4—5 岁的正确率为 44%;6—7 岁为 35%;8—9 岁为 52%)。第五项测验的逻辑结构是复杂的,因为除了通常的类别的倍增之外,还有一种涉及第三种特性(A_3 和 A_3')的交替。我们可以将 A_1 和 A_1'看作是银莲花和郁金香,出现在两排之中(第五项与图 10 中的第九项相同);将 A_2 和 A_2'看作是大的和小的,出现在两栏之中;A_3 和 A_3'是两种颜色,但每一格的颜色与它的补充物的颜色是相对的:如果 1 是红色,那么 2 和 3 就是蓝色,4 则是红色。这就是甚至第Ⅲ阶段的受试者还感到这个项目困难以及在第一次尝试中不能解决的原因。

巴兹(7 岁 9 个月) 为第四格选择了一个大的蓝的银莲花(而不是小的红的郁金香)。"它适合另一行吗?"——"不(将一个小的蓝的郁金香放到那儿)。像那

样！”——“看看这里(指向上面的那个横行)。”——“哦！是的(代之以一个小的红的郁金香)，因为它在两个方面都要相对。”

年幼的受试者使用了一种简单得多的方法。他们只是考虑这个式样的对称性，而且那些斜线帮助了他们。

贝比(5岁7个月) “一个小的(郁金香)在这里，红的(正确)。”——“为什么？”——“因为有一个蓝的(3)，有一个红的(1)，还有一个蓝的(2)。”

梅贻(5岁10个月) 先选一个小的蓝的郁金香，然后自发地说：“啊！这个肯定放在那里(红的)，因为这个像那个(指向那些斜线)。”

同样地，在进行第十个测验(形状、颜色、方向)时，年长儿童忘记了颜色或方向。他们特别容易忘记方向，因为这是一个相对的特性，而且不是有关物体的永久特征。另一方面，年幼儿童马上就确定了正确的解决办法，因为他们看出，第四格肯定是与第三格对称，这同第二格已经与第一格对称是一样的。

于是，对于构成倍增分类之基础的那些结构，似乎有一种图形的类似物。它存在于对包含在这些结构之中的那些关系的忽略，并代之以简单的空间对称性，这些空间对称性是可以明显地感觉到的，而且是可以用视觉的想象加以运算的。这就是8—9岁儿童不能再达到5—6岁时的成功率的原因。

但是，虽然涉及三个特性的这些测验项目表现了一定的不连贯性(因为在两个阶段之间，成功地解决问题的百分比有减少的现象)，但从整体来看，矩阵测验在连续的阶段之间显示了一种相对的连贯性。第十四个测验项目的总的百分比数字清楚地说明了这一点。

年龄	4	5	6	7	8	9
成功率	35%	55%	60%	82%	75%	90%

我们也可以看看对于每一个项目所做的第一次选择(如果受试者后来纠正，我们并不计作成功)。我们再次发现，在做出选择时考虑一个以上特征的倾向随着年龄的增长而有所加强：

年龄	4	5	6	7	8	9
一个特性	72%	67%	65%	50%	43%	35%
至少两个特性	28%	33%	35%	50%	57%	65%

我们看到，在大约7岁时，这些百分比数是相等的，而7岁左右乃是具体运算阶段开始的时候。

一个显而易见的推断是，虽然年幼的受试者常常根据图形的形象来解决问题，但他们仅仅是在试了几次之后，在不理解乘法交叉的情况下才这么做的。相反，多于50%的年龄较大的受试者则开始对这些特性相乘。

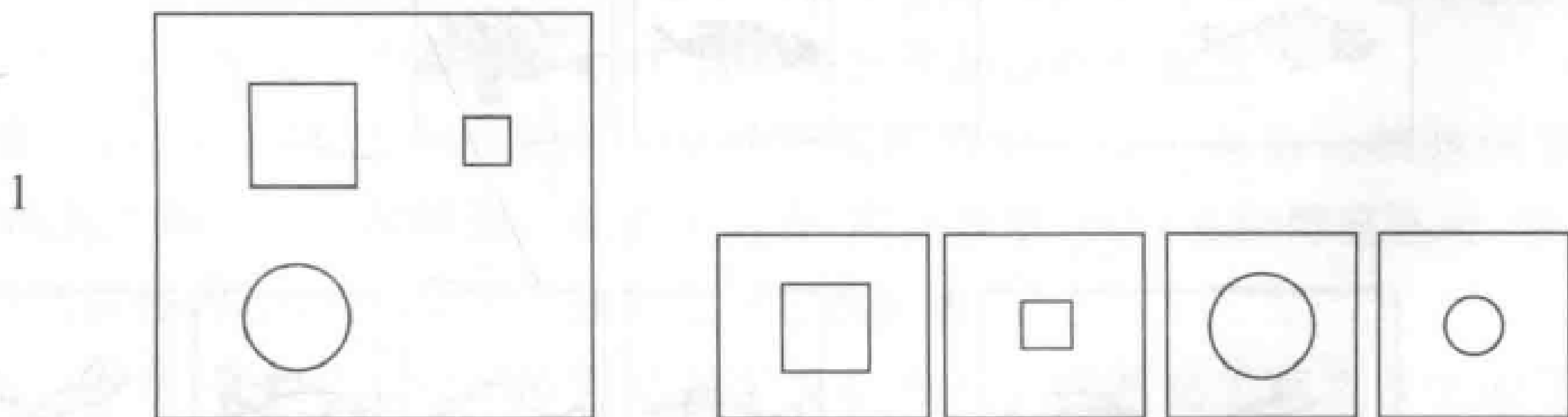
总的结果以及第一次选择的结果都说明了发展的相对连贯性，这与三特性项目的

双程式的分布形成了鲜明的对照。我们可以推断，从最初的图形结构到运算的倍增结构有着一个连贯的发展，它同从图形的集合到附加分类的连贯发展是相似的。然而，在这个系统中，图形的结构非常接近于运算的结构，这两者的一致性究竟有什么意义，尚有待于解决。毫无疑问，这种类型的矩阵测验，乃是特别有利于按照图形的对称性来运用前运算方法解决问题的一种测验。而且，它使我们无法在我们于第1节中提出的那些假设中的中间的一个和最后的一个之间做出选择。我们至多只可以说既有连贯性又有不连贯性（如第3种假设所预言的那样），不连贯性乃是具有三个特性项目的特征。在这里，我们相当容易区分图形的解决办法和运算的解决办法；在总的结果和第一次选择的百分比中显示的连贯特征之基础主要是一个特性的。但是，我们宁愿推迟一下，等到我们就儿童对于逻辑的类别倍增的自发反应作过研究（我们将在第4节和第5节中做这项工作）之后再做出最后的决定。紧接着的下一节是一个比较标准的调查研究的报告，而这个调查研究仍然是矩阵测验方面的。

3. 矩阵测验（标准化的过程）

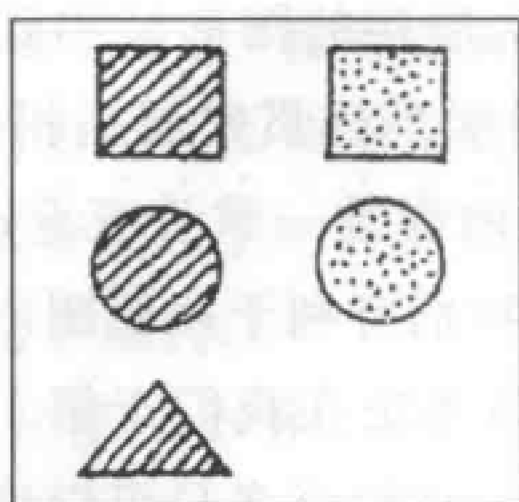
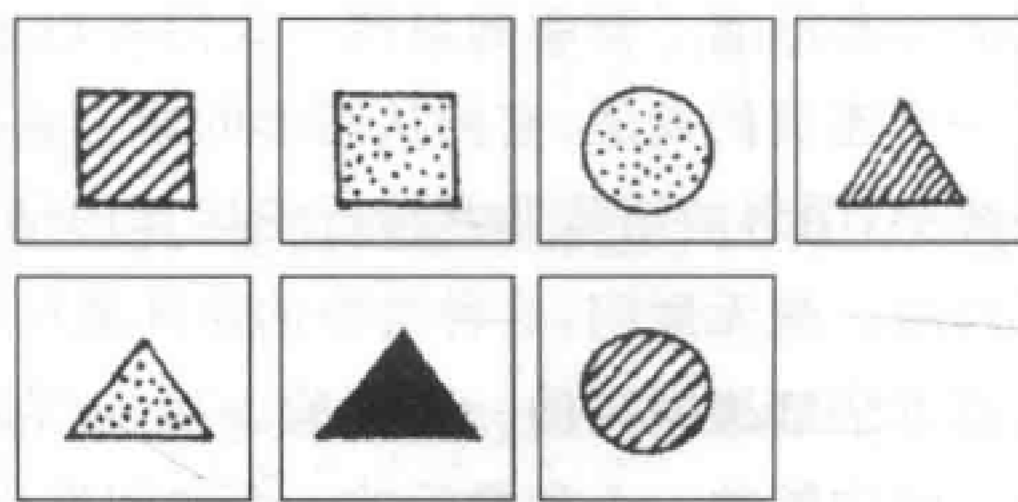
第2节的那些结果多少带有临床的特征。我们通过一系列比较标准化的测验对这些结果进行了检验。虽然其中有些问题稍微有些差别，但它们有助于对我们目前已知的那些作进一步的阐述。比较特别的一点是，它主要是统计的证据。

我们利用了第2节那十四个项目中的九个。第一个是实践的项目，其结果已被删略。其余的八个项目被称为Ⅰ—Ⅷ。Ⅰ—Ⅳ是两种特性的项目（在项目Ⅰ和项目Ⅱ中是颜色×形状；在项目Ⅲ中是形状×数目；在项目Ⅳ中是颜色×方向）。Ⅴ—Ⅷ是三种特性的项目（在项目Ⅴ—Ⅶ中是颜色×形状×方向；项目Ⅷ是颜色×形状×大小）。①我们也利用了一种简短的测验方式，它只包括两个项目（Ⅱ和Ⅴ）和那个实践的项目。

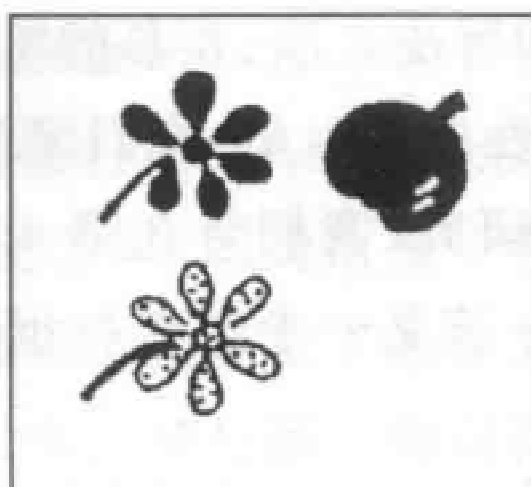
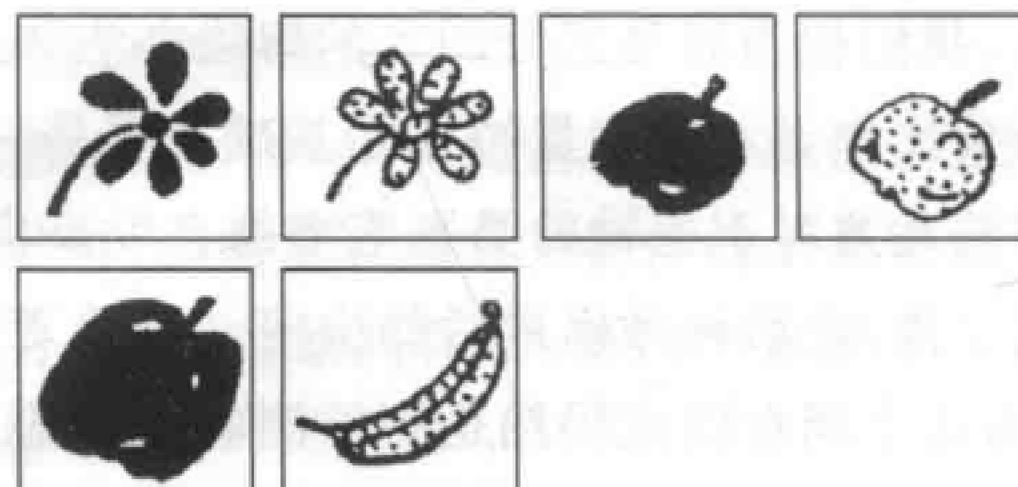


① 参见图10（1—9）。

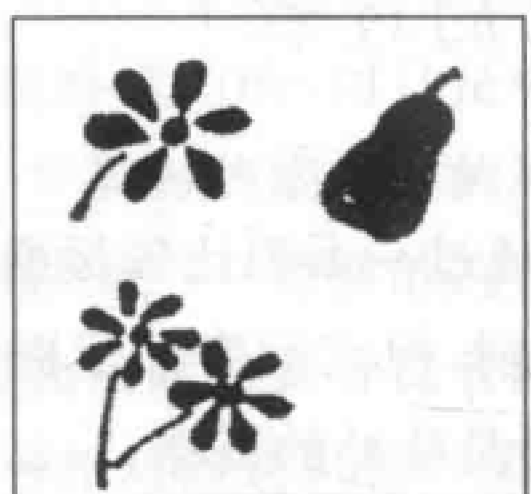
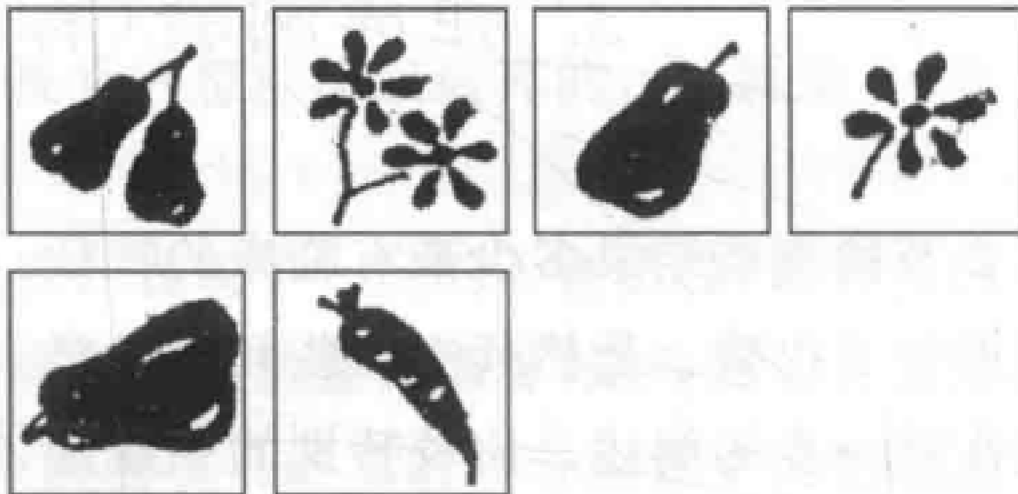
2

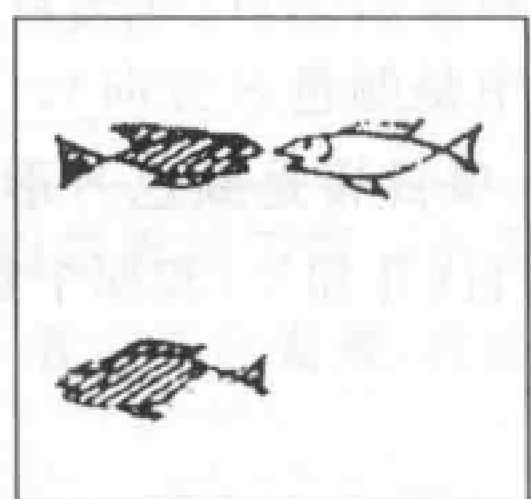
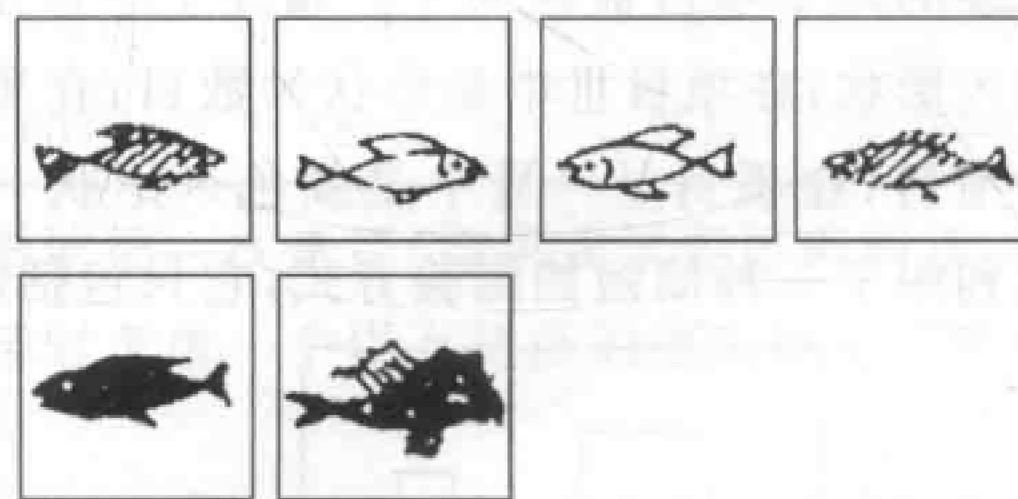
3

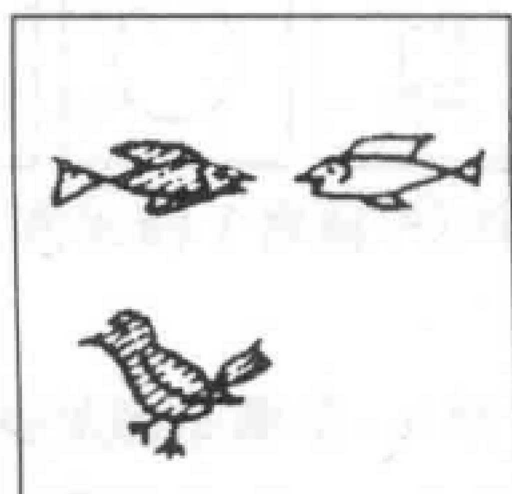
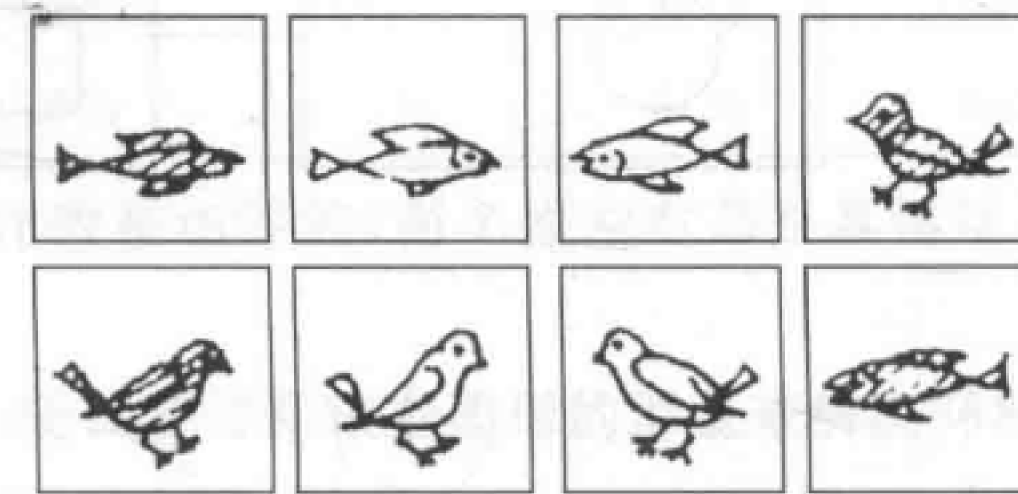
4

5

6

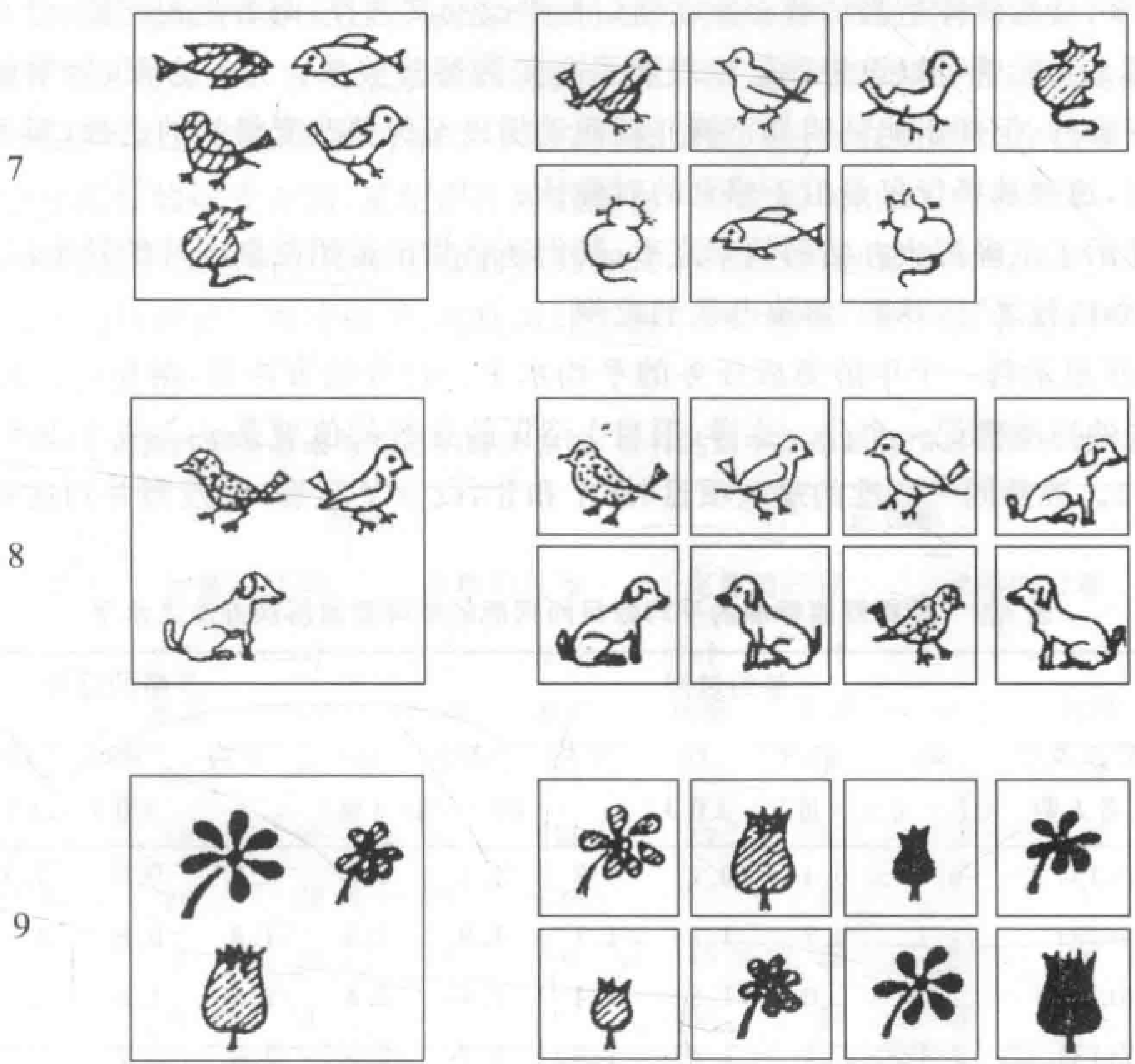


图 10

实践的项目包括四种可能的选择；三个用来“打岔的”乃是那个不完备的矩阵的三个项目的复制品。项目Ⅰ—Ⅳ具有六种选择，还是有三个“打岔的”同矩阵上的三个图形完全一样。后者(即有三个“打岔的”)对项目Ⅴ—Ⅷ也适用，但在这四个项目中，每一项都有八种选择。这些多重选择是一个接一个地在一些小卡片上呈现的，允许儿童将每一种选择在空格子里试。虽然在每个项目中正确卡片在什么时候呈现肯定是要任意加以变化的，但在每一个项目中，卡片出现的次序却是标准化的。

每一个项目包括三个问题：(1)发现正确的图片；(2)论证自己的选择是正确的；(3)说明另外的一幅或两幅图片是否也适合，或是否更适合(实际情况证明，最后这个问题是有启发性的，因为它显示了选择之稳定性的意义)。

我们发现，我们所获得的那些结果至少在两个方面补充了第2节中的那些结果。(a)复制矩阵中那些图画的包含物有助于显示抽象的作用。它不利于年幼儿童减少正确解决办法的数目，因为他们相当经常地选择这些复制的卡片。结果，我们便失去了表ⅩⅢ中的两种形态的分布。然而，这些复制品的运用的确使我们能够发现一种稳定地减少对于它们的选择的趋势(参见表ⅩⅤ)，而且这尤其影响抽象观念的发展。(b)问题(2)和问题(3)都能帮助我们区分在解决这些项目方面的图形的因素和运算的因素。问题(3)是个新问题。如果儿童对他的选择做出适当的解释，而且在随后拒绝加以改变

(一般说来,对选择作适当的解释并在随后拒绝改变其选择,两者是相配的,但并不总是如此),那么我们就可以设想他已经理解了有关的那些关系。另一方面,如果他最初的选择是正确的,但却不能证明其正确并继而动摇以至想要改变最初的选择,那么我们就可以设想,这种选择仅仅是由于感觉的对称性。

在显示了正确解决办法的频率之后,我们还将指出运用复制卡片的频率以及"图形的"解决办法较之"运算的"解决办法的比例。

表XIV显示每一个年龄完成任务的平均水平。计分的方法是,对每一个已经正确地观察到的标准都记一个分。这样,项目Ⅰ至Ⅳ的分数的值域是 0,1 或 2;项目Ⅴ至Ⅷ则是 0—3。涉及同一标准的那些项目(即Ⅰ和Ⅱ,以及Ⅴ至Ⅷ)已经归并到这些结果之中。

表XIV 根据观察标准的平均数目而判断的矩阵测验解决办法之水平

	完整的过程						节略的过程		
年龄以及受试者人数	shc (Ⅰ－Ⅱ)	shN (Ⅲ)	co (Ⅳ)	平均	shco (Ⅴ－Ⅶ)	shcs (Ⅷ)	平均	shc (Ⅱ)	sheθ (Ⅴ)
4(13)	0.4	0.4	0.2	0.3	1.1	0.2	0.8	0.9	1.2
5(29)	1.1	0.7	1.2	1.1	1.9	1.3	1.8	0.8	1.0
6(14)	1.4	1.0	1.5	1.4	2.3	2.8	2.5	1.8	2.0
7(13)	1.1	1.4	1.6	1.3	2.7	2.2	2.6	1.7	1.9
8(15)	1.8	1.7	2.0	1.9	2.7	2.8	2.8	1.9	2.3

虽然有一种随着年龄的增长而改进的趋向,但 6 岁儿童有时完成得比 7 岁的还要好些(特别是在简短的测验形式方面)。于是我们可以说,所涉及的不止于一个因素。虽然正确的解答可能要有一个运算的基础,但它也可能产生于图形的对称性,而不是真正的理解。

至于在这些因素中,哪一个是运算的因素,对于复制图片的选择给我们提供了最初的提示。

表XV 选择复制图片解决办法的百分比

年龄	标准的形式			缩短的形式		
	2 个标准	3 个标准	平均	2 个标准	3 个标准	平均
4	45	35	40	25	37	31
5	37	32	35	41	48	44
6	30	7	19	0	14	7
7	20	0	10	38	37	37
8	0	0	0	0	0	0

在从Ⅰ至Ⅷ的这些测验的过程中,存在着一定数量的学习,而这种学习便解释了在

标准形式的测验过程中，涉及三个标准的那些项目复制图片出现的频率，少于涉及两个标准的那些项目的原因。在简短形式的测验中，出现了颠倒的结果，这并不使我们感到意外。复制图片的选择在6岁时减少了，这符合于表XIV所表明的这个年龄的改进。然而，至少在缩短的形式方面，复制图片的选择在7岁时再次出现，这表明有一个间隙：虽然7岁的儿童不太倾向于依赖感知的解决方式，但他们的运算理解仍然是不完善的。

然而，我们能够设法直接确定，在这两种方法中，究竟哪一种是由于受到问题(2)和(3)的启发而出现的。

表XVI 运算的解决办法与图形的解决办法(所有的数字都是测验项目的百分数)①

年龄	图形的				运算的			
	完整的过程		简略的过程		完整的过程		简略的过程	
	2个标准	3个标准	2个标准	3个标准	2个标准	3个标准	2个标准	3个标准
4	20	20	35	25	10	0	0	12
5	19	23	29	18	19	10	12	12
6	36	36	28	28	25	18	57	14
7	0	19	12	0	45	29	62	37
8	0	4	—	—	68	64	88	22

下面是图形的解决办法的两个例子：

符娃(4岁5个月) 正确地为实践项目(大正方形，小正方形，大圆形……)选择了小圆形："为什么？"——"因为有两个正方形。"但是，在询问"能不能把任何其他的图形放在那里"时，她立即答复说："能，小正方形比较好些。"——"为什么？"——"因为这样的话就相同了(指向它上面的那个成分)。"

符娃以同样的方式为项目Ⅱ(红花，红苹果，黄花)选择了一个黄苹果。"这样是最好的吗？"——"是的，因为有两个苹果，一个红，一个黄。"——"选一个红苹果可以吗？"——"可以，这样就会有两个红的了。"——"选一枝黄花呢？"——"可以，因为(已经)有一个苹果了。"——"在(红苹果，黄苹果，黄花)这三样东西中，哪一个最配？"——"红苹果。"

费拉(5岁10个月) 开始时为项目Ⅱ选了一个大苹果，但他放弃了这一选择，并先后选了一个红苹果和一个黄苹果(选黄苹果是正确的)。"为什么？"——"这样就有两个苹果，一个红，一个黄。"——"还有比这更合适的吗？"——"香蕉。"——"它相配吗？"——"相当配！"——"你一定要选一个配得很好的。"——

① 没有分类为图形的或运算的那些解决办法，或者是不正确的，或者是在实验者干预后才成为正确的。这比表XIII所使用的标准要严格些。

"(他选了那枝红花)它的颜色相同(因为苹果在它上面)。"——"这最好吗?"——"不,红苹果最好(边说边指向上面的那个)。"

这两位乃是所有那些其解决办法归类为"图形的"受试者的代表,尽管他们的选择不总是立即做出的,但还是做出了正确的选择。不过,一般说来,他们并不能证明选择的正确性。

此外,他们几乎都立即接受实验者提出的任何其他图片,而且似乎更喜欢那个空白处的上面或左面的那幅图片的复制品。换言之,当他们不得不对这些关系进行分析时,他们往往限制于一次分析一个特性,失去了他们在综合的感知判断中曾经有过的那种优点。

根据对比的方法,下面列举的是一个典型的运算的解决方法的例子:

盖拉(7岁3个月) 项目Ⅱ,立即选择了黄苹果:"因为这些是相同的东西,但颜色不同(指着垂直的方向);这些是相同的颜色(指着水平的方向)。"——"我能选择任何其他的吗?"——"红苹果,不过它不很适合,因为在上面有一支红花和一个红苹果;在下面你将有一支黄花和一个红苹果。一支黄花和一个黄苹果比较好些。"项目Ⅴ:毫不犹豫地选了那只绿色的鸟。"它是最合适的?"——"是的,它最好。那里有一条蓝色的鱼和一条绿色的鱼,于是就要有一只蓝色的鸟和一只绿色的鸟。在上面的那一行中,它们朝着相反的方向,所以在下面它们也应该朝着相反的方向。"

我们所提出的这两个标准都从盖拉的陈述中得到满足,为这些选择所提出的理由表明了他们对于有关的两个或三个特性的依赖程度,而其他的建议都遭到了拒绝。

表ⅩⅥ清楚地证明,图形的解决办法和运算的解决办法的性质是截然不同的。不管是什么项目,运算的解决办法都随着年龄的增长而稳定地上升,而图形的解决办法则在6岁以后开始减少。图形的解决办法似乎在6岁时达到最大量,这个事实是由于在多种选择项目中出现有复制的图片,而这些对于4岁和5岁的儿童来说是有很大吸引力的。如果没有它们,4岁和5岁儿童正确解决办法的数目就要大些(参见表Ⅷ),分布也将是两种形态的,而不会在6岁时达到最大量。

这些结果进一步证实了那些基于临床分析的假设和第2节的那些数字的分布。虽然在倍增的分类中存在着一种由图形结构向着运算结构的持续的过渡(这同附加分类的情况是一样的),但在两种解决办法之间还是有一种相对的不连续性,这两者都将导致正确的结果。其中一个的基础是单纯的感知对称性,而另一个则是对有关关系的真正理解。

4. 自发的交叉分类

我们首先将描述一种介于完成矩阵(第2—3节)和用盒子来分类(第5节)这两者

之间的方法。我们利用一个盒子，它可以用活动的隔板来分割成四个空间。运用了两种类型的分类：(Ⅰ)一组成分可以划分为四个类别，其中每一个类别都由相同的成分来组成；(Ⅱ)另一组也可以划分为四个类别，但没有两个成分是相同的。这两组成分详述如下：

Ⅰa：十六幅图片，其组成是：(1)四幅坐着的黑兔；(2)四幅坐着的白兔；(3)四幅奔跑的黑兔；(4)四幅奔跑的白兔。

Ⅰb：十六幅集合图形，其组成是：(1)四幅蓝正方形；(2)四幅红正方形；(3)四幅蓝圆形；(4)四幅红圆形。

Ⅱ. 十六幅图片①，它们描绘了(1)四个女孩(一个拿手提包的，一个走路的，一个牵着狗的，一个玩洋娃娃的)；(2)四个男孩(两个背背包的，但他们并不完全相同，一个奔跑的，一个放风筝的)；(3)四个女人(一个滑雪的，一个戴帽子的，一个提篮子的，一个带水桶的)；(4)四个男人(一个警察，一个马戏小丑，一个足球运动员，一个穿晚礼服的人)。

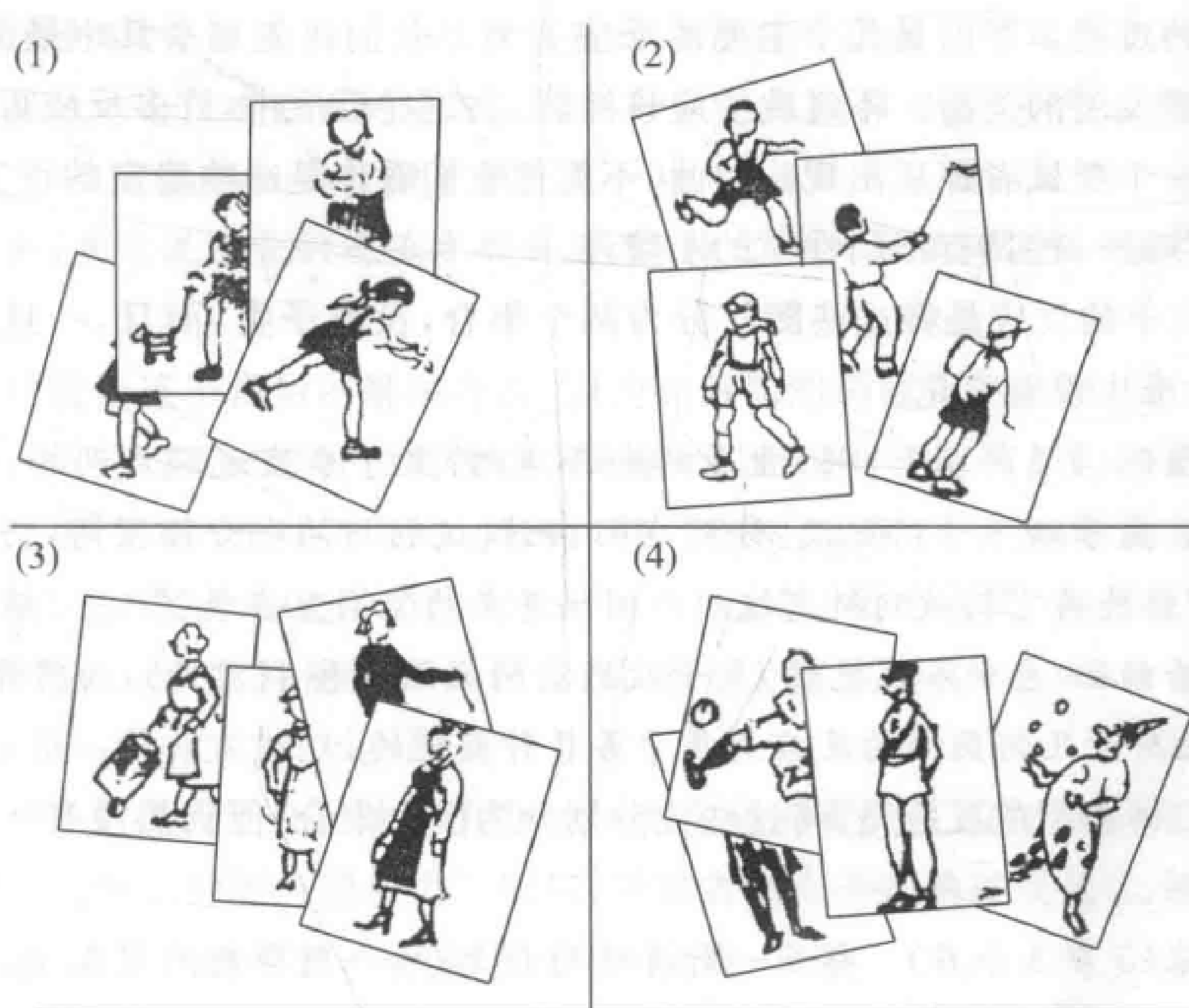


图 11

用第Ⅱ组材料的分类过程包括下列四个步骤：(a)自由的分类("将相配的，相像的放到一起")；(b)要求受试者利用一个具有四个分隔空间的盒子，将所有这些图片分为四堆；(c)拿掉其中的一块隔板，留下两个大的分隔空间，要求受试者"仅仅放成两堆"，并说出他划分的理由，然后要求他用"不同的方式"来重述他们的理由；(d)将那块隔板

① 参阅图 11。

再放回去："你还得再放成四堆。但是，当这块（垂直的）隔板抽走之后（因为隔板被抽走而合并到一起的）那两堆必须很相配，而且，当另一块（水平的）隔板抽走时，那两堆必须也要相配。"

(a)和(d)也运用于Ⅰa和Ⅰb这两组。但对于(b)和(c)这两个步骤来讲，我们用了一些特殊的白色或黑色的盒子，而且它们具有形如兔子或者正方形等形状的开口。

这个实验与第2—3节中描绘的矩阵测验在下列几个重要的方面有着差别：(a)向儿童呈现一组成分，所有这些成分都具有同等的地位；他必须对它们都作分类，而且其起点是对任何成分都未作分类；(b)他必须自己发现分类的标准（盒子都是空的，而且它们的数目不超过可能有的类别的数目）；(c)倍增的子类并不是单一成分的类别。

我们无须报告在阶段Ⅰ中所发现的那些图形的集合。这些图形的集合并没有通过一个连续的发展路线而同交叉分类表联系起来，尽管它们有时也具有类似的现象（参见第一章第2节Ⅲ中尼尔的例子）。关于阶段Ⅱ，即非图形集合阶段，我们看到了从简单的或连续的分类（分别考虑这两个标准）向着需要同时考虑两个或两个以上标准的倍增分类的逐渐的过渡。下面是几个主要的反应类型。我们将先列举其中最简单的，继而逐步转向高度发展的类型。不过我们应该注意，在这些反应中，许多反应可能会在不同的场合在同一个受试者那里出现。因此，不能把它们看作是一些稳定的行为模式，更不能把它们看作是一些具有不同性质的小阶段。

Ⅰ. 最简单的反应是将这些图片分为两个集合，没有子类，而且，一旦这两个集合已经构成，标准也没有变化。

> 比尔（4岁5个月）　将（坐着的和奔跑的）兔子垂直地摆成两排，丝毫没有注意颜色。盒子和袋子：同上。分隔空间：他仅仅利用两个分隔空间，仍是做出上述划分。"你能将它们放到所有这四个间隔开来的空间里去吗？"——"能。"但是他将那些坐着的（白色的和黑色的）兔子放进空间间隔1和4（对角），而将奔跑的放进2和3。他对于几何图形的反应是属于第Ⅱ种类型的。

Ⅱ. 第二种类型的反应是，将这些成分划分为四个集合，但仍然没有注意到那些同时存在的关系。

> 吉依（5岁3个月）　摆出一行奔跑的白兔子，一行奔跑的黑兔子，一行坐着的白兔子，一行坐着的黑兔子，在这四行之间没有任何的关系。将两个盒子和两个袋子给他以后，他将奔跑的白兔子放进第一个之中，将坐着的黑兔子放进第二个，而将其余的留在桌子上。"你能将其余的放进去吗？"——"……"——"你认为它们能放进去吗？"——"不。"等等。在给予一些提示之后，他转变为第Ⅰ种类型，并将这些成分划分为颜色混杂的奔跑的兔子和坐着的兔子。对于具有四个空间间隔的盒子，他的反应是失败的。后来，在这个儿童的面前构造四个集合，并抽去了其中的一块隔板。"这些是什么？"——"它们是奔跑的兔子。"——"那里的呢？"——"在玩耍的兔子（坐着的）。"——"（将抽去的那块隔板放回原处，并将另一块隔板抽去）这

里的呢?"——"它们是在奔跑的兔子和在玩耍的兔子。"——"这里的呢?"——"同样的。"

虽然这个受试者自己划分了四个类别,但他却不能将它们联系起来。首先证明这一点的是,在要求他构成两个类别时,他只是保留这四个类别中的两个,而不是将它们构造成两个还能再分的较大的类别。其次,虽然他认识到在具有空间间隔的那个盒子中的那些相同的类别(奔跑的和坐着的),但他并没有认识到那些基于颜色的类别。

Ⅲ. 稍微再发展一些的反应类型是,构造两个集合,其中只有一个集合再划分为一些子类。

丹恩(5岁7个月) 将兔子划分为(白黑混杂的)坐着的,奔跑的白色的和奔跑的黑色的。给他盒子和袋子之后,他保留了三个类别的划分。在使用那个分隔为四个空间的盒子时,他先将坐着的兔子放到一边,将奔跑的放到另一边。接着他使用两个不同的空间将后者分为白的和黑的,但他仍然将不同颜色的坐着的兔子放进剩下的那两个空间中去。

另一方面,丹恩将几何图形正确地划分为四个集合。但这些都仅仅是属于第Ⅱ种类型的四个没有联系的集合。当第一块隔板抽掉以后,丹恩认识到"正方形和圆形"。但当这块隔板再放回并抽走另一块时,他没有认识到这两个红色和蓝色成分的集合,并且说:"它们是正方形和圆形(指上面),这里的是圆形和正方形(指下面)。"

类别Ⅲ比较接近于最后的解决办法,因为在最初的那两个集合中,有一个被再划分为两个集合。但这位受试者并没有意识到对称性,而这对于他将第二个集合再划分是有帮助的。当他转向第Ⅱ种类型的划分时,并没有构造成与一个矩阵的集合相同的四个集合。然后,虽然这个构造的方法有助于一个交叉分类的格式,但丹恩完成分类时,并没有意识到这一点;而且他没有认识到,作为一个整体的这一组成分可以用两种方式,而不仅仅是一种方式加以划分。

Ⅳ. 类型Ⅳ更接近于最后的解决办法。现在我们看到了两种成功的两分法,但其中的一种似乎比另一种更有说服力。所以,受试者倾向于拒绝接受这么一种说法:即它们是同时存在的,并因此可以产生倍增的交叉分类。

尼斯(5岁10个月) 将集合图形划分为两个集合(正方形和圆形),然后将同样的成分划分为两个不同的集合(红的和蓝的)。她毫无困难地将这两个集合安排成四个子集,并摆进那具有四个空间间隔的盒子。就这个情况来说,我们可以认为她已经构造了一个倍增的矩阵。但是,现在她并不认识由两个子集的联合而形成的那些类别:"(将间隔红色和蓝色成分的那块隔板抽走)它们是什么?"——"……"——"如果将它们放到一起,它们是什么?"——"正方形。"——"都是吗?"——"也有圆形。"——"能把它们放到一起吗?"——"能。"——"为什么?"——"不知道(虽然它们都是蓝色的,但她并没有看到这个可能的类别,尽管在开始时她

本人曾利用过它）。”等等。当另一块隔板被抽去后，她的反应相似。

在用兔子做实验时，尼斯立即在分隔了的盒子中构造了一个矩阵（将它们划分为黑的、白的和坐着的、奔跑的）。当抽掉一块隔板时，她认识到奔跑的兔子和“根本什么也没做”的兔子这两个类别。但当另一块隔板被抽走时，她拒不承认另两个类别（白色的和黑色的兔子）。“它们的颜色相同吗（指着黑色的兔子）？”——“……”——“能将它们放到一起吗？”——“不，能，它们都有尖耳朵。”

在这些例子中，在受试者完全理解倍增的运算之前，由于感知的原因，矩阵的空间结构似乎影响了受试者。

Ⅴ. 类型Ⅴ也是从正确的分类开始，分类的基础是一些连续的标准。但在两个标准之间并不存在相互的影响，因为受试者将两个子集放进盒子的对角，而不是放在盒子的一边。

米耳（6岁5个月）　“奔跑的兔子和坐着的兔子；白兔子和黑兔子！”虽然米耳的口头表述非常正确，但他将这四个类别放进盒子的方式却是：白兔子沿着一条对角线放，而黑兔子却沿着另一条对角线放。当一块隔板被抽掉时，他就有奔跑的兔子和坐着的兔子这两个类别；但当另一块隔板抽走时，“那不能抽，它们都混杂了”。于是他要求重新安排它们。不过，尽管他作了多次尝试，但他总还是对角地摆。

Ⅵ. 在这里，通过尝试与错误，最终达到了正确的解决办法。这种类型的反应显然要导致第Ⅲ阶段。

艾莱（5岁11个月）　几何图形：他先注意到蓝色的。然后他将正方形放到一边，将圆形放到另一边，而将红色和蓝色的图形交替地放在每一个集合之中。这样，这两个集合仍然没有划分为红色的和蓝色的子集。虽然艾莱非常缓慢地放弃这种图形的排列（这是第Ⅰ阶段的残余），但在最后，他还是将它们划分为四个子集。然而，一旦这四个子集构成，他就能正确地将它们放进那个盒子中去。——（抽去一块隔板）“这盒子里有什么？”——“圆形和正方形（正确）。”——“这样呢（抽去另一块隔板并将这些放在一边的图形混杂地堆在一起）？”——“这也没有什么两样（混杂正方形和圆形），因为它们两者都是红的。”——“另一边的呢？”——“它们是蓝的；正方形和圆形。”

对于兔子的反应也是同样的，在经过几次尝试之后，最终达到正确的解决办法。

在第Ⅲ阶段，我们看到了儿童立即做出的交叉分类。

福尔（7岁9个月）　自发地将兔子划分为四个可能的子集（没有用盒子），然后正确地将它们放进盒子和袋子中，也能正确地将它们放进那间隔了的盒子中去。当隔板被抽去时，她认识到由此而形成的类别：“是的，因为它们都是白的。”接着，“因为它们都在奔跑”，“因为它们都坐着”，最后说，“因为它们都是黑的”。

在用几何图形做实验时，她也能同样地立即做出正确的反应。

在第Ⅰ阶段,无论是目前的这种方法还是第5节中描绘的那种方法,都不能造成自发的矩阵形式的排列。第Ⅱ阶段开始为运算的交叉分类铺平道路。我们认为,发展的顺序是:首先是类型Ⅰ和Ⅱ;继而是类型Ⅲ;然后是类型Ⅳ和Ⅴ;最后是类型Ⅵ。当我们要考虑第Ⅱ阶段的儿童如何处理第5节中的那个实验时,我们便能较好地来描述这个过程。就目前而言,我们只有极少的令人满意的证据来说明这四组代表了一些性质截然不同的相连的小阶段。最简单的反应类型(Ⅰ和Ⅱ)就是分别考虑两个标准的,而且,即使在构成了那些集合之后,在它们之间也没有任何协调。比它们发展水平更高一些的类型Ⅲ开始显示了协调。这种协调表现在三个集合的构成上。在这三个集合中,将第一个集合同另两个集合区别开来的是一个标准;而将后两个集合区别开来的则是另一个标准。但这三个集合的立足点是相同的;协调仍然不够完善,因为我们并没有发现双重的两分法超越了整个的集合。在第三个水平上(类型Ⅲ和Ⅳ),我们发现了两种完全的两分法,而且第二个修改了第一个,但结果纯粹是追溯的。对于替换的分类毫无预见,因此受试者并没有构成一个交叉分类的结构,因为这只是意味着同时存在着的认识,而不是纯粹的阶段的连续。在阶段Ⅵ中,我们发现,受试者在实验过程中表现出预见性和同时存在的认识。最后,在第Ⅲ阶段,预见的格式反映了有关的结构,对于这种结构的运用是即时的。

对于人的分类(问题Ⅱ)产生了相同的结果。我们只想举少数几个例子来说明三个阶段:将这些成分划分为一些子类而没有真正的倍增;逐渐的解决办法;即时的解决办法。

马尔(6岁6个月) 一开始就将两个男孩放到一起,因为他们的"方位不完全一样,但他们俩都是去上学"。然后他将两个女人放到一起,因为她们的"方向一样",接着将"穿晚礼服的"和"穿相同但不完全一样服装的"警察放在一起。他继而将所有剩余的摆成一列。当要求他摆成四堆时,他再次将它们聚拢。当要求他摆成两堆时,他摆出"小女孩,女士和小男孩,爸爸"。

换言之,虽然他最终摆出了一个矩阵式的四个集合,但他却毫无交叉分类的概念。下列受试者或者是接近于这个概念,或者是逐渐地在最终理解了这个概念。

符安(6岁3个月) 开始时摆成八个小堆,其中六堆是同类的(两个背书包的男孩,等等),两堆是混杂的(一个女人和一个女孩,一个马戏小丑和一个滑雪者)。当要求摆成四堆时,她堆出了:(1)一个警察,一个穿晚礼服的男人,三个女人;(2)马戏小丑;(3)两个背书包的男孩和四个女孩;(4)滑雪的女士和两个奔跑的男孩。当要求摆成两堆时,她按照年龄将他们分成儿童和成人。当要求按性别分类时,她将"所有的绅士和男孩放在一起,所有的女孩和女人放在一起"。当再次要求她摆成四堆时,她成功地构成了一个矩阵,但这个矩阵是对角的;女人和女孩在上面,男孩和男人在下面。

凯特(6岁8个月) 开始也摆出八小堆,后来要求他放成四堆。他摆出:

(1)三个女滑雪者;(2)四个女孩;(3)女人;(4)男人。要求摆成两堆时,他先是按性别,继而按年龄对他们加以分类。当再一次要求他摆成四堆时,他正确地构成了一个矩阵:女孩和女人;男孩和男人。

下面这位受试者是立即取得成功的那些人中的典型。

杜伯(8岁6个月)　开始摆出具有同质的八对。当要求摆成四堆时,他立即正确地摆成一个矩阵。"如果有人将它们像这样成对角地放(男人,女孩,女人,男孩),那也可以吗?"——"不,因为这里有女孩和男人。"他继而清楚地指出自己摆出的那个矩阵的倍增的意义:在这个方向的一边有"儿童和成人",在另一方向的一边有"男人和女人"。

我们可以结论说,倍增结构的构造乃是一种自发的发展,尽管这种发展是渐进的。

5. 自发交叉分类的继续

我们曾进行过许多其他的实验,这些实验都是基于一个原则,即向受试者呈现一些能够按照两个不同的标准加以分类的成分,以了解他是否能在同时运用这两个标准。

最好的那个实验是八幅一套的图片,这八幅画分别是:一辆汽车,一辆卡车,一辆摩托车,一辆低座小摩托车,一辆四轮小车,一辆童车,一辆自行车和一辆手推车。这些可以根据有没有马达,以及是四个轮子还是两个轮子来加以分类。要求儿童"将比较相配的放到一起",先要他放进四个盒子中去,然后是两个盒子(重复二、三次),然后再要求放进四个盒子。最后,如果他仍然没有发现矩阵的排列,就将摆成正方形的四个盒子给他(参见图12)。

我们发现,反应的复杂性增加了,而且这些反应似乎遵循了在其他地方所发现的那些阶段。在第Ⅰ阶段,我们看到一种具有相似关系和功能联系的矩阵;在第Ⅱ阶段,我们发现了带有补充的分化了的集合;第Ⅲ阶段则是一些带有包含和交叉的运算的结构。

我们无须详述第Ⅰ阶段。在这里,我们看到一些队列或小的集合,其基础是每一对的相似性或功能上的联系,或仅仅是由于要求他将某些东西放在一起。

鲍吴(4岁10个月)　摆成两个队列,每一个队列都包含四个成分,但没有两个以上的成分是相似的(一辆自行车和一辆低座小摩托车)。

尼克(5岁5个月)　四个盒子:(1)"它们是自行车";(2)"它们是汽车";(3)"它们是一辆四轮小车"和(4)"一辆童车"。两个盒子:(1)汽车,低座小摩托车,摩托车和手推车;(2)其余的。自行车和童车之所以放到一起,是因为在家里的汽车房中,它们往往是放在一起的,等等。

于是,在第Ⅰ阶段,尽管这个年龄的受试者只需通过看出两种感知上的对称性就能相当容易地解决矩阵测验的问题(第2—3节),但从他那里丝毫也看不出有自发的矩阵

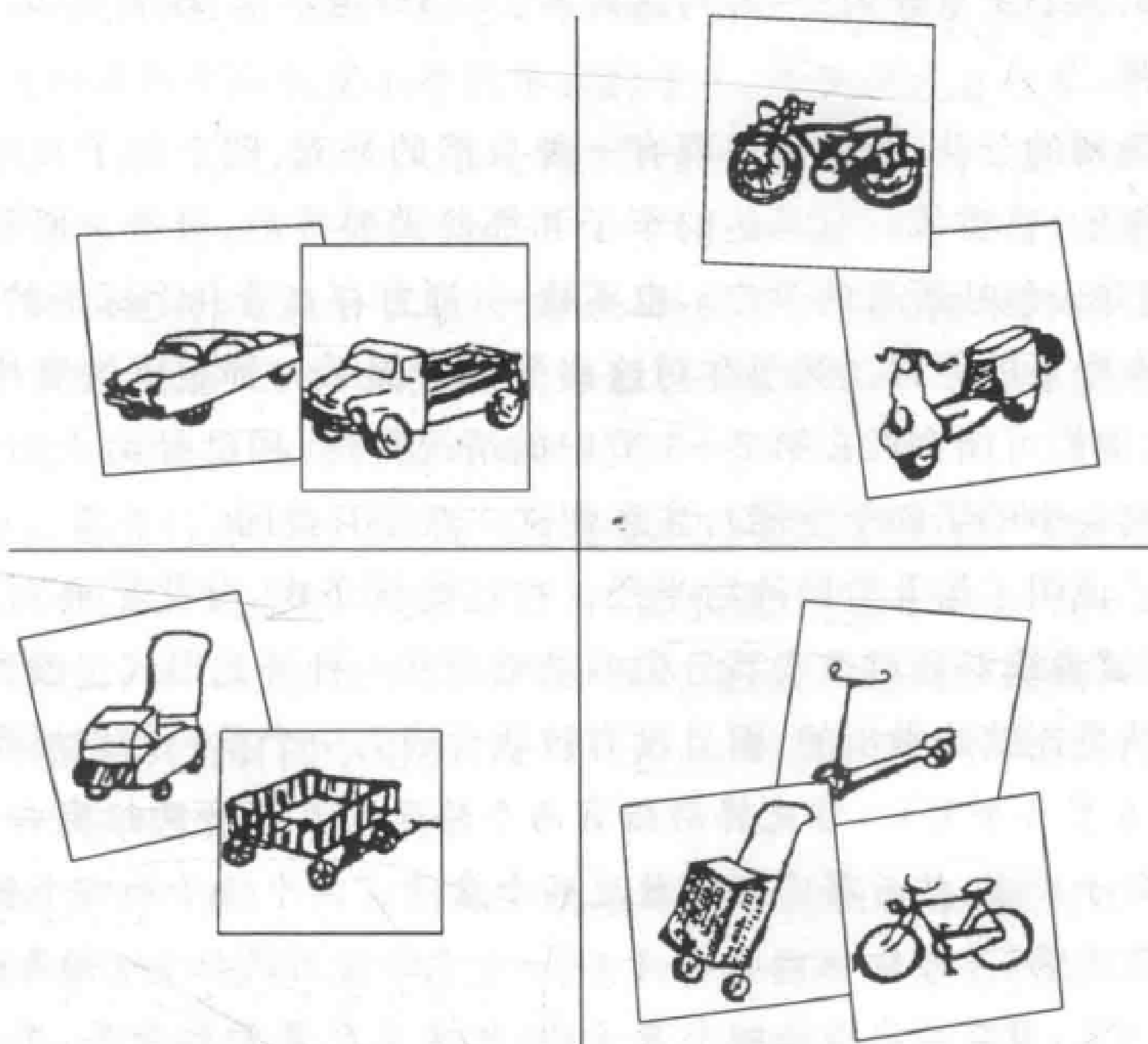


图 12

构造。

在第Ⅱ阶段，集合的基础仅仅是相似性。此外，它们易于造成一些补充的子集。开始时划分并不完美，而且那些子集也可能不是完全没有联系的。但是，这些集合后来就基于两分法。虽然这些两分法开始时是连续的，但它们最终便联合为一个单一的倍增交叉的系统。

下面是说明第Ⅱ阶段开始时的几个例子。

格雷依（6 岁 6 个月） 一开始摆成四堆：(1)四轮小车，手推车；(2)自行车，低座小摩托车，摩托车；(3)汽车和卡车；(4)童车。然后他将童车与四轮小车放到一起，“因为童车有四个轮子”。——“那么(2)呢？”——“因为它们有两个轮子。”

给他两个盒子，格雷依便将所有的都放进一个盒子中去。“我要将所有有轮子的都放到这里（他从总类开始）”。——“你怎样将它们放进两个盒子中去？”——“在这里（四轮小车，童车和手推车），它们都是车子。”——“这里呢（所有其他的都放在这里）？”——“因为没有别的地方来放他们了。”

再给他两个盒子：(1)“都是有轮子的”；(2)“都是有四个轮子的”。

给他四个盒子：“按照不同于你第一次做的那样来放它们。”(1)卡车，汽车，“它们都有马达，而且它们有四个轮子”；(2)摩托车，低座小摩托车，“它们都有马达（和两个轮子）”；(3)小推车和四轮小车，“它们都是车子。它们有两个轮子和四个轮子”；(4)自行车和童车。

沙夫（4 岁 6 个月） (1)汽车，卡车，“这是两辆汽车”。(2)低座小摩托车和摩

托车,"它们俩都是电动的(=有马达的)"。(3)四轮小车,踏板车①,"你得走路,而且得走着推。"

根据这些最初的分化,我们也发现有一种自然的补充:四个轮子和两个轮子,四轮小车和所有其余的(格雷依);有马达的车子和那些需要推的,等等。但是,这些再划分既不完善(它们并未包括所有的图片),也不统一(通常存在着几个标准的混杂),而这正是这些子集没有联系的原因。甚至在对这些受试者提示一种矩阵的安排时,他们也不能采用它(虽然他们可能会像在第2—3节中的情况那样,用已经给予的三个空间来很好地完成矩阵测验中的第四个空间),注意到这一点是有益的。

下面的例子说明了第Ⅱ阶段的后半段。在这些例子中,分化扩展到这一组的所有的成分,而且受试者能够通过改变其分类的基础而从一种补充形式过渡到另一种形式。但这些分类仍然是连续地做出的,而且没有被联合成为一个单一的倍增系统。

赞尔(5岁6个月) 首先将两组有两个轮子的车子和两组有四个轮子的车子放进四个盒子中去,然后将它们都放进两个盒子:"两个轮子和四个轮子。"——"你能换一种放法吗(另外给他两个盒子)?"——"这些用汽油(=有马达),这些不用(正确)。"但是,当第二次给他四个盒子时,他重复了最初的分类,而这便排除了矩阵的可能性(自行车单独放进1,而踏板车单独放进4)。

盖尔(6岁6个月) 摆成四堆,并且说:"我知道!它们都有轮子。"他将四辆有马达的车子放到一起:"它们都有马达。"在两个盒子中的一个盒子里,他放进了剩下的四辆:"它们都有轮子(但没有马达)。"再给他两个盒子,他将这些成分划分为两个轮子的和四个轮子的。但并没有构成一个矩阵。

马吴(7岁5个月) 以同样的方式连续地构造了两个类别,其中的一个划分为两个轮子和四个轮子的,而另一个划分为"有马达的和没马达的"。但是不能把它们联合成为一个单一的系统。

儿童是怎样从两个不同的集合,过渡到使两者结合在统一系统中的倍增分类的呢?正像我们在着手分析第Ⅲ阶段的那些反应时将要看到的那样,这种转变似乎涉及第二个分类对于第一个分类的追溯的作用,它导致了一种能使这两个类别结合起来的预见的效果。在我们描绘这个复杂的过程之前,我们需要比较详细地分析一个或两个连续两分的事例。

赛克(7岁8个月) 开始时在未使用任何统一标准的情况下将那些成分分类到四个盒子中去。后来,他将卡车、低座小摩托车、自行车、摩托车和汽车放进一个盒子,将所有其余的放进另一个盒子。"它们都有轮子,在这里(1)。"——"其他的呢?"——"也有。"——"是吗?"——"除了自行车外(他将它放进2),它们都有马达,在这里(2),它们都有轮子,没有马达。"在第二次尝试中,他将这些车子划分为

① 代替手推车,这位受试者并不认识这个物体。

两个轮子和四个轮子的，除了“轮子”外，他什么也没有提。然后给他四个盒子，他的划分是：(1)摩托车和低座小摩托车；(2)卡车，汽车；(3)自行车，手推车；(4)四轮小车，童车。“为什么这些(4)放在一起？”——“它们有轮子，没有马达。”——“(3)呢？”——“没有马达。”——“(2)呢？”——“有马达。”——“(1)呢？”——“也有马达。”——“能不能将汽车和低座小摩托车放在一起，将卡车和摩托车放在一起？”——“不能，这些(2)有四个轮子，那些(1)只有两个。”我们看到了四个倍增的类别，虽然它们不是以矩阵的形式安排的。

一个月以后，赛克(7岁9个月)说他丝毫也记不起那次实验，但他还是立即在排成一行的四个盒子中构造了同样的类别。后来，要求它“将盒子调整一下，以便使它们配对”。他构造了这么一种样式：盒子(1)和(4)成对角，盒子(2)和(3)成另一个对角，并对这些盒子作如下描述：(1)有四个轮子，没有马达；(4)有四个轮子，有马达；(2)有两个轮子，没有马达；(3)有两个轮子，有马达。

贾恩(7岁1个月) 开始时划分的基础是功能的联系，他利用了四个盒子；后来，他根据“有马达”还是“没有马达”将它们合并到两个盒子中去。——“你能换一种方法吗？”——“能，有些是用木头做的，有些是铁制的。”

在没有使用盒子的第二次尝试中，他一开始便将这些车子划分为铁的或木头的；以及有马达的和无马达的。“你能换一种方法吗？”——“能，我认为我能，我有个主意：(1)有四个轮子的用木头做成的(四轮小车和卡车)；(2)有两个轮子的用木头做成的(手推车)；(3)有四个轮子的铁制的(汽车、卡车)；(4)有两个轮子的铁制的(自行车、低座小摩托车和摩托车)。”

克罗(7岁9个月) 开始时也是在事先没有统一标准的情况下分成四个集合。后来他将它们分成有马达的车子和没有马达的车子两类；后来又将它们分成四个轮子的和两个轮子的两类。再次给他四个盒子。他根据四种可能的联系将它们分配为：有马达的两个轮子的或四个轮子的；没有马达的两个轮子的或四个轮子的。

这些例子说明了第Ⅲ阶段的开始，也说明了第Ⅱ阶段的情况，它们之间的区别是，前者证实了一个预见格式的存在。贾恩说“我有一个主意”的时候是在他按照他的主意对这些物体进行分类之前。交叉分类乃是根据两个同时存在的标准来对物体加以分类。所以，除非受试者在一开始时就具有一种他事前已经确定的将所有这些两分法联合起来的先在的意图，否则他就不能进行交叉分类。但这种预见绝不是无缘无故地出现的，而且先于这种预见的那些反应必然要导致这种预见。我们刚才举出的这些事例并不是从任何预见的反应开始的。当第一次将四个盒子呈现给他们时，他们就从功能的联系开始，并继而通过尝试错误来改进这种分类；根本就不存在一个全面的打算。只是到了后来，他们才发现了第一个总的标准(即那个有马达或没有马达的标准)，后来才有第二个总的标准。

我们发现，甚至有几个处于第Ⅱ阶段的受试者(费尔，盖尔，马吴)也一个接一个地

发现了这些标准。但这有一个决定性的差别。在第Ⅱ阶段，当受试者采用第二个标准时，他们完全忘记了第一个标准；现在，我们便发现了一个清晰的事后认识的迹象。即使当他们在按第二个标准进行分类时，也还有一种回到第一个标准去的倾向。因此，我们看到，在赛克见到这些实验器材整整一个月之后，他还是受到先前那个分类的影响。而且，尽管他没有明确地提出轮子的数目，但还是相当自发地使用了这个标准。我们在这里发现了与在其他地方的发现相同的发展顺序。首先是在两种选择之间动摇；然后开始有了事后的认识，两种选择几乎是同时存在的；最后，事后认识伴随着事先认识，而且这两种可能性联合成一个统一的系统：在这个事例中，那就是交叉分类。

不幸的是，这个实验有许多可能有的两分法（例如贾恩提出按木制车和铁制车，而不是按轮子的数目来分类）。由于这种原因，我们所描述的 7—8 岁的那些反应并没有在 8—9 岁时得到巩固。相反，受试者的反应却显得越来越多变。

博恩（8 岁 3 个月） 给他四个空盒子，他立即将这些车子划分为四个最简单的倍增的类别：有马达的和无马达的；四个轮子的和两个轮子的。但当要求他将这些东西放进两个盒子中去时，他发现了八种可能的标准：两个或四个轮子，有或没有顶篷，有或没有把手，有或没有门，有或没有鞍座，有或没有铃，有或没有刹车，有或没有车胎。它们的联合将产生 256 个倍增的类别！当再次给予四个空盒子时，他尝试了几种不同的联合，所有这些联合都是不完全的。在将盒子安排成一个矩阵时，他又回复到最初的四个类别。

毕恩（8 岁 6 个月） 他发现六种标准：马达，轮子的数目，鞍座，辐条，灯和装载（载人或载货）。这些可能造成 64 个类别，他显然没有试图将它们合并到一个单一的系统中去。

如果撇开最后的这些复杂情况不谈，那么，这些实验就可以清楚地表明，一旦受试者掌握了有关附加类别的方法（参见第二章第 1、2 节），他就会自发地倾向于将那些不同的标准结合为一个单一的倍增的系统。不过，虽然他自己能够构造四个倍增的类别，但通常他并不将它们安排成矩阵的形式。这一切都进一步地证实了这么一个概念——尽管交叉分类并不涉及图形之直观的成分，但它首先要依赖于各种顿悟的协调。在前运算的水平上，这种协调乃是由事后认识加上有限的事先认识所调节的。这些将逐渐地转变为一种作为运算思维之特征的适当的预见格式，而这种发展是相对连贯的（即不存在飞跃）。

6. 简单的倍增（或相交）

迄今为止，我们的发现似乎表明，倍增结构的发展并不完全与早期前运算的和图形的结构无关（第一节的假设 1）。同时，它们又不是直接得之于那些图形结构的（假设

2)。虽然它们要经过一个图形的阶段，但更得益于渐进的协调，而它是部分地依赖于产生自类别之增加的那种协调的(假设 3)。这种协调要经过下列阶段：最初有一个或两个没有联系的两分法；然后，第二种两分法对第一种具有一种追溯的作用；最后两者结合为一个预见的格式。

因此，在我们已经讨论过的完全的交叉分类同仅仅涉及两个类别相交的简单倍增之间，我们必须要找出其明显的差别。比如说，有这么一个“完全的倍增”，$B_1=A_1+A_1'$ 和 $B_2=A_2+A_2'$ 这两个类别由同样的成分构成，而且它们的相交产生了 A_1A_2，A_1A_2'，$A_1'A_2$ 和 $A_1'A_2'$ 这四个类别。当 A_1 和 A_2 这两个类别产生出类别 A_1A_2 时，就有了“简单的倍增”。A_1A_2' 和 $A_1'A_2$ 这两个类别也是如此。它们每一个类别都由不属于另一个类别的那个类别的成分所组成。于是，简单倍增乃是完全的交叉分类的部分的运演。但是在简单倍增中，A_1 和 A_2 并没有结合为 B_1 的形式，A_2 和 A_2' 也没有结合为 B_2 的形式，而 $A_1'A_2'$ 这个类别也没有出现。

人们可能会认为(原子逻辑学或心理学始终是这么认为的)，简单倍增应该比完全的倍增更“基本”些。因此，在受试者的发展过程中，它应该比后者出现得更早些。完全的倍增作为由简单倍增所组成的一个系统，必定在较晚时才发展。

相反的假设——其基础是这么一种见解，即运算的系统从心理学的角度来看更为原始，而从逻辑学的角度来看则更为基本——预言，简单的倍增肯定在较晚时才发展。其理由是，简单的倍增意指从完全倍增的整个系统中抽取一个部分。如果整个的系统的发展乃是(首先对追溯，后来对预见)这些协调相互作用的结果，那么，受试者必须得将 B_1 和 B_2 这两个类别的所有成分加以分类这一事实只能促进这个过程。简单的相交将在较晚时发展，其原因是，同有关两种可能的两分法(其中每一种都包括了这一组中的所有的成分)的协调相比较，需要作简单相交的情境更不利于有关的那些标准的协调。

我们试图以下列实验①来分析简单倍增的发展。向受试者呈现一排绿色的物体(一个梨，一顶帽子，等等)和一行与之成直角排列的各种颜色的叶子(棕色的，红色的，黄色的，等等)。在这两行相接处留有一块空间，要求受试者填补这一空格(答案可以采用言语描述的形式；可以画示意图；在必要时，也可以从几幅供选择用的图片中挑选一幅)。

他一定得发现一个“适合”所有这两行中的“所有东西”的物体，即一片绿叶。在此之前，向他询问诸如此类的问题：“为什么将这些东西放到一起？它们是否完全相像？它们相互之间是否有点像？它们都是……？”如果受试者觉得这个问题困难，那么就要增强相交的效果，其办法是将这两排都加以伸延以形成一个中间有一块空缺的十字形。为了增强有关的相似性，有时也在原先那两行的旁边再加上几行。新增加的几行可以

---

① 参见图 13。

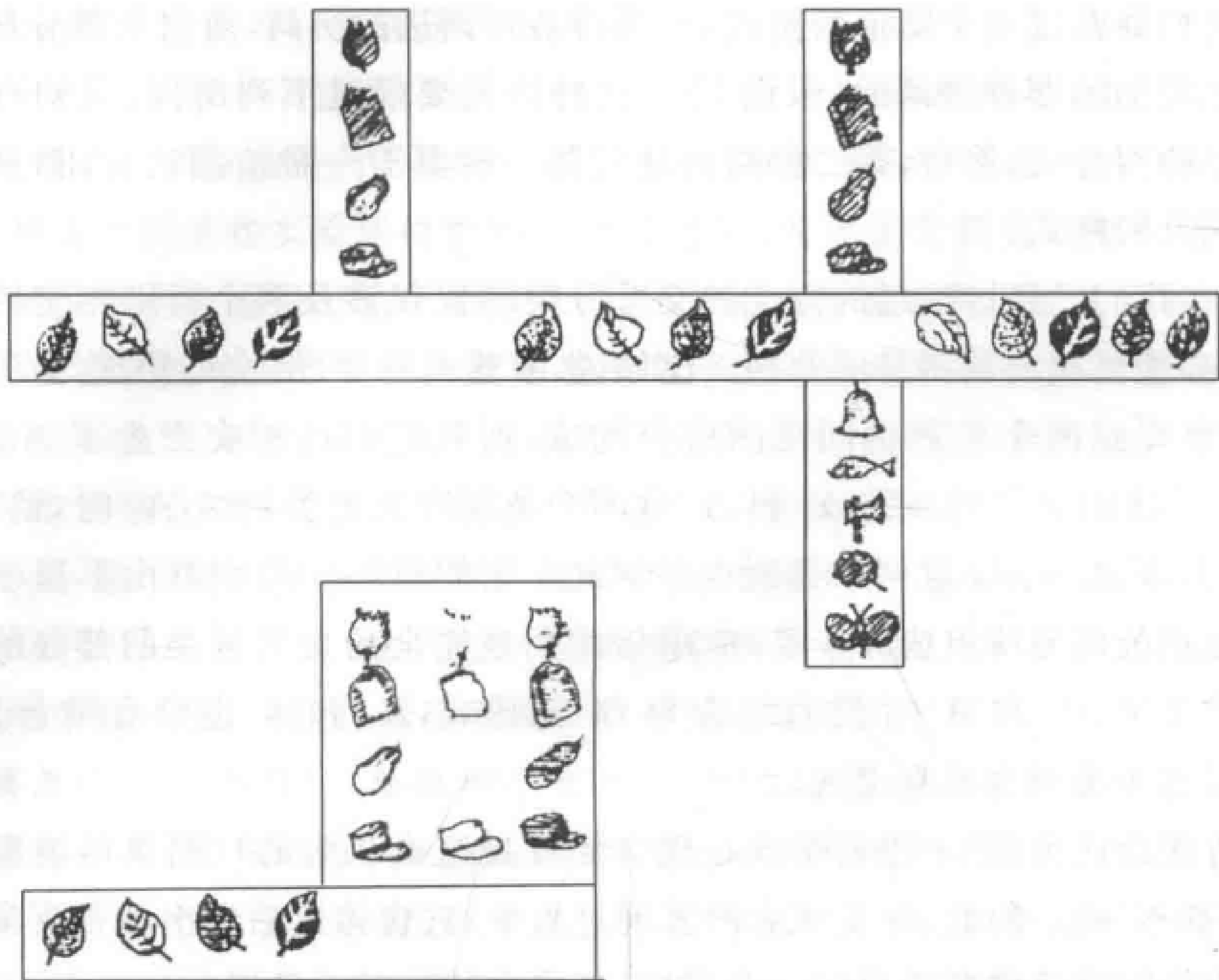


图 13

采用不同的物体以与原先的那一行形成对照，这同样也可以达到增强相似性的效果(例如，一行叶子有一个共同的特性这个事实，可以通过在它的旁边放一行猫来强化)。

这个过程特别有趣，因为在我们研究作为与完全的交叉分类相对的类别的相交时，我们也能够发现两个类别的倍增和这些类别本身的形成之间的另外的一些关系。

受试者的反应可以归为两组：在决定填补空格的成分时，他要么仅仅考虑这两行中的一行，要么两行都考虑。如果他两行都考虑，那么他就做出一种符合类别之倍增的选择，尽管这并不一定说明他的思维是真正的运算思维。下表说明 5—10 岁的一组受试者对于这两种选择的频率。

表 XVII 两个类别的相交：结果(%) ①

年 龄	5—6	7—8	9—10
与一行相配的选择	85	42.5	17.5
与两行都相配的选择	15	57	82.5

这些结果中最引人注目的是，在 9 岁或 10 岁之前，成功率都未达到 75%，而在大多数的矩阵测验中(形状，颜色，方向等，即任何其标准不涉及比较复杂的因果作用的测验)，7—8 岁受试者的正确答复却达到了 75%。

的确，在矩阵测验中有一个重要的感知因素；但是，这个实验也是有感知因素的，尤其是在两行形成一个十字形时更是如此。

---

① 每一个年龄组的受试者人数大约为 20 人。

现在我们便来一步一步地研究一下简单倍增的那些阶段，其方法是描绘那些不同的反应类型，这些类型的反应将导致这两个再划分的形成。

Ⅰ.仅仅与一行相配的选择。

（Ⅰ1）与一个邻接的成分相同——这无疑是一种最基本的反应。它是用一个同与之相邻的两个成分中的一个在形状或颜色方面相同的成分来填补空格。

赞拉（5岁10个月） “应该放一个什么东西以便使它与所有这些和所有那些相配?”——“一顶帽子（绿色物体那一行中最邻近的成分）。”——“还有什么?”——“一片叶子（选择了一片与最靠近这个空格的那片叶子相像的紫色叶子）。”

毛恩（5岁10个月） “一片叶子（与邻近的那片颜色相同）。”——“（与绿色的那一行并排地加上一行红色的）像这样的呢?”——“一顶帽子（与其相邻的一样）。”——“（实验者加上一行苹果以与并列的那行叶子相对照）像这样的?”——“像这样的一个苹果（像其邻近的涂了颜色的橘子）”等等。

在这个例子中，选择的基础纯粹是感知的。因为，它往往选择与邻近空格的那个成分完全一样①的东西。无论是另一行还是这一行的其他成分，都没有发挥任何的作用。半数以上的5岁的受试者都有这样的反应。6岁的仍然占三分之一，只是到了8岁时，这种反应才消失。

（Ⅰ2）与其中一行的另一个成分相同——这只是（Ⅰ1）的一种伸延。它的出现频率最高的时候是6岁，在8岁时就很少见到。

科特（5岁9个月） 开始时的反应是Ⅰ1，后来改变为Ⅰ2。“帽子和铃（其中一行中的两个最邻近的成分）。”——“只要一样东西。”——“梨（绿颜色的那一行中的另一个成分）。”——“（将那行叶子加以伸延）像这样的呢?”——“一片叶子。”——“哪一种?”——“粉红的（与这行中的一个成分完全一样）。”——“能不能放别的?”——“书（与绿色的那行中的一个成分完全一样）。”

克里（6岁9个月） 花和黄色的物体：“花。”——“怎样使它同所有这些相配?”——“虫子（一只靠近这一行中间的黄色的昆虫）。”——“（猫和粉红的物体）像这样的呢?”——“一头猪和一只小猫（每一行中的一个成分）。”——“你只能选一个，它要同所有这些和所有那些相配。”——“那么就是一头猪，因为我姐姐和我喜欢粉红色。”——“猪同所有这些（猫）相配吗?”——“不，你得在这里放一只小猫。”——“它也同这些（粉红的物体）相配吗?”——“猪。”

这第二种类型的反应有时也引起另一种介于（2）和（3）之间的反应。这种反应自然要导致（3），因为它开始显示了这两个集合之间的关系。受试者往往只考虑两行中的一行，但他的选择也兼顾了另一行（通过功能的联系或一种可能有的复杂对象）。

比尔（5岁11个月） 叶子和绿色物体：“绿色的梨，因为那与叶子相配。”

① 参阅矩阵测验中最年幼的受试者选择完全一样的物体的倾向：第3节，表XV。

他之所以选择了梨，不仅仅是因为它是绿色物体中的一个，而且也因为它与叶子相配(它们都附属于同一个物体——树)。这种反应极为少见，所以它本身不能构成一种反应类型。

(Ⅰ3)被选的成分没有出现在显示出来的那两行之中，但它与其中一行的一个或数个成分有功能的联系，或者它构成了一个可能的复杂对象的部分。这种反应的新颖之处在于，受试者选择了一个并未呈现的成分，但是他不能发现一个属于这行或者属于那行的成分，这就是他用这种比较容易想出来的表示部分成员的关系(将一个复杂对象的部分同全部成分联系起来)来代替一个类别中所有成员的原因。但它是出现在一个高级阶段中的回复，因为它最常出现的时期是在7—8岁，而且到10岁时才消失。(在7—8岁之前，儿童难以想出一个没有呈现出来的物体。)即使存在着这种基本反应的回复，但它常常伴随有在这两个集合之间建立某种单一关系的意图。

艾立(8岁9个月) 从联系这两个集合(叶子和绿色物体)开始。"一棵树(它是绿色的，而且有叶子)。"——"这个呢(添上两个附加成分)?"——"树干(绿色)。"——"它同这些(叶子)相配吗?"——"相配，因为叶子确实在树上。"——(加上一行粉红色的。)——"一件挖土的工具；那同手推车很相配(仅仅利用了一个集合)。"——(叶子和红色物体。)——"一个人在看书(仅仅一个集合)。"——"它同这些(叶子)相配吗?"——"不，一定得有一位绅士照料这些叶子。"

安益(9岁6个月) 叶子和绿色物体。"一个杏。"——"为什么?"——"因为这些叶子同杏几乎一样。"——"它同这些(绿色物体)相配吗?"——"不，因为它是蓝的。"——(花和黄色物体。)——"一个栗子，因为它们是栗树叶子。"——"它同这些(叶子)相配吗?"——"它同这些叶子不配。一个花瓶(相配)，因为人们能将郁金香插进花瓶，而且郁金香是黄的。"

这种反应类型比前面的那些要发展些，在这种类型的反应中，受试者选择了一个没有出现的成分，而且有时也联系了那两个已经呈现的集合。然而它乃是一种基本的反应，因为受试者提出的关系，或者是部分与整体的关系，或者是功能的，而不是类别的联系。

(Ⅰ4)被选的成分并未出现，但它与一个集合中的那些成分有某种程度的相似。这种反应标志了在伸延某一集合的方向上的新的进步。但它并不是真正的类别的外延，因为受试者仅仅是将一个成分与另一些成分联系起来，而不是根据"所有的"这些成分来思考。

密克(6岁2个月) 叶子和绿色物体。"一片叶子(同任何已经呈现的不同)，或风铃草(与叶子相配)，或一只绿气球。"

皮埃(8岁9个月) 以第3种类型的反应开始。"(叶子和绿色物体)一棵树。"——"(花和粉红物体)这个呢?"——"草配猪。不，一定得有另一种花。"——"(苹果和黄色物体)——某种水果。"

罗吴(8 岁 10 个月) 叶子和绿色物体。"某种粉红的东西。"——"为什么?"——"因为(在这些叶子中)还没有粉红的。"——(对这两个集合加以扩展,其中一个增加的是粉红色物体。)——"一棵樱桃树,因为它有绿色的和几个粉红色的(虽然这种反应比较接近于第三种类型,但在这两个类别之间已经开始有了联系)。"

克劳(9 岁 5 个月) 叶子和绿色物体。"一个苹果。"——"为什么?"——"因为(在绿色物体中)已经有了水果。所以,我选择苹果时,我就有更多的水果。"——"那么,它同这些(叶子)相配吗?"——"不,一片黄色的叶子,因为还没有黄色的叶子。"

实际上,在这些受试者中,每一个人都往这些集合中的一个增加了一个成分,因为它同已经出现的那些成分有一定的相似性。他开始在构成一个逻辑的类别。

(Ⅰ5)选出来的成分并未呈现,但它显然属于这两个类别中的一个。作为与集合相对的类别的特征,乃是共同特性的提取。共同的特性决定了类别的内涵,它同正确使用"所有的"这个词一起便概指了它的外延。如果儿童能够构造真正的类别,那么他通常也能进行交叉分类,所要求的只是这两个类别要包括这一组的所有成分。在矩阵测验或附加分类测验等项目中,差异是相当小的,而且可以在任何方向上出现。但这并不适用于简单的倍增。在儿童相当成熟之前,类别的相交始终困扰着儿童。

戴姆(7 岁) 提出在绿色物体那一行中加一个苹果,"因为它们不是同样的东西,但它们涂上了同样的颜色"。然后她提出在那行叶子上加一个不同颜色的叶子,因为"它们是相同的东西,但有不同的颜色"。至于其他那几行,她的答复也是相同的,即每一次仅仅考虑一行。最后,她达到了相交的概念,而且她的反应符合第 5 种类型。

虽然这位受试者没有使用"所有的"这个词,但诸如"同样的东西"和"不是同样的东西但有同样的颜色"等表达,显然包括了一个类别的完全的外延和它的相应的内涵。

Ⅱ. 选择同时受到两个集合的影响。只要我们有一个能够用"同时的"这个词来加以描绘的格式,我们也就有了某种倍增的关系。就这个一般的意义上来说,倍增的格式通常早在它获得运算之最后的形式之前就出现了。在我们标示为Ⅰ2—Ⅰ5 的那些种类中的每一种反应中,毕竟存在着一种两个集合之间的不完全的关系。而逐步研究作为第Ⅱ种类型反应之特征的那些不同阶段的重要性,也正在于此。我们将要看到,运算的倍增本身就是一种格式。它的发展是逐步的,而且经历了与附加格式的发展相平行的那些阶段。它不纯粹是在这个发展过程结束之时被移植过来的附加格式的复杂化。

我们发现,倍增的发展和附加的发展都有同样的五个阶段。除此之外还有一个我们称之为Ⅱ0 的类型,它体现了这两者的混合。

(Ⅱ0)两个成分的并列。这个反应似乎是弥补只考虑一个集合的那些选择和两个集合都考虑的那些选择之间的间隙的桥梁。这种反应不常出现,在 4—9 岁的所有年龄

中，其出现频率少于10%，这或许是因为它通常会转变为一种更为实际的倍增的缘故。在这里，我们想要表明的是：受试者并不是集中考虑一个能同时适合两个集合的成分，而是分别地为两个集合各选一个成分。

比尔(5岁11个月)　(我们已经提到过比尔，他的一个反应是属于Ⅰ2类型的，但带有联系两个集合的意向。)"(粉红的物体和苹果)必须要选某种粉红色的东西和一个不同颜色的苹果。"——"哪些东西？"——"红色或苹果、粉红(我们看到，他接近于选粉红色苹果)。"——"这里呢(猫和黄色的物体)？"——"我们得有一个非常小的黄色的东西和一个非常小的猫。"——(花和紫红色的物体)——"一件小的紫红的东西和一支棕色的小花。"

雷斯(6岁9个月)　"(猫和粉红色物体)一头猪和一只小猫。"——(苹果和紫红色物体)——"一个苹果和某种紫红色的东西。"——"不过我只想要一件东西。"——"一个苹果，我们将把它涂成紫红色。"

挑选一对物体乃是一个比较接近于对两个集合加以协调的阶段。这些儿童试图通过为每一个集合各选一个代表来将它们联系起来。只需再走一步就能使这两件物体一致起来，而雷斯达到了这一步。

(Ⅱ1)两个最接近的成分相乘。当代表每一个集合的那两个成分第一次联合起来时，我们发现了一种仅仅考虑每一个集合中的一个成分(通常是最接近的那个成分)的倾向。

贾克(5岁10个月)　(他的其他反应属于类型Ⅰ1)"(叶子和紫色的物体)一顶帽子(像最接近的紫红色物体)，但它的颜色一定要像这(最接近的叶子，蓝色的)。"

贾克从一个属于其特征为颜色的集合中的一个成分那里得到了他的图片的形状。反过来也是这样(不过就这个"反过来"来说，他该选一片紫红色叶子。而且，除非我们再进行一次实验研究，否则我们就该将他的反应看作是类型Ⅱ5)。

(Ⅱ2)两个不是每一个集合最接近的成分的相乘。这种反应相似于上一个反应的结构，因为这两个集合仍然不是作为一个整体考虑的。但这有些进步，因为儿童不再局限于最接近的关系。

邓恩(6岁9个月)　"(花和绿色物体)一个梨。"——"它与这些(花)相配吗？"——"不，那么就是像这样的(绿郁金香，它包括在绿色物体中)东西。"——"与这些(花和黄色物体)相配吗？"——"花。"——"什么样的？"——"像这样的(指向这一行中间的一朵橙色的花)。"——"为什么？"——"因为它是黄色的。"——(花和紫红色物体)——"根本没有任何东西(仍然在寻找一件已经存在于其中的一排之中的物体)。"——"你想想看。"——"蓝颜色的，只是涂上了紫红色的。"——(苹果和绿色物体)——"这花要是红色的……不，这些苹果要是绿色的。"

在这里，受试者在努力发现两种类别的相交。但在开始时他的注意力集中于那一行中的一个成分，甚至到后来，当要求他想一想共同的部分时，他才开始以稍微概括一

些的方式去思考。

（Ⅱ3）根据功能的联系，或根据内在于一件物体之中的部分联系来做出选择。类型Ⅱ3相应于类型I3，而且我们已经注意到那些显示联系两个集合中的一个成分的例子（参见安益）。

李斯（6岁2个月）　“（叶子和绿色物体，包括一个苹果，一顶帽子等）苹果，因为在有些叶子上可能会有苹果。”——“那与绿色的相配吗？”——“是的，因为，有时候，如果你有苹果和帽子，你可以将苹果放进帽子里去。”

艾拉（7岁11个月）　“（叶子和绿色物体，包括一把斧子）树，因为它与斧子和叶子相配。”

艾立（8岁9个月）　“（猫和黄色物体，包括一个梨）几枝树枝，因为梨长在树枝上，猫也爬到树枝上。”

皮埃（8岁10个月）　“（猫和蓝色的物体，包括一只鸟）在上面有鸟巢的树，而且一只猫往上爬。”

安益（9岁6个月）　（在I3中已经提到过安益。）“（猫和紫红色物体）一只羊毛球，因为猫玩羊毛球，因为它是紫红色的。”

这有进步，因为受试者们在引进一个没有包括在这些图片中的物体，但连接它们的关系却是功能的或部分的，不是类别的关系。令人奇怪的是，这些关系是在较大的年龄才出现的，因为在这个年龄之前，自发的附加分类或倍增分类早就替代了它们。

（Ⅱ4）一般关系的倍增。这个类型相应于类型Ⅰ4，但有一个本质的差别——现在，受试者在将一个类别加以伸延时考虑到了两个类别。

雷斯（7岁6个月）　“（苹果和蓝色物体）手提箱。不，梨。”——“为什么？”——“它是相同的水果。”

翁斯（9岁6个月）　“（叶子和绿色物体）杏（绿色），因为这些叶子非常像杏（无疑是在考虑其形状）。”

虽然这是倍增，但其联系却相当微弱。它只是儿童所提出的逻辑学的界说的一个部分，其中仅仅利用了种，而没有利用种差。

（Ⅱ5）类别的倍增。这是正确的解决办法。

戴姆（7岁）　（在Ⅰ5中已经提到过戴姆。）“（花和粉红色物体）粉红色的花。”——“粉红色的球行吗？”——“不行，因为这些（花）不是球。”——“（苹果和黄色物体）黄色的苹果。”——“这些（猫和红色物体）怎么样？”——“一个猫……（默不作声）。一个红色的猫！因为所有的这些都是猫，所有的那些都是红色的。”

注意，存在着一种对于类别（“所有的”），而不是（像Ⅱ1和Ⅱ2中那样）对于任何一个特定成分的明确的关系。此外，这位受试者很快就想象出一个“红色的猫”，尽管他明白它们并不存在。

5—10岁儿童做出类型Ⅱ5反应的百分比如下：

5—6	7—8	9—10
12.5%	30%	50%

这进一步证明，简单相交比完全的交叉分类(第 2—4 节)要困难些。

7. 附加和倍增

相交比较困难这一事实，有助于我们加深对于类别的附加和倍增之间的关系的理解。因为在这些局部的情况中，它肯定同前面已经讨论过的交叉分类问题有着某种联系。

到目前为止，我们已经明白的一切(尤其是类型Ⅰ1—5 的那些反应和类型Ⅱ1—5 的那些反应之间的紧密的平行关系——见第 6 节)都有利于第 3 节中的假设 3，即附加的格式和倍增的格式是一起发展的，而且它们共同具有一个相同的逐步发展的组织。但这个假设仍然没有解决这么一个问题，即究竟是附加的发展先于倍增的发展呢，还是两者同时发展。

乍看起来，第 6 节中的表 XⅧ 暗示了附加先发展，因为 85%的 5－6 岁受试者仅仅对两个集合中的一个做出反应，与此相比较的是，9－10 岁的只有 17.5%。但是，这个表并没有考虑到附加格式或倍增格式的完善程度。它可能表示，儿童建立附加的格式(它与仅仅对一个集合做出反应有关)早于倍增的格式。但仍然存在着这么一种可能性，即在儿童逐阶段地通过附加格式的结构组织时，他也能够将这些相继的见识转移到倍增的问题上去。

第 6 节的结果清楚地表明，得以成立的是第二种可能性。在类型Ⅰ的那些反应中，我们发现了完全相同的形式和阶段(1—5)，在类型Ⅰ那里，问题是根据一个集合(即一个附加的类别)来加以解释的，而在类型Ⅱ的那些反应中，受试者显示了他对这个任务的倍增性质的认识。于是表 XⅦ 仅仅证明，儿童难以将这个集合联系起来，他基本上仍然是对一个集合做出反应，而且与真正的运算的附加(类型Ⅰ1—3)相去甚远。相反，如果附加的格式构造得较好(类型Ⅰ4—5)，那么倍增的格式也就构造得较好(类型Ⅱ4—5)。只有一个共同的组织过程，而且只要完成这个过程，它也就逐阶段地产生出附加和倍增这两个运算的格式。

然而，在我们能够接受这一结论之前，我们必须要确定，实验的情境并没有由于暗示两个集合的相交而妨碍附加的格式，即使是在受试者实际上不能发现这种相交时，情况也是如此。我们曾为此而做过一个实验——仅仅要求受试者完成两个被看作是相当不相连的集合。

在这个实验中，在这两行中的每一行的端点各留一个空格，而不是在两行相交处留一个空格。我们询问下列两个问题：(1)“一个人画了这些图画。为什么这个画图的人

将这些图片放到一起？为什么将那些放到一起？它们为什么相配？等等。"(2)然后将分别画在两张卡片上的几幅图画呈现出来："你看，每一张卡片上都有一块空白。他忘记了其中的一幅图画。请你在这些画片中挑选一幅与一张卡片上的'所有的图画'相配的。"如果受试者感到困难，可以将图片一幅一幅地呈现出来。

结果与前面那个实验中仅仅对于一个集合所做出的那些反应是完全相同的。也就是说，我们发现了一些相同的反应类型，即类型Ⅰ1—5。唯一的差别是类型Ⅰ3(部分的和功能的联系)比较少见，因为问题是以多重选择而不是以无限制的形式提出的。

然而，由于这个实验清楚地显示了儿童理解以类别形式呈现的那些类别的能力，所以我们将研究几个这方面的例子。这与我们在第一至第三章所考虑的那些问题稍有不同，但它们都同自发的分类有关。就这一点来说，我们将再一次看到儿童是怎样克服涉及类别成员之关系("X是A")的那些困难的。这些困难基本上产生于附加的运算，类别A的特性由它的内涵a和(相应于量词"所有的")外延两者之协调而决定。一方面，"所有的A都有a的特性"；另一方面，"所有的具有特性a的X都是A的成员"(参见第三章)。下面是几个(1)－(3)反应的例子。

安格(6岁2个月)　仅仅列举那些绿色的物体，没有系统地提出它们的共同特性。"为什么它们放在一起？"——"因为花与水果相配。"他选择了绿色的帽子来填补空格，"因为它(与已经出现在那一行中的另一个成分)完全相同。"——"还有别的吗？"——"红帽子。不，这个颜色不配。"——"这只绿色的鞋配吗？"——"不，形状不配。"对于叶子那个集合，安格说："有些叶子。"——"你能选出一幅图来放到这里(空格)吗？"——"这片绿叶(与最邻近的叶子完全一样)。"——"为什么？"——"颜色完全相同，但方位不完全一样。"——"这片紫红色的叶子配吗？"——"(沉思)是的，因为它同这(黄色的叶子)方位相同。"

朱恩(6岁3个月)　似乎正确地指出了这两个集合的共同特性，因为她说了"有些叶子"和"这是同样的绿颜色"。但在填补花的集合时她提出"蓝色的烟斗"。——"为什么？"——"它与这(蓝色的叶子)颜色相同。"——"还有别的吗？"——"紫红色的花"。对于绿色的物体："绿帽子。"——"为什么？"——"因为它的颜色与这(最邻近的物体)相同。"——"红帽子行吗？"——"行，因为它也是帽子。"——"绿鞋呢？"——"行。因为它是绿颜色的。"但她也接受了绿色的花，"因为人们有时从蓝颜色中配出绿颜色"。

雷德(6岁6个月)　仅仅列举绿色物体，并没有提到它们的共同特性。他选择了"绿色的书"。——"为什么？"——"那里有一本书。"——"还有别的吗？"——"绿帽。"——"还有吗？"——"绿叶(他立即挪开)。不，那里没有叶子。"——"这只绿鞋可以吗？"——"不，那里没有鞋。"——"哪一个最配？"——"帽子(与最邻近的那个成分相同)。"对于叶子，雷德说："有些叶子，"而且他选择了(已经出现了的)蓝色的叶子，然后选黄色的叶子(也已经出现)。"哪一个比较好些，蓝色的叶子还是

黄色的叶子？”——“蓝色的，因为它与这（最邻近的成分）相配。”——“不过，它一定要与它们所有的都相配。”——“蓝色的叶子与黄色的叶子不配……我不知道。”

这些受试者所提出的那些界说是不适当的。他们没有认识到 A 中的“所有的”成分都具有共同的特性 a。同时，他们不能在正确的方向上外延这个集合，即不能接受任何具有特性 a 的 X。他们只是寻找某种与最邻近的成分完全相同的东西（参见第 5 节的 Ⅰ1 反应），要么发现和其他那些成分中的一个成分完全相同的东西（参见 Ⅰ2）；要么便构想出部分的或功能的联系（花联系水果，烟斗联系帽子等）。他们可能不时地寻找一些主要的相似性，这可能就是类型 Ⅰ4。

类型 Ⅰ4 乃是根据这个集合中的那些成分的部分的相似来选择新的成分。这种相似性往往局限于这些成分中的某几个，而不是全部。

贝斯（5 岁 2 个月）　正确地将两个集合界说为“有些叶子”和“绿色，绿色，绿色”。尽管如此，他还是要往第二集合加上“一个粉红色的苹果，因为那里有一个梨”。往叶子的集合加上“一顶红帽子（因为有一片红叶）”和“一个蓝色烟斗，因为已经有一枝蓝花”。换言之，以形状加以界说的那个集合是通过颜色的相似性来加以伸展的，反过来也是如此。

纳德（6 岁 4 个月）　以同样的方式往绿色物体中加上一顶红色帽子，因为那里面有一顶帽子，等等。

我们看到，这不再是采用同一个标准（有些受试者甚至因“那里已经有了”而拒绝增加这个成分）。虽然标准是相似的，但它却大大地改变了这个特定类别的定义，尽管按照相似的标准所做出的那些界说也是正确的。

我们可以用两个（相应于类型 Ⅰ5 的）正确反应的例子来结束本节。

符拉（7 岁 6 个月）　对于绿色的物体提出：“粉红的苹果，不，绿色的叶子，因为所有的其他的都是绿颜色的。也可以选绿色的鞋和绿色的帽子。”对于叶子：“绿色的叶子。”——“绿色的鞋呢？”——“不，与叶子不配。”

布鲁（7 岁 6 个月）　选择正确：“因为这样的话，每一样就都是绿色的了。”以及“因为它们必须都是叶子。”

这些例子有两点启示。一个结果（开始时它可能出人意料，但却符合第一至第四章的那些结论）是，在第Ⅲ阶段之前，一个新的成分不可能被承认为一个特定类别的成员（符拉和布鲁就是这个阶段的例子。请注意在他们的评论中“所有的”这个词是如何使用的）。因此我们可以结论说，附加格式发展和倍增格式发展之间的紧密联系并不是第 6 节的实验情境所特有的。类别成员的附加格式和包含的附加格式的发展，乃是一种非常缓慢的逐步的发展，当这些格式发展时，我们也就能够发现倍增格式之组织的平行发展。这个结论更有力地证实了与简单相交相对的交叉分类，因为后者实际上是一种较早的发展。

8. 倍增类别的数量关系

到目前为止，我们所研究的是倍增格式的发展，而且我们的这一部分的分析符合于第一、二和四章对于附加类别的研究。我们可以继而考虑倍增类别的数量关系，这同在第三以及第四章的一个部分中对于附加类别的研究是相同的。同先前一样，现在我们所关心的主要是表示类包含之数量关系的“有些”和“所有的”使用。唯一的差别是，现在研究的这些类别必须要构成交叉分类或简单相交的部分。

然而，我们将限制在相交的问题。我们选择了一个比第5节中所使用的更为灵活的方法。因此，我们可以预期获得更多的有关简单倍增的一些东西。不过，之所以采取这种方法的主要原因是，我们希望它能有助于理解有关的数量关系。

实验材料为四种模型：蓝色圆形(*BC*)，红色圆形(*RC*)，蓝色正方形(*BS*)和红色正方形(*RS*)。与此同时，我们还使用了八个盒子。一个盒子糊上红纸，一个糊上蓝纸，一个盒子的白盖上贴了一个白色的圆形，一个盒子的白盖上贴了一个白色的正方形。另外四个盒子也对应于四种模型，每一个盒子上各贴一个几何图形。

最后，我们用两张纸，它们上面都有两个相交的大圆形，其中的一个圆形是黑色的，另一个是黄色的。这样，它们就明确地界定了三个领域以象征两个类别和它们的相交。

这个实验有八个步骤：先向儿童呈现一小堆混杂在一起的模型，它们是5个*BC*，5个*RC*和3个*BS*；然后给他四个盖子上贴有几何图形的盒子，每一个盒子里装有5个与盒盖上图形一致的模型。

(1) 告诉儿童盒子里所装的东西以及他要完成的任务(根据记忆重新摆出那堆模型)。要求他仔细地看这堆模型，然后将这堆模型拿走，让他用那些盒子中的模型摆出一小堆。如果他不能完成，实验就继续进行(2)。

(2) 将同样的十五个模型安排在其中的一张纸上，*RC*放在黑色的圆形内，*BS*放在黄色的圆形内，*BC*放在两者共同的领域内。这样，黑色的圆形便象征圆形，黄色的圆形便象征蓝色的模型，而它们的相交处便象征蓝色的圆形。实验者在不提其象征意义的情况下，要求儿童仔细地看这种安排。将模型再藏起来，要求儿童用装在那四个盒子中的模型在另一张(完全相同的)纸上重新将那些模型摆出来。

(3) 将所有这四种的模型摆成一小堆。然后给儿童装有红色模型和蓝色模型等另四个盒子，解释它们的用途，要求儿童将呈现出来的那些模型装进去。如果他在每一个盒子里仅仅装一种模型(如仅仅装*BC*而不是装*BC*+*RC*)，那么就要求他换一种方法再放。如果他还是没有做对，实验者就同他一起做。

(4) 然后要求他描述这四个(盖着的)盒子里的东西。

(5) 再将同(2)一样的那张纸中的十五个模型呈现给儿童。要求他描述黑色和黄

色圆形上的东西，并说出 BC 为什么放在相交的领域里，等等。

(6) 将这张纸原封不动地放在那里，将所有那些盒子交给儿童，要求他用这八个盒子中的两个在第二张纸上摆出同样的安排。

(7) 然后提出包含之数量关系的问题。"如果一个小女孩用这些模型(BC)或那些模型(所有蓝色的)摆出一个项圈，哪一个将会长些?"重复提出这种形式的问题，以完成下列三种比较:(Ⅰ)BS 和 B(蓝色模型);(Ⅱ)B 和 C(圆形);(Ⅲ)R(红色模型)和 S(正方形)。在 BC,RS 和 BS 这三个子类中，每一个子类总是各有五个模型。

(8) 最后，对于有关的那些不同的类别，可以询问一些涉及"所有的"和"有些"的问题。

为了避免不必要的冗长的叙述，我们仅仅描绘对于(5)—(8)的那些问题的反应。除了某些我们将在第七章(这一章将研究标准之变换)中描绘的东西外，问题(1)—(4)并没对我们已经知道的那些增加任何东西。[问题(3)所引起的两个标准的问题通常在 7 岁时得到解决。]

问题(5)非常清楚地显示了相交方面的困难。下面是两个例子：

查尔(6 岁 11 个月) "黑圆圈内有什么?"——"蓝正方形。"——"用你的手指指给我看(他指得正确)。"——"它里面有什么?"——"蓝正方形。"——"都是吗?"——"是的。"——"再指给我看。"——(他的手指又转动了一圈。)——"蓝色的圆形。"——"都是吗?"——"是的。"——"黄圆圈里的呢?"——"红色的圆形。"——"指给我看(他指了指)。"——"那么，那里是什么?"——"红色的圆形。"他并非偶然地不理会那个相交。

卡尔(7 岁 1 个月) "黑色圆形内是什么?"——"蓝的和红的。"——"什么?"——"圆形。"——"黄色圆形里的呢?"——"蓝色的正方形(忘记了 BC)。"——"能用你的手指指给我看吗?"——(沿着黄色圆形转了一周。)——"那里面是什么?"——"正方形(还是忘记了 BC)。"

下面是过渡时期的例子：

斯塔(7 岁 6 个月) "黑色圆形内是什么?"——"蓝色的。"——"什么?"——"圆形和正方形。"——"黄色圆形内是什么?"——"红圆形。"——"用你的手指指出来。"——"啊！红圆形和蓝圆形。"

古益(8 岁 3 个月) "黑色圆形内是什么?"——"蓝正方形和蓝圆形。"——"黄色圆形内的呢?"——"红正方形和红圆形。"——"用你的手指指给我看。"——"不，是红圆形和蓝圆形。"

鲍吴(9 岁 6 个月) "黄色圆形内是什么?"——"蓝正方形。"——"只是这些吗?"——"还有圆形。"——"是吗?"——"蓝色的正方形和圆形。"——"黑色圈形内的呢?"——"红的和蓝的圆形。"

布格(10 岁 4 个月) "黑色圆形内是什么?"——"蓝正方形和蓝圆形。"——

“黄色圆形内的呢？”——“红圆形。”——“指给我看。”——“红圆形和蓝圆形。”

最后，下面是两个立即理解了的例子：

戴恩(8岁2个月) “黑色圆形内是什么？”——“一边五个，另一边五个。”——“它们的形状？”——“蓝圆形和蓝正方形在另一个圆形内(在相交的领域内)。”——“黄色圆形内的呢？”——“有五个红的和五个蓝的。”——“什么？”——“圆形。”

比格(10岁5个月) “黑色圆形内的？”——“蓝的和红的。”——“什么？”——“蓝圆形和红圆形，不，红圆形。”——“黄色圆形内的呢？”——“蓝正方形和圆形，蓝圆形。”——“对于(黄色和黑色)这两个圆形，你发现些什么？”——“它们交叉。”——“能将红色的圆形放在中间吗？”——“能，不过，这样的话，在每一个圆形内就该有两个不同的种类(=就不可能有任何的相交了)。”

问题(6)——即通过仅仅使用两个盒子来重新摆出类别 RC，BC 和 BS——比较容易解决，因为它并不依靠于相交。这八个盒子总共包含有四个联合(R、B、C 和 S)以及四个相交(RC，BS，BC 和 RS)。这意味着，受试者能够在没有认识到三个集合组成两个相交类别的情况下，从八个盒子中发现两个盒子。然而，只有到了7—8岁时这个问题才能解决，因为它涉及包含的关系。我们先从一个失败的例子开始：

卡尔(7岁1个月) 拿了 RC 和 BC 这两个盒子，并试图解决这个问题。“缺掉了什么？”——“正方形。”他继而任意地试拿了其他一些配对。“如果你拿(C)和(BS)，行不行？”——“……”——“拿($BC+RS$)呢？”——“……”——“(R)和(B)怎么样？”——“行。”——“($S+BC$)呢？”——“行。”——“是吗？”——“不。”——“缺掉了什么？”——“圆形，”等等。

下面是两个说明分组解决的例子。

皮尔(7岁) 仅拿了 BS 和 R，发现缺掉了蓝色的圆形。然后他拿了那盒蓝色的模型并且说：“这些是蓝色的圆形和蓝色的正方形。”他也拿了 RC 并取得成功。“你能用($S+BC$)来完成它吗？”——“不能(正确)。”

古益(8岁3个月) 立即正确地拿了 C 和 S，但他认为不存在任何其他的可能性，而且在偶然拿了 $R+B$ 之前，一直都没有成功。“拿($S+BS$)行吗？”——“不，没有圆形(正确)。”——“($BC+R$)呢？”——“可以(错误)。”——“(R)里是什么？”——“红正方形和红圆形。”——“这里(BC)呢？”——“蓝圆形。”——“是吗？”——“……”

我们以三个立即取得成功的例子来做结束：

斯塔(7岁6个月) 一下子就拿了 B 和 RC。

戴恩(8岁2个月) 一开始拿了 R 和 B，然后他试了 B 和 RC 等联合。

鲍吴(9岁6个月) 拿了 S 和 C，“还有别的吗？”——“有，蓝色的和红色的($B+R$)，等等。”

问题(1)—(4)同重新摆出这些集合的一些不同的方法有关，它们为受试者对于解

决这些集合的数量关系作了准备。问题(5)和(6)也是如此。问题(5)显示了那些相交的集合是什么,而问题(6)则显示那三个子类是如何可能仅仅得自于两个类别的。现在我们来看一看关于数量关系的这些问题的结果。这些问题可归之于三种类型:(Ⅰ)5个蓝色正方形包含在10个蓝色成分之中,即 $BS<B$;(Ⅱ)10个圆形和10个蓝色模型的两个相交类别相等,即 $B=C$;(Ⅲ)10个圆形和5个正方形不等,即 $C>S$。Ⅰ是内涵方面的(假定 B 和 S 都不是空类,它与有关的实际数目无关),而Ⅱ和Ⅲ却是外延方面的。Ⅱ涉及相交类别的比较,Ⅲ涉及不相交类别的比较。然而,Ⅱ和Ⅲ将涉及数目或数值之对应这一事实并非不很重要。在受试者处理这两个问题的时刻,他们清楚地知道,每一个子集都由5个模型组成。

我们先举一些例子,在这些例子中,问题(7)Ⅰ和(7)Ⅱ的解决是失败的,而对于问题(7)Ⅲ则可能是成功的。

沃格(6岁8个月) "哪一个项圈长些,是由正方形还是由圆形组成的那个?"——"两个一样长(错误)。"——"是由蓝色模型还是由圆形组成的那个?"——"由圆形组成的那个长些,因为有红色圆形和蓝色圆形(错误,他忘记了,BC 乃是 B 的部分)。"——"是蓝色模型的那个还是蓝色正方形的那个?"——"由蓝色正方形组成的那个长些。"

贵尔(6岁5个月) 除了对于蓝色的和红色的模型这个问题的回答正确之外,他的回答同沃格一样。

卡尔(7岁1个月) "哪个项圈长些,是由蓝色模型还是由蓝色正方形组成的那个?"——"……不知道。(他用那些模型摆成项圈,并仅仅注意到)用正方形和圆形(=B)组成的那个。"——"用蓝色的模型和圆形呢?"——"……不知道……两个一样(这可能正确,但他还是犹豫)。"——"为什么?"——"……"——"用蓝色模型组成的那个项圈那里有什么?"——"圆形。"——"都是吗?"——"……"——"由圆形组成的那个项圈呢?"——"蓝色的圆形和红色的圆形。由圆形组成的那个项圈长些(忘记了蓝色的正方形)。"

"由圆形组成的和由正方形组成的呢?"——"在圆形中,有红色的和蓝色的圆形;在正方形中,有蓝色的正方形,圆形的那个长些(正确)。"

下一组受试者在外延的数量关系方面是成功的(尽管它们涉及相交),但他们对于内涵的回答却仍然是错误的:

皮尔(7岁) "哪一个项圈长些:由蓝色模型还是由蓝色正方形组成的?"——"由正方形组成的那个长些,因为圆形的数目比正方形的少些。"——"是这样的吗?"——"(他注意到,$BC=BS$。)那么它们一样长(错误)。"——"蓝色的和红色的呢?"——"同样。(他正确地指出了两个集合,这表明他不是仅仅考虑 $BS=RC$。)"——"圆形的和正方形的呢?"——"圆形的长些。在圆形中有红色的圆形和蓝色的圆形(正确)。"

古益(8 岁 3 个月) "正方形的那个还是圆形的那个?"——"不一样,圆形的多些(正确)。"——"蓝色的模型和蓝色的正方形呢?"——"同样长。"——"试一试。"——(他摆了出来并明白他错了。)——"蓝色的和圆的呢?"——"同样长(正确地指出这些集合)。"

最后是一些立即解决所有三个数量关系的受试者:

斯塔(7 岁 6 个月) "蓝色的模型还是蓝色的正方形?"——"蓝色模型的那个大些。"——"蓝色的和圆的。"——"同样。"

尼恩(8 岁 9 个月) "(B 或 BS)?"——"蓝色模型的那个,因为蓝色的模型有蓝色的正方形和蓝色的圆形。"——"(S 或 C)?"——"圆形的那个。"——"(C 或 B)?"——"同样。"——"(C 或 RC)?"——"圆形的那个,因为红色的圆形只是圆形的一半。"

鲍吴(9 岁 6 个月) "(B 或 BS)?"——"一个比另一个长些:蓝色的那个长些。"——"为什么?"——"因为它有所有的蓝颜色的。"——"那么圆形的和蓝色的呢?"——"同样。"——"为什么?"——"因为一个(C 中)有红色的和蓝色的圆形,另一个(B 中)有蓝色的圆形和蓝色的正方形。"——"红色的和蓝色的呢?"——"蓝色的那个长些。在这一个中,有圆形和正方形,但在另一个中,只有圆形。"

看来,包含的数量关系(Ⅰ)——它已经在第四章中研究过——是这三个问题中最难的一个。当然,问题Ⅲ最容易,因为它运用于两个不相连的类别。问题Ⅱ涉及两个相交类别的比较,它不比涉及包含的那个问题难(虽然我们一定得搞清,当儿童在比较 B 和 C 时,他确实是在将 BC+BS 同 BC+RC 作比较,而不是仅仅将 BS 相比于 RC!)。问题Ⅲ看来比较容易些,这可能是由于练习了问题(1)—(6)的结果,或者它可能同这一情况有关,即 BC 这个共同的部分同 B 和 C 这两个大的类别,而不仅仅是同 B 这一个类别有联系。

现在我们便转向问题(8),它是处理"所有的"和"有些"的。RC+BC+BS 的构造同第三章第 1 节的那个构造(除了所有的正方形都是蓝色的而有些圆形是红色的之外)是完全相同的。

换言之,第三章的那个构造本身就包含有内在于两个类别之相交的各种关系。然而,前面的那种相交是含蓄的,而现在的这个实验设计专门是为了使这种关系明显起来的。问题(1)—(7)为问题(8)打下了基础。问题在于,这种练习是否促进了有关的理解。事实上,结果完全是否定的。

科吴(5 岁 8 个月) "所有的正方形都是蓝色的?"——"是的。"——"所有蓝色的都是正方形?"——"不,因为也有圆形(正确)。"——"所有的圆形都是红色的?"——"是的(忘记了相交)。"——"所有红色的都是圆形?"——"是的(这是正确的回答,但却带来了错误的互反的含义)。"

费尔(6 岁 5 个月) "所有的正方形都是蓝色的?"——"是的。"——"所有蓝

色的都是正方形?”——“是的(错误)。”——“所有的圆形都是红色的?”——“不,因为也有蓝色的圆形。”——“所有红色的都是圆形?”——“是的(正确)。”——“所有蓝色的都是正方形?”——“是的(错误)。”——“所有的正方形都是蓝色的?”——“是的(正确)。”

沃格(6岁8个月)　“所有的圆形都是蓝的?”——“不(错误)。”——“所有蓝色的都是圆形?”——“不(错误)。”——“所有红色的都是圆形?”——“不(错误)。”——“为什么?”——(指了指蓝色的圆形。)

马尔(7岁2个月)　“所有的正方形都是蓝色的?”——“是的(正确)。”——“所有蓝色的都是正方形?”——“不,因为有圆形和正方形(正确)。”——“所有红色的都是圆形?”——“不,因为有些是像这样的(蓝色的圆形)。”——“所有的圆形都是红色的?”——“不,因为它们有些是蓝色的(正确)。”

赫斯(7岁5个月)　“所有蓝色的都是正方形?”——“不,也有蓝色的圆形(正确)。”——“所有蓝色的都是圆形?”——“不,因为有些是红色的圆形(这种颠倒乃是一种典型的将问题误解为‘所有蓝色的是所有的圆形?’的方式)。”——“所有的圆形都是红色的?”——“不(正确,但相同的误解方式仍然出现)。”

戴尔(7岁6个月)　“所有红色的都是圆形?”——“是的。”——“所有的圆形都是蓝色的?”——“不,因为也有正方形(参见赫斯)。”——“所有的圆形都是红色的?”——“是的。”——“所有的?”——“是的(忘记了 BC 这个相交)。”

赵吴(7岁10个月)　“所有蓝色的都是正方形?”——“不。”——“所有的圆形都是红色的?”——“不。”——“所有红色的都是圆形?”——“不,因为也有蓝色的圆形。”

在这里,我们看到了与第三章相同的回答。我们发现,同一个受试者对于同一类型的不同问题常常给予时而正确时而错误的回答。这种变化可能是由于这些集合的图形的特性(例如,红色成分和蓝色成分之间可能比正方形和圆形之间的对比要清晰些)。也可能是由于这一个事实,即儿童有时候从内涵方面去考虑谓语(“所有的 A 都有 b 的特性”,在这里,b=是红色的特性,等等),有时候则从外延方面去考虑谓语(“所有的 A 都是 B”=“是有些 B”)。内涵的观点有利于问题的解决,而外延的观点则使确定谓语之数量关系的问题更困难些。然而,如果从外延的角度去推论,那就会出现与第三章的那个型式相同的错误。对于“所有的 B 都是 A?”这个问题的回答通常是正确的,因为“所有的 B 是所有的 A”这一错误的解释仍然会导致正确的答案。当问题采用“所有的 A 都是 B?”这个形式时,同样的错误解释就会导致错误的答复。当马尔和赵吴因为也有些蓝色的圆形而否认所有红色的模型都是圆形时,其原因正在于此。

然而,目前这个实验中的新的东西是,我们发现了对于“所有的 B 都是 A?(其中 $A<B$)”这种类型的问题所犯的相同的错误。其原因很可能是,所有前面的[(1)—(7)]那些问题都倾向于产生相交的类别。例如,赫斯否认所有蓝色的模型都是圆形,这不是

因为存在一些蓝色正方形，而是"因为存在一些红色圆形"。戴尔否认所有的圆形都是蓝色的，不是因为存在着红色的圆形，而是"因为也有(蓝色)正方形"(在这两个例子中，儿童所说的话相当于"所有的 B 是非 A，因为存在着一些 A_2 和非 B"，而不是"……因为存在着有些 B 和 A")。

在第Ⅲ阶段，无论回答还是解释，都是正确的：

赛益(7 岁) "所有蓝色的都是正方形？"——"不，有圆形和正方形。"——"所有的圆形都是蓝色的？"——"不，它们是红的和蓝的。"——"所有的蓝的都是圆形？"——"不都是。"——"所有的圆形都是红色的？"——"不，只有一堆(BC)是。"——"所有红色的都是圆形？"——"是的。"——"所有的正方形都是蓝色的？"——"是的。"

卡尔(7 岁 3 个月) "所有的正方形都是蓝色的？"——"是的。"——"所有蓝色的都是正方形？"——"不，还有些蓝色的圆形。"——"所有的圆形都是蓝色的？"——"不。"等等。

海益(7 岁 3 个月) "所有的正方形都是蓝色的？"——"是的。"——"所有蓝色的都是正方形？"——"不。"——"所有蓝色的都是圆形？"——"不。"——"所有的圆形都是红色的？"——"不，还有蓝色的圆形。"

格拉(8 岁 6 个月) "所有的正方形都是蓝色的？"——"是的，因为没有红色的正方形。"——"所有蓝色的都是正方形？"——"不，还有圆形。"——"所有的圆形都是蓝色的？"——"不，还有红色的。"——"所有蓝色的都是圆形？"——"不，也有正方形。"——"所有红色的都是圆形？"——"是的。"

这里有一种强烈的暗示，即问题之所以易于解决，是因为前面已经有过相交方面的练习。事实上，这和儿童由于未对谓语作错误的数量限定而能正确地使用"所有的"和"有些"有着密切的联系。不过我们一定得记住，在儿童能够这么做之前，对于相交的强调则倾向于增加了"所有的 B 是 A？"(当 $A<B$ 时)这类问题的困难。现在我们知道，对于"所有的"和"有些"的使用，依赖于对于包含和一般的附加分类的正确的鉴别。因此，这仍然是倍增格式之构造和附加格式之构造之间的密切联系的又一个例子。

9. 结　论

本章揭示了一些其他章节所没有提到的东西，这就是，附加运算和倍增运算在其每一个阶段的发展上都是平行的和相互联系的。

在第一节中我们提出，倍增结构或矩阵是否直接起源于图形的结构；是否不受图形结构的影响；是否像附加结构通过非图形集合的方式而从图形集合中产生的那样，通过一些连续的阶段而从图形结构发展起来的。

本章的研究结果使我们可以作如下回答:首先,倍增结构并非直接得之于相应的图形构造。因为在第1和第3节中我们发现,矩阵测验的感知的解决办法和运算的解决办法之间是不连贯的。此外,虽然这两种办法有着很大的差别,但它们导致了完全相同的结果。其次,它们并不依赖于后来才出现的两者之间的协调,而这种协调仅仅是叠加于那些导源于图形构造之早期结构之上的。因为在第4节和第5节中我们表明,自发的倍增分类开始于图形的构造,然后便逐步发展,这同附加分类的情况是完全相同的。

这样,唯一剩下的便是第三种可能性。在第6和第8节中,我们能够进一步证实这个可能性。对于相交(第6节)的研究,对于在研究相交过程中出现的附加和倍增之关系的研究以及倍增类别方面"所有的"和"有些"的研究,都显示了附加运算结构和倍增运算结构两者的密切联系。那种认为附加结构建立在先,然后附加结构的概括便产生两维或数维之倍增结构的想法是错误的。事实上。我们在每一个水平上都发现儿童在使用某种分类的形式(尽管他们所使用的分类形式是很不完全的),而且每一种形式都可以同时适用于几个标准,也可以仅仅运用于一个标准。在前一种情况下,那就是倍增结构,而后一种情况则是附加结构,但在这两者之间并没有根本的对立。

这两个结构的发展,经历了一些平行的阶段。它们之间紧密地互相依赖,这表明尽管在图形性和复杂性方面不同,但它们构成了一个单一的运算组织。当研究附加运算和倍增运算的顺序关系时(第九章和第十章),我们将得出相同的结论。事实上,在顺序系统和分类系统之间,我们也发现了一种发生的联系。我们认为,这种发生的联系构成了支持智慧运算概念的一个最重要的概念。

第七章 事后认识和事前预见的机动性①

在第Ⅲ阶段运算的分类和第Ⅰ阶段形象或图形的分类之间的主要差别是，儿童越成熟，他们处理那些成分的方式也越机动。无论对于思想上正确观察事物相互关系的能力还是实际安排和调整物体的能力来说，情况都是如此。不管是因注意到开始时没有考虑到的某种特性，还是由于实验者在现存的类别上增加一个附加的成分，只要能够改变标准，他们就显示出事后认识的机动性。当在实际进行安排之前能够从思想上预见一个类别，特别是在不通过明显的尝试与错误而能够从许多可能的选择中挑选最佳分类时，他们就表现出事前预见的机动性。

在第Ⅰ阶段(图形的集合)，受试者没有真正预见那种分类，而是在逐步地构造那个集合的过程中形成那个类别的。一旦集合构造成功，他就局限于它，这大体上就是所谓"固执"的意思。他缺乏改变标准并替换一种构造的必要的事后认识的机动性。相反，在第Ⅲ阶段(运算的分类)，在受试者有一个预见的格式之前，他决不行动。与此同时，他非常容易改变标准，或将原先的构造合并到一个较大的或更为概括的集合中去。

我们完全有理由假定，这种事后认识和事先预见的机动性，为作为运算可逆性之特征的那些根本结构的完善提供了心理的机制。事实上，我们完全可以预期，在运算结构(它们始于动作的不可逆性而终于逻辑的可逆性)发展的每一个阶段中，必须有一种机动性方面的相应的发展。这应该包括一些中介的阶段，在这些中介的阶段中，结构开始时是"不完全的可逆"，然后则是"准可逆"。本章的目的就是分析这种双重的机动性。

然而，如果对于附加结构和倍增结构之发展缺乏足够的认识，就不容易进行这种分析。因为我们将努力有意识地激起一些标准的变化(如引进一个新的成分)，而且这个过程很容易导致两种乃至数种分类，或者造成一些相当复杂的部分附加、部分倍增的结构。既然我们已经很好地理解了这两种主要的结构，那么也就具备了研究分类中机动性之发展的极好的条件。

第一个研究主要是事后认识方面的。第二个则主要是事前预见。对实验的器材可以作若干种分类，而这些做出的分类就放在受试者面前。我们想发现受试者在安排过程中记住这些标准的程度，以及事先预见这些安排的程度。我们尤其想搞清这种预见是如何同前几章中已经发现的那几种水平联系起来的。有关的那些结构既不是纯粹的

---

① 得到万·邦、G. 诺尔丁、M. C. 雷蒙和 I. 塔波尼耶(Taponier)的协助。

附加结构，也不是纯粹的倍增结构。

最后，在第八章中，我们将对儿童就见得着的呈现出来的材料所做的分类，同他们在其感知受到动觉和触觉方面的限制时的分类加以比较。这两章将结束我们对于分类行为的研究。

然而，事后认识和事前预见对于本书后面将要研究的那些结构——简单的序列和序列的倍增——也是主要的。所以，当我们转而研究这些结构的完善时（第九章和第十章），还要回到这个问题上来。到那时，我们还是能够运用一些类似的方法：要求受试者预见这些（限制在触觉感知的范围内的）序列，并在最初的序列完成之后引进一些附加的成分。

1. 由增加新成分而引起的重新分类

所有的认识结构（以及表达感情的过程）都只具有暂时的意义。如果两个结构之间有着充分的联系（如相似、空间或时间方面接近等），那么，任何结构（不论它是感觉的或是知觉的）都有一种影响继之而来的那些结构的倾向。我们可以将它看作是"固执"，给后继者保留差异（这里可能有对照的效果，也可能有认同的效果），各种各样的（带有或不带有预见的）互换或改变以及概括的一些事例。在感觉的和感知-运动的水平上，这些效果仅限于一个时间的方向，例如，感觉受到以前的那些感觉的修正，但它却不能反过来改变以前的那些感觉。然而，一旦我们脱离仅仅的互换或感知-运动的转变，并考虑导入运算水平上理性概括的许多中间的行为形式，那么我们就可以发现一些新的可能性，其主要特征为时间方向的逆行。这个最简单的概括方法就是将新的东西同化到旧的东西中去。后来，同化便与事后认识结合起来，这是一个能动的过程，而且最终将导致作为一个整体的那个系统的改变，无论是新的或是旧的，都要继续进行前者向后者的同化。因此，先前的概念和先前的信息都要按照后来同化进来的加以修正。于是就可能有许多不同的结合。最为稳定的结合是：重新做出的安排并不摒弃先前那个结构的部分或全部，而是要将它同一个包括有新、旧这两个子系统的新的结构结合起来。

如果不分析这些时间的效果，我们就不能完成那些从比较简单的感觉的和形象的结构中发展出来的运算的结构。我们想要知道，当新的成分被结合进去时，原先已有的那些结构究竟在什么程度上得到保留或修正，对于这一点来说，情况尤其重要。

我们采用了下列一些方法：

Ⅰ.（1）（器材 A）：限制在两个盒子中进行分类，每一次对分类作必要的改变时就增加一些新的成分。（0）最初的成分是一些偏绿色圆形和十字形，它们的大小相同，而且都是由平滑的卡片做成。（1）首先增加的是黄色的星（它们大小相同，而且用同样的卡片做成）。（2）第二次增加的是两个大菱形和半圆形，它们是紫红色而不是绿色。

(3)第三次增加的是瓦楞纸板做的一些三角形和椭圆形。

Ⅱ.(2)(器材 B):虽然分类仍然限制于两个盒子,但无须重作安排。(0)同一颜色的一些大的和小的圆形。(1)增加不同颜色的大的和小的圆形。(2)增加一些与前面那两个尺寸和颜色相同的正方形。(3)增加一些两种尺寸的正方形和圆形,但它们的边呈锯齿状。

Ⅲ.(器材 B):连续地一次提供一些部分,以便使儿童在增加一些新成分时在这两个盒子内进行安排。

Ⅳ.(器材 A 和 B):要求儿童在每次增加新成分时给所有可能的类别命名(不使用任何盒子)。

Ⅰ和Ⅳ易于重复分类的变化;而Ⅱ和Ⅲ则易于保持第一种分类。我们对每一种方法都做了试验,其理由是,综合所有这些方法有助于说明儿童自然的倾向是什么,因为他可能会忘记前面的分类并根据最后增加的成分重新安排所有的东西,也可能坚持原先的分类。这些就是下面那些例子想要说明的主要的东西。

最先的几个是 3 岁和 4 岁儿童的例子:

路德(3 岁 6 个月) (Ⅱ,器材 B)他将大的蓝正方形放进Ⅰ,小的蓝正方形,大的橙色圆形和某些较大的蓝正方形放进Ⅱ。然后他将所有的都拿出来,将小正方形和圆形与有些大正方形一起放进Ⅰ(大正方形放在最下面),将有些大正方形与小圆形一起放进Ⅱ。当增加了新的颜色时,他还是将小的成分放在一起(放进Ⅰ),将大的成分放在一起(放进Ⅰ的其他成分的下面,也放进Ⅱ)。

铁尔(3 岁 6 个月) (Ⅱ,器材 B)在经过几次尝试后,他将蓝色的成分放进Ⅰ,红色的放进Ⅱ。虽然实验者要求将这些成分分成大的和小的,但他还是将它们分成红的和蓝的。于是实验者开始按大小分类,他正确地继续了下去,也完成了将那些成分按锯齿形的边和非锯齿形边的分类。但是,如果任他自己分类并增加一些新成分时,他还是像开始时做的那样,仅仅按颜色将它们分类。

阿格(4 岁 5 个月) (Ⅱ,器材 B)将大的红色圆形放进Ⅰ,小的红色圆形放进Ⅱ,这些乃是首先呈现给他的那些成分。增加了蓝色圆形之后,他将大的蓝色圆形与大的红色圆形一起放进Ⅰ,并且说:“这个大的放到这里。这些小的(蓝圆形),它们放到哪里呢?我得将这些蓝色的放到这里(Ⅰ),所以那些一定也放到那里。”这等于在未作任何重新安排的情况下改变了标准,它意味着这种分类是矛盾的(大小蓝色圆形和大的红色圆形放进Ⅰ,而小的红色圆形放进Ⅱ)。增加锯齿边的圆形:“这些是星,放到那里(Ⅱ)好些。我将像这样的那些同小的放在一起(一个新的矛盾)。”——“仔细看。”——(他改变了它们)——“那么,我得将这些蓝色的(大的和小的,锯齿边的和非锯齿边的)放到那里(Ⅰ)。这里(Ⅰ),它们都是蓝色的,那里(Ⅱ),它们都是红色的。”——(增加锯齿边的正方形和小圆形。他重新安排了所有的成分,一开始安排的是那些新的成分。)“这些是星,而这些(锯齿边的正方形),它

们是什么?”(他将它们都放进Ⅰ和Ⅱ,这种方式更加表明了他的标准的混乱;然后他加以简化,对于他来说,这意味着回复到将蓝色的成分放进Ⅰ,红色成分放进Ⅱ的两分法。)——“你能换一种方法吗?”(将所有的东西放回到桌子上)——“我可以将红色的放到这里(Ⅰ),将蓝色的放到那里(Ⅱ)。”——“还有别的办法吗?”——“没有了。”

普里姆(4岁) 一开始将大的红色圆形放进Ⅰ,小的红色圆形放进Ⅱ。当蓝色的成分增加时,他保持了这个标准:“这些是大的(Ⅰ:红色的和蓝色的),这些是小的(Ⅱ:红色的和蓝色的)。”增加大的和小的锯齿边的圆形;他想将这些按大小分,但后来还是不再仅仅按大小来划分。经过几次重新安排之后,他倾向于那种将锯齿边的成分放进(Ⅰ),将其他的放进(Ⅱ)的两分法,但也有些例外。“这样行吗?”——“是的,相当好。”——“能换一种方法吗?”他又一次将所有的分成两堆,但还是改变了他的标准,并在大小和边的类型之间动摇。最后,他放弃了按照这些成分的特性分类的试图,只是交替地将它们放进那两个盒子之中。

我们可以对这些反应作如下总结:

(1) 第一个特征是“固执”。儿童开始时按大小分类,并继续用这个标准;新成分的增加并没有引起另一种两分法或按照颜色的再划分(路德)。如果他一开始按颜色分类,那么他便继续按颜色来划分。如果他有一个遵循的榜样,那么他就能根据另一个标准构造两个集合;但是如果任他行动,他还是不理会这些标准。

(2) 当“固执”不再发生作用,那么整体的时间作用也就停止。换言之,受试者完全忘记了旧的标准,并采用新的标准。可能会发生下列两种情况。有时候,新的标准附加在旧的上面,这样就出现矛盾。于是我们发现阿格开始时将圆形分成大的和小的;然后,在他处理蓝色的圆形时便发生了变化:先将大的蓝色圆形同大的红色圆形放到一起,这相当正确,接着又将小的蓝色圆形同大的放在一起。在这里,颜色的标准代替了大小的标准。另一种情况是完全用新的标准来接替。当阿格最后决定将这些成分划分为红色的和蓝色的时,他提供了这个方面的一个好例子。

(3) 除了“固执”和遗忘之外,我们可以发现一种混合的标准,但这种混合远不是将新的成分同先前已有的那些结构和谐起来,而是一种新旧成分的任意的混合。其基础是一些不能用“所有的”和“有些”来加以分析的相当不固定的附属关系。儿童仅仅说,“这些很配”。例如,阿格在将普通的圆形分成红的和蓝的之后,把(蓝色和红色的)大的锯齿边的圆形放到小的红色圆形中去,并且还说,“它们放到这儿好些”。普里姆归并锯齿边的成分的方式也暗示了同样的混乱,最后他完全放弃了这个标准。

这些结合令人难以理解。它们产生于这么一个事实,即3—4岁的儿童并没有努力将一个既存集合“所有的”成分的特性扩大到新成分那里。他只是寻找这个成分同已经存在于一个集合中的那些成分中的一个成分之间的某种关系,这一个成分成了全权代表(参见第六章第7节)。他发现的那个关系可能同原先的两分法不一致,而且可能引

进一个新的标准，这使我们又回到第(2)种反应上去。

于是我们可以认为，(3)并不是一种新的反应类型，而是“固执”(1)和遗忘(2)的一种混合。这些小儿童的作为与他们构造队列时的作为(参见第一章第2节)是完全相同的：“固执”和(或)变换标准。这不是追溯(或事后认识)，而是一个方向上的同化，新旧成分的混合，或者是向新成分的顺化。在存在着同化的地方，也存在着一种对于出现同化的那个格式的构造不充分的顺化；在顺化的地方，没有出现对于先前格式的同化。无论是哪一种情况，新的格式都不具有追溯的作用。

现在我们便转向得自于5岁和6岁儿童的一些例子。

卡尔(5岁6个月)　这里开始有连续的组织。将红色的圆形给她，她将它们分为大的(Ⅰ)和小的(Ⅱ)。当增加了蓝色的圆形时，她将红色的圆形一起放进Ⅰ，将蓝色的圆形一起放进Ⅱ。然后增加锯齿边的圆形：“嗨！这些是星！”她先拿起这些小的锯齿边的圆形，并根据它们的颜色分放到两个既有的集合中去。然后她将所有的都拿出来，并构造成一种矩阵(出过一次错误)：锯齿边的圆形在右边，无锯齿的在左边，大圆形在上边，小的在下边(现在忽视了颜色)。增加锯齿边的和无锯齿边的正方形：“啊！这就要长了！”她先将它们在既有的这个系统内分成一些子集。但是她感到为难，最后她采用一种新的两分法：“我把所有的这些星星放到那里(Ⅰ中，其中包含有正方形)，将圆形放到那里(Ⅱ)。”然后她再根据颜色重分，这样就构成第二个矩阵。她实际上正确地构成了一个倍增分类，不过是根据经验来构成的，丝毫也没有预见到这个结果。

盖特(5岁8个月)　最后构成的不过是一系列的连续的分化，但是他却能够正确地将新成分结合到既存的安排中去。红色的圆形分成大的和小的。当增加蓝色的圆形时，他又将它们分成大的和小的：“这样，我分好了。”他将所有大的成分一起放进Ⅰ，小成分放进Ⅱ：“最大的在这个地方，小的在另一个地方。”增加锯齿边的圆形：“这些刺人！我还是同样的分法(继续按大小分类)：大的放进这个盒子，小的放到另一个盒子。”增加锯齿边的和无锯齿边的正方形：“又是不一样的！”他又将它们分成大的和小的，并开始将那两个主要的集合分成一些子集。但是，不存在任何全面计划的迹象，也没有空间的对称性。大的锯齿边的红色正方形摆成一堆，大的锯齿边的红色圆形摆成另一堆，大的锯齿边的蓝色正方形又一堆，等等。

沙布(5岁8个月)　先将红色圆形分成大的和小的。当增加了蓝色圆形时，她构成了两个连续的矩阵，两个都是呈对角排列：蓝色成分在上，红色成分在下；小圆形呈对角，大圆形呈另一对角；然后，蓝色成分在左，红色成分在右，并没有改变按大小的排列。接着给她带锯齿边的成分，沙布用这些成分构成了一个真正的矩阵：小成分在上，大成分在下，红的在左，蓝的在右。但当她试图将无锯齿边的圆形合并到这个矩阵中时，她将无锯齿边的蓝色的同锯齿边的红色的放到一起，将无锯齿边的红色的同有锯齿边的蓝色的放到一起。然后她纠正了错误，而且摆成了一

个矩阵。就颜色这一点来讲，这个矩阵是正确的，尽管在这四个类别中，每一个类别都有锯齿边的和无锯齿边的成分，而且她忽视了无锯齿边圆形的大小。最后，增加了无锯齿边和有锯齿边的正方形。她先是任意地放这些成分，混淆了标准；然后，她开始作一个新的矩阵分类。在这个分类中，几乎两个标准都被忽略：圆形在上，正方形在下，红的在左，蓝的在右。

范恩(5 岁 8 个月) 先将红色圆形分成大的和小的。当增加了蓝色圆形时，他将这些成分分成蓝色的(Ⅰ)和红色的(Ⅱ)，没有考虑到大小。当增加了锯齿边的圆形时，他将无锯齿边的大的蓝色圆形放进Ⅰ的左边，将大的锯齿边的蓝色圆形放在Ⅰ的右边，小的锯齿边的蓝色圆形堆在靠近盒子Ⅰ的上边，小的无锯齿边的堆在左边。红色圆形以同样的安排方式放进盒子Ⅱ。接着增加了无锯齿边的和有锯齿边的正方形，范恩还是在Ⅰ中构造了一系列新的再划分，在盒子Ⅱ中也是照Ⅰ的方式安排。但快要结束时，他感到疲倦，只是将这些成分任意地堆放。

比依(5 岁 10 个月) (过程Ⅰ，器材 A)将红色的圆形分成大的和小的。增加了蓝色圆形，他将蓝的放进Ⅰ，红的放进Ⅱ，其中大的圆形在上面，小的在下面(尽管其起因是直觉，但这是一个矩阵)。增加了正方形，他在Ⅰ和Ⅱ中作了再划分。当增加了用瓦楞纸板做的成分时，他将它们按照形状和颜色对应地放到非瓦楞纸板做的那些成分的旁边(有一些错误，但他纠正了)。也作了按照大小的再划分，但在盒子Ⅰ和盒子Ⅱ之间并无对称性。

雷克(5 岁 10 个月) (过程Ⅱ，器材 B)依据三个标准成功地构造了一种形式：大的成分放进Ⅰ，其中红的在上，蓝的在下，圆形在左，正方形在右；小的成分以同样的方式放进Ⅱ。但他对过程Ⅲ感到困难(这涉及那些能够加以分隔以布局连续两分法的盒子的使用)，因为他不能形成一个全面的计划。这证明了他最初成功的经验性。

尼德(6 岁 1 个月) (过程Ⅱ，器材 B)将红色圆形分成大的和小的。当增加了蓝色圆形时，他将红色圆形放进Ⅰ，蓝色的放进Ⅱ，其中大的圆形在上边，小的在下边。接着增加了锯齿边的圆形，他对应地将它们归入先前的分类：红色的圆形在左，蓝色的在右，大的锯齿边的圆形在上，大的无锯齿的在下。到现在为止，这个矩阵是正确的，但对称性是不完全的。因为，所有的小圆形都集中在大的无锯齿边的圆形附近，而锯齿边的紧靠在上面，无锯齿边的紧靠在下边。当增加无锯齿边的和锯齿边的正方形时，尼德开始了一个全新的分类。他仔细地划分了一些子集，然后对这些子集作了安排，其安排的方式近似于一个四对成分组成的矩阵：大的对小的，红的对蓝的，锯齿边的对无锯齿边的，正方形对圆形。从空间上来看，其形式似乎是两个主要的集合，每一个主要的集合再分为四个方面，呈现了三个维度。底层只有大的成分，这样，通过将对应的小的成分放在上面，他就能够纵向地显示第四个维度。但是，对称性的缺乏损坏了这个安排的美感：构成盒子Ⅰ的上半部分的乃

是构成盒子Ⅱ的下半部分的，无锯齿的和有锯齿的对角地呈现在盒子Ⅰ中，而在盒子Ⅱ里却没有。换言之，这个分类是完善的，但作为一个整体来讲，却缺乏协调。

米尔(6岁2个月) 将红色圆形分成大的和小的。当增加了蓝色圆形时，她将圆形分为红的和蓝的，并没有考虑大小。然后增加了锯齿边的圆形，她将红色圆形放进Ⅰ，它们被分成无锯齿边的对有锯齿边的，以及大的对小的这些子集。她将蓝色圆形放进Ⅱ，未对它们再分。最后增加了正方形，她将所有红色成分放进Ⅰ，所有蓝色的放进Ⅱ，其中所有不同种类的都混合到了一起。

贺格(6岁4个月) 先将红色圆形分成大的和小的。当增加了蓝色圆形时，他将所有的圆形分成红的和蓝的。当增加了锯齿边的圆形时，他还是坚持了这个简单的两分法。但是，当所有的正方形都加进来时，他说"哟！这下子我有这么多，这真是不好办。"然而，他只是将蓝色成分放进Ⅰ，红色放进Ⅱ，未作进一步的分化。"你能换一种方法吗?"——"不，我不能。"——"你看这样如何(将两个锯齿边的成分放到一起)?"——"不，这样不行；(是的)我可以将这些小星放到这里。"他试了一下，但感到困扰，最后，他构成了两个没有再作划分的大的类别：大的成分对小的成分。

杰克(6岁7个月) 首先将红色圆形分成大的和小的；当增加了蓝色圆形时，他构成了一个矩阵。当增加了锯齿边的圆形时，他将大的分离了出来，并将它们分成红的(Ⅰ)和蓝的(Ⅱ)。他将相同颜色的大的无锯齿边的圆形放到这些模型的正下方，这就造成了一个新的矩阵。但当他继而加上小圆形时(他放在大的上面以形成一个纵向的第三维度)，他将小的锯齿边的圆形放到大的无锯齿边的上面，将小的无锯齿边的圆形放到大的锯齿边的上面。当增加了正方形时，他先将这些成分分成正方形和圆形，以及无锯齿边的和锯齿边的。但在他处理颜色和大小时，他毫无计划地造成了一系列的无对称性的再划分，这样，在结束时他做出了几个新的转换。

皮依(6岁8个月) 先将红色圆形分成大的和小的。一旦加上了蓝色圆形时，他构造了一个红对蓝的两分法，并一直将它保持到结束，毫不理会任何进一步的差别。在他第一次见了锯齿边的圆形时，他的确作过这样的评论："哦！这真有意思：像星！"但他还是将它们同其他的混合到一起。

凯克(6岁10个月) 除了自始至终地保持了大对小的两分法之外，其他的都做了改变。在试验过程Ⅳ时(要求他在每次增加新成分时说出不同的可能性，不使用盒子)，他依次在下列两分法的基础上划分了这些成分：圆形—正方形，蓝色的—红色的，大的—小的。但他始终没有作任何的再划分。

我们在5岁或6岁受试者那里所观察到的行为同3岁或4岁受试者的行为有着很大的差别。"固执"和遗忘都要少些。换言之，在先前没有时间作用或仅仅有向前作用(forward effects)的地方，现在可以发现相当多的事后认识的迹象。在这些儿童中，许

多人每次都仔细考虑了所有的成分，并努力将新成分同既存的系统一致起来：

(1) 首先，很少有真正意义上的"固执"。在 3 岁或 4 岁时，儿童往往不能自动地改变他们的标准，甚至在提示换一种方法的情况下，他们也不改变。对于新的划分，我们必须得先给他们开一个头。现在我们看到，虽然他们坚持最初的标准，但他们还增加一些再划分以照顾那些新的维度。真正的"固执"意指受试者完全不能看到新的可能性，或者由于不能构造另一种两分法而不理会这些可能性。我们经常可以看到这样的受试者——他能够构造一些不同的两分法，但只要最初的划分较好，他仍然会坚持它。不过，这样的坚持事实上常常会表现出"固执"。盖特对于最初的(大对小的)两分法一直坚持到最后增加了正方形的时候，只是到了这个时候，他才试图重分；而他的重新划分也不是非常成功的(对称性很不完善等等)。我们可以正确地断定，他的确难以摆脱最初的那个分类的影响。米尔虽然从大小转变为颜色，但她一直将这种两分法坚持到最后；在这里，她试用了对于颜色和大小的再划分，然而当新的维度出现时她又放弃了它。这个事实再次表明，对于她的这个事例来说，"固执"还是强于追溯(或事后认识)。皮依和凯克是坚持第一种或第二种两分法而不能进行再分的另两位受试者，但凯克向我们表明，他至少能够考虑一些其他的方法。

(2) 忘记第一个标准(或在面临一些新的可能性时完全不理会它们)比"固执"更为普遍。不过，同 3 岁或 4 岁的受试者相比较，它出现的频率还是要小些。我们开始发现，一旦我们引进第二种差别，它就很少出现：范恩和皮依乃是两个恰当的例子。米尔和贺格是在面临不同颜色时忽略大小的另两位受试者，但他们最终的确还是回到了第一个标准上来。然而，更为普遍的是，当出现了第三个和第四个标准时，忘记了第一个和第二个标准。

(3) 我们还是发现了一些性质矛盾的混合的集合，但它们出现的频率却越来越小。例如，沙布构造了一个锯齿边成分的矩阵(红色的加蓝色的，小的加大的)，后来，当她试图将无锯齿边的成分加上去时，她转换了颜色。在 6 岁时，这种类型的反应似乎便消失了。

(4) 这个阶段之新的和重要的方面，是将新的成分同既存的系统一致起来的试图。表明这种事后认识的最简单的方式是，受试者通过不对称地拿取各种出现的成分，而将原先的每一个集合分化为子集(参见盖特和米尔)。

(5) 稍微更进步一些的形式，可以从那些没有取得成功的对原先的集合加以重分以便使两个盒子对称的试图中看到。受试者常常满足于部分的对称性，而它并不能包括作为一个整体的那个系统(参见范恩结束时的情况以及比依、尼德和杰克)。

(6) 当对称性获得时，这种安排便呈现真正的矩阵形式。这样的安排是通过在新标准的基础上对既存系统作重新划分来解决问题的。但我们应该强调，在这个阶段上，儿童是在他排列的过程中构成一个矩阵的。到目前为止，在他开始组合这些材料之前，他并没有构造出一个预见的格式。我们所举的每一个例子都是对称地加以安排的连续

再分的事例(参见卡尔、沙布、尼德、杰克开始时的情况)。当达到两个以上的标准时,我们的多数受试者便又退回到先前那些反应的一个中去了。

(7) 然而,我们的确偶尔发现了一些其基础为三个(雷克)甚或四个(尼德)标准的型式。甚至在现在,我们有时还是要通过过程Ⅲ(雷克)或对称性的获得(尼德)的试验来发现这些构造之经验的特征。

无论是简单的二对二的矩阵或是基于两个以上标准的型式,它们都比在第六章的那些实验出现得早些。我们应该指出,现在的这个过程(它涉及连续的附加)自然更容易引起矩阵的构造而不是一些集合的同时呈现。如果所有的成分一起呈现,受试者就不得不在同时考虑所有可能的两分法,如果没有一个预见的格式,受试者就不能这么做。但是,如果这些两分法连续地出现,那么,受试者就能够通过处理一个个出现的每一种分化来模仿运算的倍增。

然而,这些结果的确清楚地表明,存在一个其影响增大了的追溯的过程。我们从那些在引进了新成分以后所做的各种各样的重新安排看到了这个过程。

最后我们便来看看第Ⅲ阶段(7—8 岁)的那些反应,这个阶段既有事前预见,又有事后认识。

斯特(7 岁 1 个月) 将红色圆形分成大的和小的。当增加了蓝色圆形时,他将红色和蓝色的圆形再分为大的和小的(形成一个矩阵)。增加了锯齿边的圆形后,他将大的和小的圆形分成锯齿边的和无锯齿边的,放进盒子Ⅰ。对于盒子Ⅱ,他也作同样的处理,这中间有一次后来纠正了的转换,这样就造成了一个三维度的矩阵。增加了正方形后,他根据大小和颜色将无锯齿边的正方形放进盒子Ⅰ,并以同样的方式将锯齿边的正方形放进盒子Ⅱ,形成一个以三个标准为基础的型式。然后他将颜色和大小对应的正方形放到上面,从而使他的安排增加了第四个维度。

巴尔(7 岁 6 个月) 将红色正方形分成大的和小的,在增加了蓝色圆形后,他根据颜色来重新划分这两个类别。当增加了锯齿边的圆形时,他继续将它们分成大的圆形和小的圆形,但将锯齿形的集中在盒子Ⅰ的一端,将红色的放在上面,蓝色的放在下面,将大的无锯齿边的圆形放到盒子Ⅰ的另一端,小圆形放进盒子Ⅱ,其安排方式同盒子Ⅰ完全一样(这样就造成一个以三个标准为基础的型式)。当增加了正方形时,他保持了这个结构,只是将每一个既存的子类一分为二(正方形和圆形),形成了一个以四个标准为基础的型式。

古尔(8 岁) 开始时也是将红色圆形分为大的(Ⅰ)和小的(Ⅱ),然后将这两个集合再分为红的和蓝的;增加了锯齿边的圆形后,她放弃了基于颜色的划分,将大的圆形放进盒子Ⅰ,其中无锯齿边的在上,有锯齿边的在下;对于小圆形也在盒子Ⅱ中作相同的安排。当增加了正方形时,她将大的成分再分为无锯齿边的和有锯齿边的正方形以及无锯齿边的和有锯齿边的圆形。对于小的成分她也作同样的处理,因此便造成基于三个标准的一个型式,其中颜色被忽略了。当要求她作另一

种分类时，她作了一些变换的分类，但其分类的基础都没有超过三个标准。

拉吴(8 岁 2 个月)　一开始分成大的圆形和小的圆形。增加了蓝色圆形后，他将这些成分分为红色和蓝色的圆形，并将它们再分为大的和小的；增加了锯齿边的圆形后，这个结构没有改变，蓝色的圆形分成无锯齿边的和有锯齿边的，放进盒子Ⅰ，然后根据大小再分，对于红色的圆形，以同样的方式放进盒子Ⅱ；增加了正方形之后，他将蓝色的成分划分为正方形和圆形，锯齿边的和无锯齿边的，大的和小的，对红色的成分也作如此处理，因而造成了一个基于四种标准的型式。

拜尔(8 岁 8 个月)　划分同吴拉在增加了正方形之前的划分相同。但现在，她不是构造一个基于四种标准的型式，而是根据三种可能的联合造成三个连续的二对二的矩阵：锯齿边的成分对无锯齿边的，正方形对圆形，红色的对蓝色的，其中大小作为一种联合的次级标准。

黑格(8 岁 9 个月)　始终保持了两个类别(大的和小的成分)的系统。然而，当要求她换一种方法来安排这些成分时，她构造了与拜尔相同的型式。

海恩(9 岁 3 个月)　在加上正方形之前，一直以颜色作为标准(伴随有不同的次级标准)，构造一些二对二的矩阵。增加了正方形之后，仍保持了原先的结构，但将那些类别再分为正方形对圆形，然后又分为锯齿边的对无锯齿边的。最后，他将蓝色成分放到红色的上面(因而形成一个以四种标准为基础的型式)。——“能换一种方法吗?”——“能，所有锯齿边的放在一边，其他的放到另一边。每一边得有三种(=三对特性)。这样就太多了(他造成了基于四种标准的另一个型式)。”

这些例子说明了许多第Ⅲ阶段持有的特征：

(1) 不存在“固执”。受试者(如黑格)有时一而再地构成相同的两分法。但我们可以认为，他只是想使这省力些，因为当要求他换一种方法时，他能毫无困难地构成三对或四对的矩阵。所以这种重复并不是由于那种与缺乏事后认识有联系的刻板性所造成的。

(2) 我们发现，受试者很少或没有忘记先前的标准。仅有的几个例外是短暂的分心或故意忽略的例子。例如古尔，他虽然构成了二对二和三对三的矩阵，但丝毫没有考虑颜色(这意味着将要造成三对三和四对四的矩阵)。

(3) 不存在矛盾的再划分，而且没有一种安排显示出缺乏对称性，而对称性之缺乏，同纯粹以经验为根据的方法是有联系的。

(4) 当我们增加成分时，受试者有两种处理这个新成分的方法。一种方法是，保持原先的结构不变，只是进一步地再作一次划分；另一种方法是，改变原先那些划分中的一种，甚或改变原先的主要的划分。巴尔乃是说明这种机动性的一个好例子；他始终保持了主要的划分(大对小)，但是将红色对蓝色的第一次划分改变为锯齿边的和无锯齿边的(将颜色保持为第三级的分类)；最后，当引进了第四个维度(正方形对圆形)时，他还是保持了这个分类，只是增加一个(第四级的)再划分。斯特则喜欢重新组合，他两次

改变主要的划分，并一再改变他的再划分。

(5) 构成不同的再划分的次序并不重要(因为关系是倍增的，它们是一系列的相交，而不是由包含关系所决定的一个固定的次序)，重要的是受试者是否努力将新、旧标准一致起来。或者说，他是否能由于采用一个标准而放弃另一个标准。我们在这里发现了追溯的结合(它表现了真正的倍增的概括)：第一组增加的成分几乎毫无例外地导致了一个二乘二的矩阵，而后来增加的那些或者导致三对三和四对四的矩阵($2\times2\times2$ 或 $2\times2\times2\times2$)，或者受试者仍然坚持 2 对 2 或 3 对 3 的分类，但这种坚持具有一个重要的不同之处，即他能够全部地改变他的那些标准。

(6) 逻辑的倍增(它涉及两个、三个或四个标准)包括预见的反应。从受试者的谈论中，可以清楚地看到一个运算的预见格式的存在。例如当海恩谈到在他的第一次的一分为二之后得引进三种再划分时说，"每边得有三种，这样就太多了"。这种倍增格式的预见性，常常是在要求受试者重新安排他的型式时通过他的机动性表现出来的(在第 3 节中，我们将对预见的程度单独进行研究)。

总之，这些结果生动地说明了从第Ⅰ阶段向第Ⅲ阶段发展的机制：在图形集合的水平上，既不存在事前预见，也没有事后认识，所以受试者不能将一些新的维度同既存的分类协调起来；每一个分类都受实验材料之图形的特性所支配，而且较早时的"固执"常常要影响它。随着儿童的发展，那些可能的重新安排也越来越多地呈现出系统的特征。之所以如此，是因为有事后认识和随后出现的事前预见。前者使新的同旧的结合起来，而后者则使分类的结构具有更大的机动性。

2. 标准的变化要求对既存分类作重新安排

在前面的实验中，我们是一个接一个地引进几个维度的。我们实际上是在要求更改既存的分类。虽然它可能就是进行各种组合的一个全新的基础，但它也可以采取进行新的再划分的形式。在下面的这个实验中(它同前面的实验有某种程度的相似)，从一开始就引进所有那些成分，我们允许受试者组成自己的分类形式，然后便问他是否能提出某种(甚至几种)其他的方法，这意味着要改变最初的标准。我们所使用的材料是相同的(正方形和圆形，红的和蓝的，大的和小的，但不再使用锯齿边的)，但是，从儿童的观点来看，这个问题是相当困难的。首先，通过一次引进一个可能的两分法(A_1 和 A_1'，然后是 A_2 和 A_2'，再后是 A_3 和 A_3'，等等)，我们实际上是在帮助儿童认识所要求的那种分类的倍增性；相反，当我们将所有的成分一起呈现出来时，他就不能立即明白它们究竟是符合一个倍增的交叉分类，还是适合一个附加的结构(它由连续的包含组成：$A<B<C$，等等)。其次，如果涉及的类别比较少，改变既存安排也就比较容易，问题的解决只需要增加一次新的再划分；目前所需要的乃是一个全新的安排，而它的做出是通

过使用一个新的标准或改变标准的等级次序，无论是哪种情况，问题都肯定是不同的。我们之所以认为它能够发现儿童如何对这个情境做出反应，其原因就在于此。通过考虑这两组资料，我们就可以比较有把握地确定，在第Ⅰ、第Ⅱ、第Ⅲ这三个阶段中，每一个阶段究竟有多少事后认识方面的机动性。为了达到这个目的，我们在向受试者提出改变开始时已经使用过的那三个标准（颜色、形状、大小）的要求之后，进而引进三个新的维度。为此，我们准备了许多很大和很小的模型（有些模型的中间有些洞），还有几个大的黄色正方形（它们同大的红色正方形和大的蓝色正方形相似）。

实验的过程可以概述如下：先向受试者显示一组主要的物体，它包括红色的和蓝色的正方形和圆形。它们都有两种尺寸：正方形的边长和圆形的直径分别为 25mm 和 50mm。首先，要求他对这些物体作口头的描述；然后要他按他认为是相配的加以分类；接着要求他利用两个大盒子将这些物体一分为二。虽然他可以在这两个盒子中作进一步的划分，但他并不是非做不可。我们继而要他作最多为三个类别的分类。最后，向某些受试者呈现尺寸为 13mm 或 75mm 的模型（也有一些 50mm 的黄色正方形以及上面有洞的许多模型，这在其他地方已经提到过）。

我们先看一看得自于 60 名五岁至八九岁受试者的结果。这个实验使用的是一套标准方面的问题①（向大约 40 名受试者询问了一些有较大变化的问题）。表ⅩⅧ是这些受试者所发现的标准的数目。

表ⅩⅧ 5—9 岁儿童的标准的数目

年 龄 （受试者人数）		5 (12) %	6 (17) %	7 (18) %	8—9 (13) %
标准：	0②	27	12	5	0
	1	46	12	11	0
	2	27	47	56	31
	3	0	29	28	69
	2 或 3	27	76	84	100

正像我们在前面已经解释过的那样，即使倍增的结构比第 1 节中的那个实验要出现得晚些，但还是有 75％的 6 岁儿童成功地运用了两个或三个标准，这比 7－8 岁儿童的运算水平要早些。一旦儿童能够按照两种或三种完全的两分法来划分这些相同的物体，那么他便能够进而按照一个倍增的格式来对它们作交叉分类。

不过我们并不想回到附加分类和倍增分类的发展上去。本章的目的是阐明解释这种发展之追溯的和预见的机动性的因素。上表提供了有关事后认识在这些不同的年龄时期究竟发挥了多大作用之明确的数量标志，因为它表明了受试者是否能够一次或数

① 当标准为颜色、形状和大小时，年幼儿童往往选择颜色和形状。对于大小这个标准的使用出现得较晚，即使当大小的差别相当大的时候，情况也是如此。

② 0 的意思是没有出现对于这些成分作完全两分的分类。

次改变他的两分法的基础。或者说，它表明了受试者作如此多的两分是否没有像他作第一次两分那样取得成功（这种情况在5岁儿童那里是相当普遍的）。然而，下面的关于质量的描述使我们对这个问题有了进一步的认识。我们想要知道儿童的追溯的机动性是否同预见的机动性有关，衡量前者的标志是他对既存集合进行重新安排的方式，后者则是他进行的最初的分类以及他在我们的要求下所做的那些两分的方式。

下面是第Ⅱ阶段（5—7岁）的几个例子。我们已经知道这样的儿童事后认识方面的机动性很小；我们想要搞清它同他们的预见能力有什么联系。

布拉（5岁） 一开始摆出的是表现了第Ⅰ阶段之典型特征的那种混合型式（或集合对象）：大的红色正方形和小的红色正方形放在一起以形成一个重复的型式。"你能将它们分成几堆吗？"他构造了五个小集合：大的红色正方形，小的红色正方形，小的红色圆形，小的蓝色正方形以及大、小蓝色圆形。给他那两个盒子后，他将所有的正方形放进一个盒子，还带有几个大、小两种蓝色圆形。红色圆形放进另一个盒子，还带有大、小两种蓝色圆形。"这些相配吗？"——"不（他从第一个盒子中拿出小的蓝色圆形并将它们放入第二个盒子）。"——"这些呢（大的蓝色圆形）？"——"它们得放到那里（他拿了第三个盒子）。"——"如果要你将所有的都放进两个盒子，怎么办？"——（他接着将所有蓝色成分放进第三个盒子，将红色的放进第二个。）

再次将所有的东西都混杂起来，并要求他作一个新的分类。他构造了许多小的集合：大的红色正方形，小的红色正方形和圆形，小的蓝色正方形，小的蓝色圆形，大的蓝色圆形。然后他将所有的红色成分放进第一个盒子，将蓝色的放进第二个。他并没有发现另一个标准。当增加了一个大的黄色正方形时，他将它单独放第一个盒子，而将所有其他的放进第二个。他还是无法改善他的安排。但是，当实验者将所有的正方形放进第一个盒子，将所有的圆形放进第二个盒子时，他接受了这种分配，"因为那里都是圆形，这里都是正方形"。

尼富（5岁） 先构成一些小集合，然后他将小正方形（红色的和蓝色的）放进盒子Ⅰ，将圆形分成大小两堆，放入盒子Ⅱ，将大的红色正方形放进盒子Ⅲ。再次将所有的成分加以混杂，并要求他将这些成分放进两个盒子之中。他将大的红色正方形和有些大的蓝色圆形放进盒子Ⅰ，将小的蓝色圆形和有些大的蓝色圆形放入盒子Ⅱ（这样，虽然集合Ⅰ只包含大的成分而集合Ⅱ只包含蓝色的成分，但这并不是两分法）。最后，他将所有的圆形放进盒子Ⅰ，所有的正方形放进盒子Ⅱ。再将这些成分混杂，并要求作一个新的分类。尼富开始于一些小的集合，其基础是形状和颜色。最后他将所有蓝色的成分放进盒子Ⅰ，所有红色成分放进盒子Ⅱ。接着向他呈现大的黄色正方形，他将它同红色的成分放到一起，"因为它们大小相同（指着大的红色正方形）"。

嘉益（5岁2个月） 逐个地审视这些成分，最后将它们划分为正方形和圆形。

"你能换一种方法将它们分成两堆吗?"——"能(他一个接一个地拿起它们慢慢地分组,但最后还是将它们划分为正方形和圆形)。"——"你以前不也是这样分的吗?"——"是的(他又一次将它们分成正方形和圆形)。"——"那么,这样(将这些成分划分为红色的和蓝色的)可以吗?这同你第一次分的一样吗?"——"不,因为有圆形和正方形。"当增加了有圆孔的成分时,嘉益只是说:"它们是圆形和正方形,其中有些有圈(圆孔)!"

杜思(5岁3个月) "你看到什么?"——"圆形,正方形,大圆形,小正方形。"——"还有吗?"——"没有了。"然后他构造了六个小集合,在构造这些集合时,他是逐个地随手拿到什么就分什么的。当他分完这些集合时,便将它们放进两个盒子,小的红色的正方形放进盒子Ⅰ,其余那些集合放进盒子Ⅱ。将这些成分混杂并要求他作一个新的分类。这一次他将大的红色正方形放进盒子Ⅰ,其余的五个集合放进盒子Ⅱ。

罗赫(5岁3个月) 最后也摆出了六个小集合。他将红色的正方形(大的和小的)放进盒子Ⅰ,所有其余的放进盒子Ⅱ。"你为什么将这些(Ⅰ)放到一起?"——"这些都是小的(小的红色正方形)。"——"这些呢(盒子Ⅰ中的大的正方形)?"——"它们是大的。"——"那么,所有这些(Ⅰ)是什么?"——"……"——"将它们安排一下。"——(他只是在每一个盒子内改变一下这些子集的位置。)——"这些(盒子Ⅰ)是什么?"——"它们都是正方形(正确)。"——"那里(盒子Ⅱ)呢?"——"它们都是正方形(错误)。"——"它们都是?"——(他将蓝色正方形放进盒子Ⅰ。)——"换一种方法(将所有的混杂起来)。"——(将正方形放进盒子Ⅰ,圆形放进盒子Ⅱ。)——"你上次不是这样放的吗?"——"是的。"——"那么,能不能换一种方法?"——(没有反应。实验者开始按颜色对这些成分分类。)——"我在这里放了什么?"——"红颜色的。"——"那里呢?"——"蓝颜色的。"——"你分分看。"——(他又一次回复到形状的标准上来。)

李益(5岁5个月) 将这些成分分成三个集合:(Ⅰ)小正方形(蓝色的和红色的);(Ⅱ)大的蓝色圆形和大的红色正方形;(Ⅲ)小圆形(蓝色的和红色的)。然后他对此加以纠正,并造成:(Ⅰ)小的蓝色正方形;(Ⅱ)大的和小的红色正方形;(Ⅲ)圆形。"这些(Ⅲ)相配吗?"——"它们都是圆形。"——"这些(Ⅱ)呢?"——"它们都是正方形。"——"这些(Ⅰ)呢?"——"也都是正方形。"给他两个盒子,他将这些成分分成正方形和圆形,而且他以后几次重复了这种划分。然后实验者将这些成分划分为红色的(Ⅰ)和蓝色的(Ⅱ)。"这些(Ⅰ)相配吗?"——"不配。"——"真的吗?"——"相配。"当引进那些大的黄色正方形时,他只是在正方形内分类。

路思(8岁5个月) 形成了六个小的集合,然后根据颜色将它们分到两个盒子中去。要求他作新的分类时,他先将小的红色正方形放进盒子Ⅰ,小的蓝色圆形放进盒子Ⅱ。然后,他一个一个地随手拿起这些成分,并在形状和颜色这两个标准

之间动摇。最后，他将正方形放进盒子Ⅰ，将圆形放进盒子Ⅱ。当要求他作第三种分类时，路思似乎想要采用大小的标准。他一个一个地拿起这些模型并将小的成分放进盒子Ⅰ，大的成分放进盒子Ⅱ。但后来他对此作了纠正，"因为（Ⅰ中）红颜色的比蓝颜色的多"，并退回到颜色的标准。

库恩(5岁6个月)　最后分成红色成分和蓝色成分。在要求他作新的分类时，他又两次重复这种划分。当引进一个大的黄色正方形时，他将它加到蓝色的成分那儿。"这个（Ⅱ）行吗？"——"行（=都是红色的）。"——"这里（Ⅰ）呢？"——"不行，因为有的是蓝色的，有的是黄色的。"实验者开始将这些成分分成圆形和正方形，库恩正确地继续下去，但他所提的理由却是"因为它们是红颜色的和蓝颜色的"。

同以前的实验一样，这个实验提供了大量在第Ⅱ阶段发现的事后认识方面有限的机动性的证据。做出这一结论的基础是这么一个事实，即在改变某种安排以符合另一种标准方面，所有的这些儿童似乎都有一种并非偶然的困难。换言之，存在着相当程度的"固执"。由于有一个新标准而忘记一个旧标准的现象很不普遍，因为从一开始就存在着各种可能有的标准，而我们所要求的只是对依然同样的那些成分的安排加以改变（在第1节中，当新的成分暗示了一些不同的标准时，这比较显而易见）。

为了搞清事后认识的缺乏暗示了它同事前预见的缺乏是一种有联系的现象，我们能否对事后认识的缺乏作进一步的分析呢？事实上，目前的这个实验将说明这个问题，因为我们常常能够用呈现在受试者面前的那些成分，来研究他是如何进行第一个分类的。

我们的第一个线索是，确定这些儿童究竟偏爱这两种可能的分类中的哪一种——是上行法还是下行法。使用上行法意味着一开始便根据一个有次序分类的最低等级来造成一些子集的倍增，然后逐步地将它们联合起来直到形成一个或数个两分法。使用下行法则意味着从一个（往往表现为概括性的两分法的形式）比较一般的分类开始，然后对这些类别作进一步的一分为二的再划分。如果受试者使用第二种方法，那么这通常便意指他有了预见，于是受试者后来便能比较容易地运用事后认识改变他的标准。相反，采用上行法通常则意味着受试者是在拿起一个新的成分时才对这个成分加以划分的，不存在任何的预见。于是，当我们要他改变标准时，所发现的往往是那种刻板性，而不是与事后认识有联系的机动性。

引人注目的事实是，所有第二阶段的受试者都使用了上行法。布拉摆出了一个复杂对象的型式，然后他造成五个小集合，而且不能在没有尝试与错误的情况下将它们归并为两个集合。尼富的行为与此极其相像。嘉益虽然在最后将材料分为正方形和圆形，但他在开始时也是一次一个地审视那些材料的形状的。杜思和罗赫开始时摆了一些小集合，而且并没有造成任何一种令人满意的两分法。李益开始时摆出三个集合，当他最后发现这些材料能够一分为二地划分为正方形和圆形时，他却刻板地抱着这个念

头不放。虽然路思和库恩不太费劲地发现了红色对蓝色的两分法，但他们也是从一些较小集合的倍增开始的。换言之，在这几个儿童中，没有一个人从一开始便系统地对材料作概括的观察以形成一个计划，并在其后贯彻这个计划。他们所做的是随即组成一些小的集合。这意味着在没有任何预见的情况下便开始实际的分类，而且是在分类进程中发现这组材料的内容的。虽然在分类之前曾要求他们先描绘一下这些材料，而且要求作口头描述的目的乃是帮助他们形成一个预见的格式。然而，他们所做的那些描述，不过是毫无次序地、不完全地列举这些材料，并且与随后的行为之间几乎没有什么联系。例如，杜思开始似乎是作了两分法的描述（“圆形，正方形”），但他后来却对大小的关系作了不适当的说明（“大圆形，小正方形”），而且对于存在着两种颜色这一事实，他竟毫无提及。当他对这些材料进行分类时，他造成了六个小集合，最后，他将它们分类到两个盒子中去的方式与他的口头描述也毫无联系。

如果说儿童在使用上行法时几乎没有事后认识的机动性，那么其理由是不难发现的。我们只需看一看由于相同原因造成的事前预见机动性的缺乏即可。使用上行法意味着在那些将要构成一个类别的成分中间寻找最大的相似性，其结果当然就是这些类别之外延的相应地减少。所以儿童从一些小的集合开始，然后一步一步地组合它们，直到最后达到这个系统中的一些最大的类别。使用下行法意味着寻找一些最一般的特性，即外延是最大的，因而内涵是最小的。只是到了这个时候，儿童才继而根据具体的特征来进行再划分。但是，他事前必须预见到这些再划分。因为，如果不考虑各种标准并按照这些标准来选择一些划分，他几乎就不能发现那些最一般的特性。他事前一定得做出选择这一事实，便解释了他之所以在后来比较容易地改变标准的原因，因为，在他做出第一个选择时，他必须要知道这些可能性。上行的顺序确实能够与事前预见和事后认识方面的机动性齐头并进，但是它不需要这么做。相反，儿童很可能是根据经验来解决这个问题的。他们的方式是一次采取一个步骤。在这种情况下，组成了每一个小集合，而这些集合的成分共同具有最大量的内涵，但与其他集合都无联系。然后，他根据一个或另一个特性的偶然的影响将它们组合成一些较大的集合。他根本不是在作有意识的挑选。当要求他设法作另一种分类时，他之所以常常注意那个以前曾给他深刻印象的特性而不是去发现一种新的两分法，其原因就在于此。他并没有系统地了解所有的材料，而且他也绝不是在作有意识的选择，这与使用下行法的儿童是不同的。

然而，上行法和下行法乃是两种极端，而且在它们之间，我们可以发现相当多样的中间反应。这些反应可以归为两组。或者，受试者开始于上行法的分类，这意味着他是在逐步地解决这个问题，然后他开始向前看，而且当要求他作不同的分类时，这些姗姗来迟的预见还可以给他以帮助。或者，他可以在对所有的可能性毫无预见的情况下开始一种两分法，然后在某个较后的时期采用尝试与错误。这两种类型的反应在6—7岁时尤其普遍。下面是一些例子：

迪斯（6岁9个月） 开始于一个两分法：“正方形和圆形。”——“你需要几个

盒子?"——"两个,装正方形和圆形。"——"能换一种方法吗(将它们混杂在一起)?"——(他将大的红色正方形,小的红色圆形和小的蓝色圆形放进盒子Ⅰ,将大的蓝色圆形,小的红色正方形和小的蓝色正方形放进盒子Ⅱ。每一个集合再分为三个子集,这样,作为一个整体的组合显示了一种平衡。)——"它们很相配吗?"——"哦,不!(他将所有的红色成分放进盒子Ⅰ,将蓝色的放进盒子Ⅱ)。"——"这样相配?"——"是的,因为这些是颜色。"——"能换一种方法吗?"——(他开始将正方形和圆形像最初那样分离开来。)——"这是不同的方法吗?"——"我真的不知道……所有小的同小的在一起,大的同大的在一起。"然后引进那个黄色正方形,他根据形状对这些成分重新分类。

马尔(6岁10个月) 一开始分成八堆,他将这八堆按大小、形状和颜色的标准放进四个盒子。当要求他将这些成分放进两个盒子时,他成功地将它们划分为蓝色对红色,正方形对圆形和大对小。

阿特(7岁) 开始于三个集合:大正方形,大圆形和小的成分(根据形状和颜色加以再分)。"能将它们分到两个盒子中去吗(实验者未将这些成分混杂,因为他在描述他将要做出的分法)?"——"正方形和圆形。"——"能换一种方法吗(还是没有将这些成分混杂)?"——"可以将蓝色圆形同蓝色正方形放到一起,将红的同红的放到一起。"——"还有另一种方法吗?"——"没有了。"——(将那些成分混杂起来。)——"(他按照大小对它们划分)这里是大的,这里是小的。"

最后我们来看一看明确的事前预见,在这里,儿童开始于一个两分法,继之以下行法,而且在标准的改变方面毫无困难:

皮尔(7岁1个月) "这些是什么?"——"正方形和圆形。"——"你需要几个盒子?"——"两个。大的正方形放进第一个,大的圆形放进第二个……一共是四个(预见了对于同样成分所做的相同的两分法)。"——"你能只用两个盒子将它们分类吗?"——"能,所有的红颜色的在一起,所有的蓝颜色的在一起。"——"再换一种方法呢?"——"所有的大的在一起,小的在一起。"当增加了那个大的黄色正方形时,皮尔预见了两种可能的分类,一个是根据形状,一个是根据大小。

摩吴(7岁6个月) "你看到了什么?"——"正方形和圆形,小的和大的。"——"你要分几堆?"——"三堆,不,四堆(形成了一个2×2的矩阵并根据颜色再分)。"——"设法只使用两个盒子。"——"正方形和圆形。"——"能换一种方法吗?"——"能,蓝的和红的。"

吉尔(8岁) 先将这些成分分成红色的和蓝色的。当将它们再混合起来时,他将它们分类为正方形和圆形。——"能换一种方法吗?"——"能,所有的大的在一起,小的在一起。"

这些答复暗示了与我们在前面看到的相当不同的态度。第Ⅲ阶段的儿童不是零碎地处理分类的问题(即不是先搜寻那些具有共同特性的成分,然后再通过尝试与错误将

这些小组合联合起来)，他们径直指向最一般的特征，而且只是在此之后才将它们再分成一些主要的类别。他们知道，一般的特征适用于这组材料(形状、颜色、大小)中的所有成分，因此他们能够预见这几种两分法。所有这些都使人想起，事前预见的机动性说明了在要求改变内涵时的事后认识机动性的原因。

只要研究一下事前预见，我们便能证明这一点，我们将在下一节完成这个工作。到那时，我们将要求受试者在实际进行分类之前说出他将如何对这些物体加以分类。我们现在所能显示的只是，即使我们将他们已经造成的那些子类加以混杂，这些儿童(他们能够通过转变其标准来改变他们分类的基础)也能够保持他们构造的那些类别的完整性。这似乎是不言而喻的，因此它似乎也无多大的意义。但事实上这乃是一种真正的标记，它表明儿童在将他们自己从具体进行的明显的分类和再分类行为中解放了出来，并代之以思想上的联合或两分的运算，这暗示了整体通过转换其部分之空间排列的守恒。

第一个例子可以说明第Ⅱ阶段：

迪益(5岁5个月)　在将圆形重分为红色的和蓝色的之后，实验者将圆形杂乱地堆在一起，他的反应如下："它们还相配吗?"——"不，它们不配，因为它们重新安排过了。"——"它们是什么?"——"圆形。"——"那么它们相配?"——"……"

当然，这种陈述还留有可怀疑之处。因为，儿童可能只是认为要他回答这些成分是否作了适当的安排。但重要的是，作为一个处于第Ⅱ阶段的儿童，他并不能区分"相配"和"安排得正确"这些概念，只是到了第Ⅲ阶段时他才能做出区分。

费益(7岁2个月)　根据形状分类，并将正方形分成大的和小的。然后将盒子摇动了几下以便使所有的成分混杂起来。"这样还行吗?"——"不一样了，因为它们不再排成一行。但是它们都是正方形，而且确实相配。"

柴益(7岁3个月)　将成分分为红色的和蓝色的，然后将它们再分为正方形和圆形。将蓝色的成分搞乱："它们还很配吗?"——"不，因为它们是圆形和正方形……相配，因为它们是蓝色的!"

尼姆(7岁5个月)　将正方形放到一起，并分成大的和小的两个子类："它们相配，但它们都不整齐。"

霍尔(7岁6个月)　同上："它们排列得不同。"——"它们相配还是不相配?"——"不配……配，可以将它们放到一起。虽然它们大小不一，但它们同样都是正方形。"

于是，在重新安排分类标准、事前预见类别的能力和不受空间布局影响而从概念上处理类别的能力之间似乎有密切的关系。为了弄清这究竟是什么关系以及这些不同形式的机动性的发展顺序，我们就得进一步改善研究方法。

3. 不完全的自发分类中标准的预见、实施和变化

前面的那些结果似乎表明,事后认识的机动性乃是同事前预见的机动性直接相关的。我们也提到,人们可以通过这个事实——即儿童能够实行一个比较完整的计划,而不是边做边想——来认识事前预见。我们估量事后认识程度的基础,是儿童转换标准方面的难易程度。我们得证实后者的确依赖于前者的这个假设。要证实这一假设,可以采用一个非常简单的方法。我们只是要求儿童说出他准备怎么做,然后便将他的口头陈述同实际的分类以及继之而来的标准的变化加以比较。我们将描绘这方面的一个实验。所使用的物体与前面那些实验所使用的相似,但它们有三种形状,三种颜色和两种大小,将要做出的分类是不完全自发的。儿童不一定非要造成两分不可;我们只是要求他将最初的那些集合的数目减少些(这当然会提出进行其他可能的分类的要求)。

使用了十八个模型,这些模型通常放在一大张纸上,以便完全地混杂在一起。有六个圆形,其中三个是大的(直径为 6cm),三个小的(直径为 3cm);六个正方形,其中三个是大的(边长为 6cm),三个小的(边长为 3cm);六个等腰直角三角形,其中三个大的(两个等边各为 6cm),三个小的(两个等边各为 3cm)。每三个成分组成一组,每组都有一个红色的,一个蓝色的和一个黄色的成分。

我们也有一套空的纸袋,要求受试者设想这些模型往纸袋中的分配,并在每个纸袋上写出它要装些什么。"你得设法将所有的都放整齐,所有相同的都放进一个袋子,这样你就可以在纸袋上写上适合的名称。你得尽量地少用纸袋。"一旦儿童检查了将要加以分类的那些物体,便向他询问下列问题(提问的顺序往往是相同的):(1)必须要有几个袋子?(2)在这些袋子上得写上什么?(3)指出哪些将装进一个袋子?

如果儿童提出他设计的第一种分类需要六个袋子,那就要求他减少数目。

一旦儿童完成了第一个设计并发现了一个总的标准,便要求他对这些成分作不同的分类。这意味着要提出与第 1 节相同的那些问题,它们都与分类标准的改变有关。但这都是处于口头预见的水平。如果发现了第二种标准,我们便继而要求第三种。

现在我们便要求受试者进行分类,他可以不受约束地按他选择的任何方法进行。可以实施他的这个或那个设计,也可以一次实施他的所有设计(其形式为造成一个基于几种标准的型式)。

我们对某几组受试者所做的实验有些变化。在我们计算的统计数字中并没有包括这方面的结果,尽管它们的确提供了某种补充的证据。主要的变化是,按照固定的顺序(这是我们有意识地随意确定的)一个一个地呈现成分,并要求受试者描述每一个成分。然后我们将材料藏起来,并问他将如何对材料分类。非常奇怪的是,预先列举材料对于事前预见的促进作用,似乎大于将材料藏起来对于它的妨碍作用。在另一些事例中,我

们告诉受试者，另一个儿童只拿了两个(或三个)纸袋，要求他说出那个儿童是怎样将这些成分分类的。在必要时，可将两个成分放在纸袋上，看他是否能够完成这个暗示了的分类。最后则向有些受试者询问一些与外延之数量关系有关的问题。

在谈论结果之前，我们想提出两点告诫。首先，如果受试者在没有口头的尝试与错误的情况下展示他的初步设计，我们便可以说有事前预见。如果一个儿童试探地说他可能怎么分类，然后又摸索着进行实际的分类，那么就很难说他有事前预见。我们能够说的只是，他缺乏必要的预见格式来消除那两种类型的尝试与错误。

其次，我们不应该夸大这种证据的重要性。我们真正想要知道的，是受试者能够形成一个什么程度的、与运算的分类相配的预见格式。换言之，我们感兴趣的是分类的形式，它将是一个有次序的包含系统。这意味着这一整套要分解成一些分离的类别，然后对这些类别还要进行再划分。此外，儿童也可能认识到一些转换的格式，这要涉及标准的改变，以致一些主要的标准可能会变成次要的，而次要的则可能会变成主要的。实际上，我们所获得的这种事前预见要同时处理形式和内容；换言之，受试者告诉我们的是这些实际的物体将要如何加以分类。如果不引进某种抽象的符号就难以直接研究预见的形成，而抽象符号的引进却要远远超出我们的受试者的理解水平(在序列中将形式和内容分离开来要比在分类中容易些。在第十章中我们将看到，那些不能预见实际物体之序列的年幼儿童，却能够从一个系列的安排中抽取一般的形式。一个不可避免的结论是：这里所讲的这种形式并不是一种运算的结构，而是一种“图形”的结构)。于是，我们感兴趣的不仅仅是完全的预见。所谓完全的预见，意指能够预先说出需要多少个纸袋，预见各种类别和子类，而更重要的要切实准确地实施预见。我们至少还对不完全的预见感兴趣，因为不完全的预见有助于揭示这些结构本身，或者说，它至少能够清楚地说明获得这些结构所要经过的各种水平。

表 XIX 显示了最初的分类所揭示的预见的程度，它并未考虑标准的改变。这些结果得自于 93 名受试者，所使用的是(与事先列举相对的)标准的方法：

表XIX　不同年龄儿童之最初分类的预见(%)

年　龄 (受试者人数)	4 (12)	5 (20)	6 (18)	7 (16)	8 (14)	9 (13)
A. 无预见	75	65	22.2	12.5	7.5	7.7
B. 不完全的预见	25	25	22.2	43.75	42.8	30.8
C. 完全的预见	0	10	55.6	43.75	50	61.5
B+C. 不完全的或完全的预见	25	35	77.8	87.5	92.8	92.3

如果我们看 C 行，就会注意到这么一个事实，即 6—8 岁之间在完全的预见方面并无进步。事实上还有退步。如果看该表的最后一行，我们就会发现它随着年龄的增长

而有稳定的改善。然而,重要之点在于,即使到了 6 岁,我们的 75%的受试者还是表现出了不完全的和完全的预见性。到了 7—8 岁,一个能够改变标准并从一开始便看到两种或三种可能的分类的儿童,可能会犹豫地选择他的分类的内容并使他自己仅限于预见其形式。这样的儿童在表 XIX 的统计处理方面归入不完全的预见。

表XX　得自表XIX所列最初分类之后的标准的改变(%)

年　龄	4	5	6	7	8	9
(受试者人数)	(8)	(20)	(17)	(17)	(12)	(12)
A. 无标准的变化	87.5	40	35.3	11.7	16.7	8.3
B. 通过尝试与错误的一种或两种变化	12.5	60	58.8	70.6	8.3	33.3
C. 立即做出的一种或两种变化	0	0	5.9	17.7	75	58.4
B+C.	12.5	60	64.7	88.3	83.3	91.7

如果看一看改变最初标准的能力,我们便发现,它的出现要晚一或两年。表 XX 显示了这种标准之改变的频率。这些结果得自于我们的 93 名受试者之中的 86 位(7 名受试者未完成这个部分的测验)。第一种分类的基础可能是颜色,形状或大小(虽然事实上没有一个受试者开始于大小的标准,但许多儿童将大小作为首次再分类的标准)。这意味着有两种改变标准的方法。

8 岁以前立即改变标准的水平低于 75%;而且,即使允许尝试与错误(B+C),7 岁以前也未达到这个水平。① 虽然第一次分类之不完全的或完全的预见(它出现于 6 岁,见表 XIX)无须运算的水平,但系统的标准之改变则显然是需要的。现在我们便进而考虑水平不同的原因。我们需要确切地知道,儿童在没有运算推理的情况下所表现出来的事前预见或半预见究竟意味着什么。这应该能够说明这些不同的预见水平在构造一个运算的分类格式方面的真正作用。

通过研究每一个发展阶段,我们便能发现答案,而这种研究当着眼于下列三个相关的观点:最初分类的预见(表 XIX),标准的变化(表 XX),大的类别或集合(可以适当地用形状或颜色或大小诸种标准中的一个标准加以界说)和小的类别(可以通过两个或数个标准之联合加以界说)之间的关系。

在第一阶段(4—5 岁 6 个月),受试者不能为那个设计的分类发现一个总的标准,或是在相当长的尝试与错误之后才能发现它。实际的分类并不太好②,虽然它有时进

① 第 2 节(表 XVIII)所得到的结果要好些,因为那时我们使用两种颜色,两种形状,两种大小;而不是使用三种颜色,三种形状,两种大小。

② 这个阶段相应于图形集合阶段,但那些构造被构造的过程(使用纸袋)所排除。经常出现的情况是,受试者不理会那些纸袋.而且一开始便在桌子上构造复杂对象。

行得相当快，但并不一定与事前预见相一致。至于标准的改变，有些儿童是完全不能改变（“固执”等等），有些儿童虽然确实对他们的最初分类作了修改，但这种修改仅仅是胡乱地改变某些方面，而不是在发现一个替换的稳定的标准。那些实际的集合乃是大集合和小集合的混杂，其中主要是后者。这些受试者中的每一个的行为都表现出了一些质的差别。

第二阶段（6—7岁）显示了三种有联系的发展。首先，现在我们发现了一种半预见（从表XIX的意义上看，它可能是不完全的或完全的预见），它既不同于我们在序列方面（第九章第2节表XXIV）从5岁（55%）或6岁（73%）儿童那里发现的图形的预见，也不是转换的预见（转换的预见乃是同包含的形成有关的一种较晚的发展）。他们所预见的乃是那些涉及在成分之相似的基础上将它们联合起来并堆在一起的动作。换言之，预见仅与集合本身有关，因而才有了如此多的稳定的联合。其次，这种预见仅限于第一种分类，如果说他们随后发现了一些标准的话，那也是通过尝试与错误才发现的（这与我们在第2节中的发现形成对照，第2节中的那些可能性受到了限制，是与3×3×2相对的2×2×2）。总而言之，在标准的改变方面只有很少的机动性，而且这些改变几乎都不是“立即”造成一种新的预见的。第三，第一种预见（它开始于这个阶段）仅仅同较大的集合（即红色的、蓝色的和黄色的，或正方形和圆形），而不是同较小的集合（如大的红色的正方形）有关。但是，当受试者实施他的计划时，他开始于那些小的集合，并用上行法从小的集合开始进行构造。到了这个阶段的后半期，我们便能发现某种“混合”的行为，即交替地使用上行法和下行法。那些大集合的分化现在便通过尝试与错误而导致标准的变化。然而，我们必须要注意，出现于这种类型的混合行为中的下行的过程还是与严格的上行过程之逆行相去甚远。通过分化而构成的那些子集仍然是分离的，而不是发生直接联系的；相反，在实际进行联合的时候，受试者很少意识到那种将这些集合同它们的子集联系起来的逆向关系（到目前为止，还不存在包含）。

第三阶段（从7—8岁开始）的标志是一种新型的预见，这种预见涉及那些与固定的集合相对的转换，它也显示了对于包含的理解。包含的格式开始时可能仅表现为搜寻内容的形式。于是，可能有的标准的多样性就使得受试者难以在没有尝试与错误的情况下决定他的第一个分类。在事前预见发展的同时，我们发现了标准之改变方面的相应的较大的机动性：有时能够立即采取一个替换的标准，虽然有时要通过尝试与错误来进行新的分类，但这还是表明了受试者是知道那些不同的可能性的。最后，在运用上行法和下行法方面，儿童现在表现了相同的熟练性。这两者现在合二为一。因为，如果把分类看作是受联合和分离之可逆运算控制的一套可能的转换，那么它们中的每一个都是另一个的逆行。

下面是这几个不同阶段的例子，我们先从第Ⅰ阶段开始：

朱尔（4岁9个月） 首先说明情境：“要将所有这些东西整理好，你需要几个纸袋？”——“（拿起大的黄色正方形）这一个。”——“如果将同样的放到一起，所有

这里东西需要几个纸袋?"——"……"——"几个还是很多?"——"很多。"——"那么,什么放进第一个纸袋?"——(他又指向那个大的黄色正方形。)——"还有吗?"——"那个(大的红色圆形)。"——"它是相同的东西?"——"是的。"——"为什么?"——"……"——"如果用同一个纸袋,你得将哪些真正相同的东西放进去。"——(他指向一个小的蓝色圆形。)——"还有吗?"——"(大的黄色正方形)同这个正方形一起(他也指了大的蓝色三角形)。"——"这四个是相同的?"——"……"——"将相同的东西指给我看。"——(他指了大的黄色正方形和大的红色圆形。)——"它们真的相同?"——"是的。"——"为什么?"——"这个和这个(指向大的黄色正方形和大的蓝色三角形)。"——"为什么?"——"因为它们得一起装进纸袋里去。"——"将所有的东西都看一看。有许多东西,是不是有些相同的?"——"是的(指向不同的正方形,不同的颜色,不同的大小)。"——"好,那么在装所有这些东西的纸袋上写什么呢?"——"里面装什么写什么。"——"那么该写什么呢?"——"一个正方形。"——"一个还是几个?"——"几个。"——"还要几个纸袋?"——"这些(他指向那六个圆形,向小的蓝色的指了两次)。"——"纸袋上该写什么?"——"几个圆形。"——"现在需要几个纸袋?"——"……"——"要几个纸袋才能将所有的都整理好?"——"……"——"在这个新纸袋里该装什么?"——"……那个,那个,那个(指出几个三角形)。"——"我们该写什么?"——"几个屋顶。"——"还要几个纸袋?"——"……"——"那么,我们在这个里面装什么?"——"圆形。"——"这里呢?"——"正方形。"——"那里呢?"——"屋顶。"

"现在想办法换一种整理的方法,将不同的东西放进这些纸袋里。你知道怎么整理吗?"——"知道。"——"你需要几个纸袋?"——"三个。"——"第一个里放什么?"——(他指向三个小圆形,这似乎暗示了根据大小的分类。)——"你在它上面写什么?"——"圆形。"——"另一个纸袋上呢?"——"屋顶(指向那六个三角形)。"——"另一个呢?"——"正方形。"——"还要几个纸袋?"——"要很多。"——"这与以前不同还是相同?"——"不一样。"——"为什么不一样?"——"因为屋顶……"——"那么它怎么不同呢?"——"圆形。"——"为什么它们不同?"——"它们得加以安排。"这时候预见中止了,朱尔对圆形加以安排,形成了一种集合对象:它由三对组成,其中两对的左面有一个大的圆形,右面有一个小的,附近的第三对与此不同。第一对由蓝色圆形组成,其他的则由一个红色圆形和一个黄色圆形组成。

第三种分类只是尝试性的,不过朱尔回到了形状的标准上去。询问了几个关于"所有的"用法的问题,朱尔每次的答复都是错误的。例如朱尔说所有的正方形都是大的。"所有的大的都是正方形?"——"是的。"——"仔细看。"——"不,正方形和圆形(忘记了三角形)。"等等。

范尔(5岁) 要求这个儿童将"同样的东西"放到一起并说出需要几个纸袋。她指向小的黄色的三角形。"还有别的吗?"——(指向大的蓝色三角形。)——"为

什么?"——"它同那个一样。"——"还有吗?"——"(她指向小的红色正方形,然后指向大的蓝色圆形)不(指向小的黄色正方形)。"——"还有吗?"——(指向大的蓝色圆形和大的红色圆形,然后指向大的红色和黄色正方形。)——"你将所有的都指了吗?"——"是的。"——"需要几个纸袋?"——(她指向两个大正方形,两个小三角形,两个小正方形和两个小圆形。)——"还有吗?"——"一个也不剩了。"——"真是一个也不剩了吗?"——"还有两个小圆形。"——"一个也不剩了?"——"是的。"——"这需要几个纸袋?"——"三个。"——"第一个纸袋里装什么?"——"两个圆形,四方圆形。①"——"哪些?"——"这些(大的蓝色和黄色正方形)。"——"然后呢?"——"然后是这些(两个小圆形)。"——"在同一个纸袋里?"——"不。"——"然后呢?"——"这两个圆形(她已经指出过它们)。"——"我们已经写过它们了。然后呢?"——"那个(小的黄色三角形)。"——"是单独的?"——"不,同这(小的蓝色三角形)在一起。"——"为什么?"——"因为它相同。"——"还有其他相同的吗?"——"没有,有,这两个(大三角形),因为它们大些。"——"还有相同的吗?"——"有,还有这一个(大的蓝色三角形)。"等等。在实验者提出的那些问题的帮助下,范尔最后将三个纸袋定名为:"圆形","四方圆形"和"屋顶"。

然后实验者重新开始实验,试图引起标准的变化。她指向两个大正方形,然后指向一个小的,并且说:"这个小些,这个也小些,它们比较小。"她注意到了圆形和三角形都有大小的差别并决定用几个纸袋(实际上描绘了其中的六个):"大屋顶和小的。"——"下一个呢?"——"大圆形和小圆形。"——"下一个呢?"——"小正方形。"——"下一个呢?"——"大正方形。"——"能少用几个纸袋吗?"——(她拿掉第七个纸袋。)——"用三个纸袋可以吗?"——"不可以。"

范尔通过尝试与错误实际上摆出了三个集合:大的圆形,正方形和三角形。她将那些小圆形,小正方形和小三角形放在这些的上边。

这两个第一阶段的例子,表明了在这个水平上事前预见之所以不可能的原因。最初的失败揭示了它;而且,由于实验者提问的那些问题才取得的那些部分成功也揭示了它。

虽然儿童能够在相似和相异的基础上构造一些图形的、甚至非图形的集合,但他完全不能预见分类。其原因是,在他仅仅考虑一个集合时,忘记了他刚刚说过的话。另一方面,在他实际进行组合时,前面的行为结果还可以感觉得到并引导他随后的选择。要做出预见,我们就得记住它,因为除了第一个选择之外,所有的选择都得建立在前面那些选择的基础上。这恰恰是受试者所不能独自完成的。然而,与儿童的答复相联系的实验者的问题提供了一种言语的前后关系,它足以造成在切近的过去和切近的将来之

① 这个描绘它们的好方法,"四方圆形"相应于一个直觉,而这种直觉居于拓扑学概念的封闭图形和欧几里得概念的正方形之间。

间的某种协调。没有它就不可能有事前预见。我们可以再一次注意到事前预见和事后认识之间的联系。但在第一阶段,这种协调还不是(像在第二阶段那样)协调的。

我们可以从最初就发现的那些连续的同化作用开始来详细地分析这个过程。在儿童第一次看到这些材料时,他不知道如何将这些材料装进纸袋,也不知道该需要多少个纸袋。朱尔偶然地将注意力集中到那个大的黄色正方形上。他的下一个选择是那个大的红色圆形,这或者是由于其大小,或者是由于两者都是封闭图形。我们所知道的只是,这种同化是基于某种类型的附属性的。但我们现在所坚持的是相似性。于是,朱尔便选了一个小的蓝色圆形(因为它是圆形),然后选大的蓝色三角形(因为它是蓝色的)。朱尔不能回想那些决定他做出选择的原因;更不能从几个可能的格式中选择一个以指导他未来的同化作用。换言之,如果没有事后认识,事前预见也就无从谈起。但是,当实验者继而说"你将这一堆都看一看。有许多形状。它们有相同的吗?"的时候,他在拿了一个正方形之后便设法找所有的正方形,而且现在他明白了,它们可以都装进一个纸袋。在得到继续进行下去的鼓励时,他的思想便集中在"几个圆形"上,然后便是"这个,这个和这个",即"几个屋顶"。在同范尔的交谈中,我们看到了许多相同的结果。她首先同化为一些对子(一次只考虑一对):两个三角形,然后是两个正方形,接着是两个圆形,随后又是两个正方形,最后是两个小圆形。然而,在实验者提出的那些问题的帮助下,她也将它们按形状分成了三类并拿了三个纸袋。

我们现在可以看到对于事前预见的主要妨碍,而且也能够明白出现事前预见的那些必要条件。只要儿童一个一个地拿到什么处理什么,就不能存在事前预见。奇怪的是,不能预见下一步做什么却必定是不能回复他已经做过的那些步骤的结果。他开始于 A,经过 B 而达到 C;但是,既然他不能回想出导致他从 A 到 C 的那些原因,那么我们就几乎不能指望他会知道他将继而达到前面的 D 和 E。相反,一旦有了回顾,那么,就清楚地知道那个控制他切近的过去的动作之格式这一点来说,也就有了事后认识;而且只要有了事后认识,也就有了事前预见。开始时,事后认识仅限于知道这种实际运算的同化格式,但它很快便导致某种重新构造。受试者发现了这种格式之后,便着手将它系统化,或将它重新划分等等。当这个意义上的事后认识能动地发挥作用时,事前预见也就表现为越来越精确和越来越具体,而这乃是从第二阶段开始出现的情况。

第二阶段存在着一定程度的自发的预见,而在第一阶段却没有,除非实验者通过重复的提问和回答将它诱发出来。即使在第二阶段,我们还是发现有些不太成熟的反应仅限于一些固定集合的半预见,唯一的差别在于,它们是自发的。当受试者告诉我们他认为他能做什么时,他首先提到大的集合,后来才考虑进行再划分;但在实际进行分类时,他开始于一些小的集合,并一步一步地摸索以将它们组合在一起。这种预见似乎符合我们之所谓下行法,而实际的分类则接近于上行法。这两个过程并没有被综合起来,这意味着没有可逆性。我们先举几个早期的例子,读者将发现,它们也显示了在改变标准方面缺乏一定的机动性:

吴特(5岁10个月) “需要多少纸袋,很少还是很多?”——“很少。”——“三个还是四个?”——“四个。”——“四个还是八个?”——“四个。”——“你在这些袋子里放什么?”——“一些圆形(指向第一个袋子)。”——“这个呢?”——“一些正方形。”——“这个呢?”——“一些三角形。”——“你还要不要其他的纸袋?”——“不要了。”——“我们不能在这些纸袋里装些什么东西吗?”——“能,一些圆形。”——“指给我看。”——“这些。”——“就这些?”——“这些(两个大的和小的圆形)。”——“这只纸袋呢?”——“这些(一个大的和一个小的正方形)。”——“就这些?”——“是的。”——“再指给我看看。”——(她指出五个。)——“另一个纸袋呢?”——“这些(三角形)。”

“能不能换一种方法来用多一些或少一些的纸袋?”——“多一些纸袋。”——(试了几次,但每次最后都是三个集合:正方形,圆形和三角形。)

然而,实际的分类都开始于一些小的集合:三个大正方形和三个小的,三个大圆形和三个小的,三个大三角形和三个小的。然后她又根据颜色分,但也考虑到形状和大小。她用这种方法构造了两个连续的形式。它们基于三种标准,而且除了一些对称性外,将构成一个正确的矩阵。第一种型式由三行组成,一行在一行的上面,分别包括三角形,正方形和圆形。每一行的左面是三个小成分,右面是三个大成分,每一个包含有三个成分的组合,都是按照三种颜色安排的(但在正方形的这一行中,红色和蓝色的安排被颠倒了)。第二种型式由三对纵列组成,一对是红色的,一对是黄色的,一对是蓝色的。每一对的左侧都是小成分,右侧为大成分,但红色的那一列大小颠倒。每一列的成分纵向的顺序是:正方形,圆形,三角形,但存在着一些颠倒。

雷普(6岁10个月) “需要多少个纸袋?”——“(他看着那一组物体)两个。”——“真的两个?”——“是的。”——“第一个纸袋上写什么?”——“圆形。”——“第二个呢?”——“正方形。”——“是不是所有的都整理好了?”——“不。”——“还需要几个纸袋?”——“一个。”——“在那上面写什么?”——“屋顶。”——“所有的都整理好了?”——“是的。”——“这几个纸袋够吗?”——“够。”

但是在实际的分类中,雷普通过区分每种形状的大小成分而将它们组成六个小集合。在将它们联合成一些大集合时,他甚至还有点犹豫。例如对于大、小三角形的联合过程是:“能将它们放到一起吗?”——“不,不能够,我得将小的拿掉。”——“它们是否有些相像?”——“它们是一样的,但有些小一些。”当要求改变标准时,雷普又恢复到原先的六个小集合。最后他同意将那些联合成三个集合,他称之为“大的和小的正方形,因为它们都是正方形”等等。但他未能正确回答我们的有关包含之数量关系的问题,他争辩说,小正方形和正方形一样多,因为他是将小正方形同大正方形而不是所有的正方形作比较的。

格拉(6岁10个月) “需要多少个纸袋?”——“将所有的正方形,大的和小

的,放进一只纸袋?”——“随你的便。你需要几个纸袋?”——“三个。”——“第一个纸袋上写什么?”——“三角形。”——“第二个呢?”——“圆形。”——“第三个呢?”——“正方形。”——“总共就这些?”——“是的。”然后格拉便开始进行实际的分类,并且说:“每种颜色有三个。”她将成分安排成由大的和小的正方形,三角形和圆形组成的子集。实验者指着大的和小的正方形:“能将它们混合起来吗?”——“不能。”——“它们都相配吗?”——“不……是的,因为它们都是同样的形状。”

将物体放回原先的位置,要求作新的分类。“你认为你能换一种方法来整理它们吗?”——“能,用六个纸袋。”她预见了那六个她在实际的分类中已经构造过的小集合。

“想出另一种方法来。”——“能,我知道,用十八个纸袋(每个纸袋装一个成分)。”然后她回复到先前的那六个集合:“这些需要多少个纸袋?”——“六个。”——“你觉得你能少用一些吗?”——“两个。”——“怎么装?”——“像这样,像这样(指着所有的大的和所有的小的)。”——“怎么写?”——“大圆形,三角形和正方形,小圆形,小三角形和小正方形。”——“用一个词呢?”——“小块和大块。”然而,对于有关包含之数量关系问题的回答却是错误的。

最后的这几个例子虽然仍缺乏第Ⅲ阶段的那种完全可逆性的特征,但它们显示了从子集向集合以及从集合向子集之转换的较大的灵活性。

马尔(6岁11个月) 开始时预见需要五个纸袋:大圆形,小圆形,大正方形,大的屋顶和小的屋顶。然后她加上小正方形,这样就是六个纸袋。“能不能少用几个纸袋将这些东西整理好?”——“能,可以拿大正方形和小正方形(放到一起),大的屋顶和小的屋顶,大的圆形和小的圆形。”——“这样要几个纸袋?”——“(她数了数)三个。”——“写上什么?”——(一些很长的句子。)——“只用一个词。”——“正方形,屋顶和圆形。”

要求她预见一个不同的分类,她分别地描述了大正方形,圆形和屋顶。“剩下什么?”——“小屋顶,小圆形和小正方形(这看上去同前面的分类相同,但其中有一个重要的差别——前面的分类开始于六个小集合,然后再根据形状将它们联合成三个集合;而这个分类是开始于根据大小的两个集合,然后再对它们加以划分)。”

实际的分类是三个基于形状的集合,每一个再按照大小分为两个子集,“因为我已经将小的和大的分离开来了。”

克劳(7岁9个月) “多少个纸袋?”——“四个。”——“第一个装什么?”——“正方形。”——“第二个呢?”——“装三角形。”——“第三个呢?”——“装圆形。”——“下一个呢?”——“下一个装小正方形。”——“就这些?”——“不,还要两个装小三角形和小圆形。”——“这样就要几个纸袋?”——“五个,不,六个。”——“你能少用几个纸袋将它们整理好?”——“可以用一个将所有的东西都放进去,或者用两个纸袋将所有的东西分开。”——“不过,你得将同样的东西放进一个纸

袋。”——“可以将它们都放到一起，所有的圆形在一起，所有的正方形在一起，所有的三角形在一起。或者还可以将大圆形同小圆形，大三角形同小三角形放在一起，只要拿三个纸袋。”——“第一个上写什么？”——“大正方形和小正方形；当然是正方形！”——“如果只写‘正方形’，人们知道里面是什么吗？”——“知道，所有的正方形：大正方形和小正方形。”

实际的分类遵循于这一预见：基于形状的一些集合，随后按大小分为一些子集。克劳未能发现任何其他标准。但在问过一些有关“所有的”问题后，他自发地回到发现新标准的问题上来，并且说“现在我想出来一个办法，我知道怎么做：可以把所有的大的放进一个纸袋，所有的小的也放进一个纸袋。”——“该写什么？”——“‘所有的’和‘所有的’，所有的小的上面写‘小的’，所有的大的上面写‘大的’。”

然而，对于有关“所有的”问题，只有一半回答正确。有些答复是正确的：“所有的蓝色的都是圆形吗？”——“不！哦，不，因为这个是蓝色的，它是三角形”等。但有时候他们指谓语的不正确的数量关系：“所有的红色的是三角形？”——“不，不，三角形不是只有红色的，有蓝色三角形和黄的三角形。”

包含的数量关系也引起了一些并非偶然的困难。“正方形多还是大正方形多？”——“小正方形还是大正方形？”——“全部的正方形多还是大正方形多？”——“同样多。”——“怎么是同样多？”——“……”——“一共有多少个正方形？”——“三个。不过大的小的加在一起有六个。”——“‘一共几个正方形’是指大的小的加在一起呢，还是仅仅指小的？”——“仅仅指小的。”——“‘所有的正方形’是仅仅指小的吗？”——“不。”——“一共有多少个正方形？”——“六个。”——“小正方形呢？”——“三个。”——“大的呢？”——“三个。”——“那么加在一起的正方形多还是大正方形多？”——“两个一样多，大的和小的。”——“我问你什么？”——“是小的多还是大的多。”——“不，我不是问你小的多还是大的多，我是在问你加在一起的正方形多还是大正方形多。”——“加在一起的多些，因为这样就有六个。”（不过我们看到他仍然在使用数目，而不是直接地将部分同整体相比较。）

我们先来看看这比第一阶段的进步之处。突出的地方是，尽管事前预见并不完全，但它是自发的。典型的特征是，这些儿童不能预见一个分类的细节（他们中多数人甚至不知道需要多少个纸袋），但他们至少能够大体上勾勒出一个设计的轮廓。因为，他们的确在设法为那些提出的集合中的一个或两个命名：吴特和雷普一开始提出要一个纸袋装“圆的东西”，然后提出正方形和三角形，等等。

这意味着我们不再处理一系列的“特殊”的同化。一旦受试者同化了一些“圆的”东西（每一个都同化到它的上一个事物中），他就能回复到他的动作那里去，并因此而发现那个他曾经使用过并符合这些物体之共同特性的同化格式。

此外，事后认识也不仅仅指对于一套联系的记忆。它也是由于贯串在整个审视过程中持续不断地对物体进行的分类加以系统化的开始。虽然存在着几种可能性，但受

试者只抽取其中的一个。这种类型的再评价无疑就是事后认识的性质;它同连续的同化作用一起发展,最后引起一个预见的格式。虽然最初的预见仅仅是寻找其他"圆的东西",但之后它不可避免地要将儿童引向寻找诸如正方形和"屋顶"等其他的形状。这都是在现在的第Ⅱ阶段中的情况。

我们的最年幼的受试者尽管已处于第Ⅱ阶段,但还是有一种预见的方法同实际分类的方法不一致的倾向,这并不是偶然的。当实际进行物体的组合时,他们开始于一些小的集合,然后逐渐地组合成大的。但是,在着手进行之前,他们中的许多人(如吴特,雷普和格拉)先考虑较大的集合,而后来却不能对它们作进一步的再划分。实际的分类依循上行的型式,而预见却采用了一种夭折的下行型式。

这类事情绝不是普遍的。衡量受试者水平的真正标准是他表现出来的从小向大或从大向小的转换的机动性,而不是他开始形成的集合类型。我们之所以说这些儿童不够发展,是因为他们不能综合上行法和下行法,而不是因为他们首先想到大的类别。然而人们肯定会问,他们为什么这样做。一个可能的答案是,事前预见本身就遵循上行法,这同实际的组合是一样的,而且受试者并没有意识到那些中间的步骤。不过我们还是得排除这种可能性,因为这么做的儿童几乎不能发现对预见的再划分是如此困难。剩下的唯一答案是,同这些儿童的实际分类不同,他们思想上的分类有时立刻就集中于最一般的特征——因为他们是从思想上考虑了那些涵盖整个集合的相似性,而不是拿起一个个的成分。换言之,我们所描绘的那种事后认识和事前预见的相互作用,仍然允许受试者开始于一些大的集合。在此之前,唯一可能的方法是分别地拿起每一个成分,这正是第Ⅰ阶段普遍采用这种方法的原因,即使到了第Ⅱ阶段,这仍然是实际的分类中的一个常见的方法。

至于第Ⅱ阶段中发现的事前预见的局限性,这还是一个机动性有限的问题。在将近本阶段开始时,我们可以说受试者难以从一种方法向另一种方法转换:当运用下行法时,他们不能预见那些再划分,但此后不久,在实际的分类中他们开始于一些小集合——而现在他们却难以回到他们预见过的那些较大的集合中去(参见雷普对于三角形和格拉对于正方形的情况)。不能从一个标准转换到另一个标准,仍然是不能联合两种方法的另一个必然结果。因为改变标准意味着要将小集合看作是主要的结合,将主要的结合看作是小集合,这很简单,但要做到这一点,人们必须要能够自如地从上行法过渡到下行法并再过渡回去。(乍看起来,对我们这个分析的唯一例外是吴特,她似乎掌握了所有三种转换并一个接一个地构造了两个由三对物体组成的矩阵,明显地改变成她的第二种标准。但是,如果将她的构造作为一个整体仔细地研究,人们就会发现这显然是直觉方面的成功,而不是真正的预见。)

当我们研究更为发展一些的受试者(从格拉开始)时,我们就开始看到在小集合和大集合之间的更大的机动性,而且这就证明了上行法和下行法之间综合的标志。这些儿童预见了那些再划分,而且也能够重新组合那些子集以发现原先的集合(参见克劳,

"当然是正方形")。然而,他们还不能发现所有可能的标准的变化,而且倾向于忽略形状、颜色或大小这三种可能性中的一种。更为重要的是,在回答有关"有些"和"所有的"这些问题时,他们仍然出现一些并非偶然的错误(见第三章);尽管事实上他们刚刚摸弄了有关的物体,但还是不能确定包含的数量关系(见第四章)。最后这个方面的一个突出的例子是,克劳拒绝接受大正方形必定比"作为一个整体"的那些正方形的数目要少些的暗示。

最后,我们可以说,虽然第Ⅱ阶段的儿童表现了自发的事后认识甚至事前预见,但这两个过程都使用于那些显示出来的构造(即实际的集合,尽管它们不再是图形的形态,但仍然是前逻辑的)。他们不能将这些过程同转换联系起来。这方面的标准必定是自如地从上行法向下行法和从下行法向上行法过渡的能力。换言之,第Ⅲ阶段的儿童将能够同时预见几个联合($A+A'=B$)和相应的再划分($B-A'=A$)这两者。当这种情况出现时,追溯和预见便达到了运算的可逆性的水平,正是由于它,受试者才最终掌握了包含。我们已经在许多场合看到,包含的基础乃是对于 $A=B-A'$ 关系的理解;这意味着事前预见和事后认识的相互作用必定同转换有联系。

在第Ⅲ阶段开始时,尽管下列所有的受试者都表现了运算的可逆性,但许多受试者并没有预见到那三种可能的标准中的两种以上的标准。到了 9 岁或 10 岁时,儿童们通常从一开始便预见了所有那三种标准。

符维(7 岁 6 个月)"需要多少个纸袋?"——"相同颜色的还是相同形状的?"——"随你的便。"——"三角形,正方形,圆形。"——"你提到过另一个方法,是吗?"——"是的,三个纸袋:红的,黄的和蓝的。"——"还有第三种方法吗?"——"……"

在实际分类时,他摆成三排,一排在另一排的上面,这几排分别由大圆形,大正方形和大三角形组成。它们的安排是,纵列的右边是黄色的,红色的居中,左边是蓝色的。然后他以同样的方式安排了小成分,这样便形成了基于三个标准的完全对称的型式。

尼克(8 岁 10 个月)"多少个纸袋?"——"如果它们都是相同的颜色,可以吗?①"——"随你的便。要多少个纸袋?"——"三个。"——"我该写什么?"——"圆形,正方形,三角形。"——"现在换一种整理的方法。你需要多少个纸袋?"——"六个。"——"好。你在里面放什么?"——"一个装大圆形,一个装小圆形;一个装大正方形,一个装小正方形;一个装大三角形,一个装小三角形。"——"这是第二种方法。还能再换一种方法吗?"——"能,大三角形,圆形和三角形在一起,小正方形,圆形和三角形在一起。"——"写上什么?"——"这里是大图形,那里是小图

① 这个问题表明,忽略颜色的标准(这是普遍的现象)的原因是,一般认为颜色不太重要,不是由于受试者没有意识到这些差别。

形。”——“还有另一种方法吗?”——“有(她先提出将圆形和正方形放到一起,三角形分开,后来她考虑到了颜色),所有黄颜色的东西,所有蓝颜色的东西,所有红颜色的东西。”

实际的分类就不必要了,因为所有的可能性都预见到了。于是我们便要求受试者说出在她设计的这几种分类中,哪一种最好。尼克选了第一种(形状),她认为大小和颜色不如形状重要。实验者随后问了一些有关“所有的”问题,她回答正确,关于包含的数量关系,“所有的红色的都是正方形?”——“不,有两个正方形,两个三角形,两个圆形。”——“红颜色的多还是红色正方形多?”——“红颜色的多。”——(将两个红色的圆形拿掉。)——“红颜色的多还是红色正方形多?”——“红颜色的多。”

司毕(9岁)“多少个纸袋?”——“三个:正方形,圆形,三角形。”——“能换一种方法吗?”——“能,但这就需要多一些纸袋。”——“多少?——六个:大正方形,小正方形,大圆形,小圆形,大三角形,小三角形。”——“再换一种方法?”——“能,大的,小的,等等……所有的小的放在一起,所有的大的放在一起。这要两个纸袋。”——“还能再换一种方法吗?”——“所有的蓝的,黄的,红的。这还要三个纸袋。”然后要求他重复地设计那些分类,他很快地回想了出来,毫无困难地从一种分类改变为另一种分类。例如:“所有红色的那个纸袋可以分为三个:红正方形,红圆形和红三角形。”同样地,他能从基于形状的那些类别转变为基于颜色的子类,从基于颜色的类别转变为基于大小的子类,等等。

“所有的正方形都是蓝色的?”——“不,还有两个红的和两个黄的”等等。“正方形多还是大正方形多?”——“正方形多。有三个大正方形,加上三个小的,一共是六个。”——“红的多还是红正方形多?”——“红色的多,因为还有红色的三角形和红色的圆形。”

在这些反应中有几个新的特征:

(1) 标准的选择不再基于一种不言明的抽象,而是包括了明确的决定。于是符维问道:“相同的颜色还是相同的形状?”尼克问道:“如果它们都是相同的颜色,可以吗?”

(2) 由此而来的便是,一旦受试者完成了一种分类,他就能够回到一个他暂时搁到一边的标准上去。于是,整个的分类能够根据这个切近的追溯加以重新安排(这就继续了真正的“转换”)。

(3) 另一方面,第一个格式之审慎的选择加强了它的预见的特征。于是,事后认识和事前预见都得到了强化,这便保证了改变标准时的完全的机动性,同时也保证了预见倍增运算的可能性(参见符维基于三种标准的型式,等等)。

(4) 当受试者不仅在改变他的标准时能够用一种类型的集合代替另一种类型的集合,而且能够将这些集合联合起来,并在随后划分和重新联合它们,以致在上行过程和下行过程之间显示了完全的互反时,这种完全的机动性尤为明显(参见司毕对于包含问

题的反应"人们能够划分……"等等)。

(5) 预见之所以为预见,不仅仅是由于其构造,而是由于其转换。这就是说,集合和子集变成了类别和子类。主要的标志是,$A+A'=B$ 这个联合在 B 被划分为 A 和 A' 时就预见了(反过来说,当 A 和 A' 联合起来时便预见了它们的分离)。正是由于这种形式的预见,受试者才能够将一个子类的外延同整个类别的外延加以比较,才能够因此而建立 $A<B$ 这种形式的包含关系(我们还可以补充说,我们宁可认为这是唯一的真正的预见;我们在第一阶段所看到的只是一种最初的开始)。

非常明显,我们在第一至第六章所分析的那些运算格式之发展同这些追溯的和预见的过程是有着密切联系的。正是这些过程的相互作用才逐渐导致了作为附加(包含)和倍增关系之基础的可逆性。研究事前预见对于完善地分析运算本身的发展之所以必不可少,其原因即在于此。我们现在便能够明白有关的因果机制了。

第八章 通过触觉而觉察到的成分的分类①

前几章中出现了两个主要的概念。第一个是，分类起源于图形的集合，在图形的集合中，虽然空间构造的作用次于感觉的结构，但它远不是无关紧要的。第二个是，从图形结构向运算结构的发展，依赖于事后认识活动和事前预见活动的复杂的相互作用。可以将它们结合起来归之于"表现的调节"。现在我们知道，它们为运算的可逆性的发展做好了准备。

上述两点发现，都暗示了同一个为比较对看到成分的分类和对仅仅通过触觉才能觉察到成分的分类而设计的实验有关。触觉感知只能是连续地而不是同时地发生的。因此，第一个问题就是，能否发现一些相应于视觉图形集合构造的其成分通过触觉来觉察的构造，如果不能发现，那么用什么来代替它们。我们还认为，感知是连续的这一事实将系统地妨碍事后认识的过程。如果情况如此，我们就要问，相应的事前预见如何产生，以及它们是否在很晚时才出现。

1. 实验的过程

为了获得尽可能多的不同的实验组合来解释这些问题，我们使用两种类型的物体和两种性质不同的过程及方法(有时候我们通过口头列举每一种物体来进行实验，这就形成了第三个实验)。

两组器材的相异是，第一组包含有相互之间完全相同的成分，而第二组则不是。

第一组：八个曲线物体和八个直线物体。八个曲线物体是：两个小圆形(直径 2cm，厚 2mm 的圆板)，两个大圆形(直径 4cm)，两个小球(直径 2cm)，两个大球(直径 4cm)。八个直线物体是：两个小正方形(边长 2cm，厚 2mm)，两个大正方形(边长 4cm，厚 2mm)，两个小立方体(边长 2cm)，两个大立方体(边长 4cm)。

第二组：十六个木制物体。它们是：

(1) 两个球(直径分别为 2cm 和 4cm)；

(2) 两个立方体(边长分别为 2cm 和 4cm)；

---

① 与 H. 尼道夫和 E. 西奥梯斯(Siotis)合作。

(3) 两个长方体(3.5cm×3.5cm×7cm 和 1cm×1cm×5cm);

(4) 两个椭圆球(一个椭圆球的轴是 3.5cm 和 7cm,另一个是 2.5cm 和 3.5cm);

(5) 两个正方形(一个边长 4cm,另一个 2cm。两者都是 2mm 厚);

(6) 两个圆块(直径分别为 2cm 和 4cm,两者都是 2mm 厚);

(7) 两个长方形(6cm×3cm 和 3cm×1.5cm,两者都是 2mm 厚);

(8) 两个椭圆(一个的轴是 6cm 和 3cm,另一个是 3cm 和 2cm,两者的厚都是 2mm)。

这些物体都放进一个代表一座小屋子的结构里面,这座小屋子有墙和布制的屋顶。儿童将双手从"墙的下面"伸进去摸这些物体。当后来进行视觉对照实验时,只要将布拿开就行。还有一个对照组,对他们只利用视觉感知来进行询问。

过程:第一个过程是进行自发的分类,然后要求一种两分法(用一块隔板来帮助)。当这完成之后,便改变标准。要求其中的一组受试者在检查了所有的物体之后设计出一个分类(时间不受限制)。①

这个初步的检验是完全自由的,但偶尔我们也要求口头列举。口头列举可以使分类稍微容易些,但它常常被忽略。我们当然不能认为语言发挥了部分的作用。即使在完全自由的检验中,如果儿童想说出那些物体的名称,他完全可以那么做;如果不说出名称,仍然还是有内部语言存在。

第二个过程是在没有作自发分类的情况下要求一种两分法。同时,我们毫无例外地要求在检验了那些物体之后随即设计一种分类。同样地,实验者还是进而要求改变标准。在对物体做初步的检验期间,只要求少数几个受试者列举物体。

受试者:超过 350 名儿童,他们的年龄为 4—12 岁,多数受试者为 5—10 岁。

阶段:我们观察到的那些阶段符合于视觉分类的那些阶段,尽管我们的确也发现一些稍微不同的差异:有些任务比较困难,但另一些却比较容易。

我们在阶段Ⅰ发现了两个有趣的反应。首先,尽管受试者事实上不能看见这些物体,但还是存在着一种构造图形集合的倾向。虽然图形的集合出现的次数比受试者看见物体时要少些,但它们仍然具有一些相同的熟悉的特性。第二个反应更为原始,而且是那种可以称之为感知-运动分类的残余。它类似于第一章中提到的那种 2—3 岁儿童的反应(他们逐个地抓起物体并认出它们是"相同的"。儿童将他在检验期间认出的那些成分放到一边而不理会其余的成分)。虽然用这种方式开始的分类最后可能仍然形成了采用一个分类标准的集合,但这个标准却未加系统化。此外,这种分类既不能继续,也不能看作是类别的划分。

阶段Ⅱ同相应于视觉实验中看到的那个阶段相似,但对于第一个分类的预见似乎

---

① 如果受试者没有触摸到所有的成分,就将这些成分逐个放到他手中。或者将这些没有触摸到的成分放到一块隔板的左边,要求他将它们都转放到隔板的右边。

要容易些。其原因可能是，现在它符合由于感知的连续性而不是同时性所引起的功能的需要。另一方面，预见和排除预见之间的矛盾经常出现。此外，同前面的视觉实验相比较，第二个标准的发现稍微困难些，而且受试者在努力发现第二个标准时，常常要返回到阶段Ⅰ的图形的集合。

阶段Ⅲ同那个熟悉的对应阶段相似，不同之处在于，改变标准时的机动性稍微大些。

2. 阶段Ⅰ：已知成分的选择和图形的集合；无事前预见和无完全的分类

下面是几个例子：

罗斯(4岁8个月)　要求他列举这些物体，他在触摸它们时逐个地说出了名称。"记住了吗?"——"一个正方形，一个小球，一块小砖，一块大砖。"当他将这些物体分到两个分隔空间去时，他将"砖和球"放进一个空间。"它们相像吗?"——"不(他从左边的空间里将所有的东西都挪到右边的空间去，在他挪的时候说出了其中一些物体的名字。然后他说)，这两个球一样。这两块砖一样。"他将"球和砖"放到左边，将他不容易辨别的所有其他的物体混杂地放在右边。——"这一边的是相同的吗?"——"不知道。"

然后实验者将大成分放到一边，小成分放到另一边，并对他说另一个小男孩将它们安排成这个样子。罗斯并不知道这么安排的理由。然后将曲线物体放到一边，直线物体放到另一边，并对他说，另一个孩子作这样的安排。——"是的，因为他将小球和大球放到这里。"——"另一边呢?"——"那是正方形和砖块。"——"这一个(立方体)该往哪儿放?"——"不知道(他将它放到曲线物体那里去)。"

高尔(4岁10个月)　没有列举。她检验了这些物体并且说："是的，砖块和扁平的东西。"当再次要求她将相像的东西放到一起时，她构造了一种分散布列的复杂对象。那些完全相同的成分无例外地、成对地靠在一起。大立方体靠近大球，但同小球却是分开的；椭圆靠近立方体；小立方体靠近大立方体；等等。高尔不能说出这些物体相互靠近的原因，但对于砖块则例外："这些小的同大的在一起，它们都是砖块。"——"让我知道，哪些物体相配。"——(她指向立方体和球。)——"它们相配吗?"——"是的。"——"为什么?"——"因为……"——"它们是相同的吗?"——"不。"——"还有其他相配的东西吗?"——(她指向两个小球。)

然后将这些物体暴露出来，要求她在看见物体的情况下对它们分类。她的构造同复杂对象非常相似，只是稍微整齐些。

克蕾(5岁1个月)　要求列举，她辨别出了球、砖和"木片"。然后她构造了一

个由两列组成的复杂对象，其中有些具有相似基础上的对应性，而另一些则具有比较一般的附属关系基础上的对应性：大立方体——大正方形，大球——小椭圆，大正方形——大圆，大椭圆——小椭圆球。其他的物体无规则地放进第二个隔间（这些是“木片”）。“这些球和砖相像吗？”——“不。”——“那么该将它们放到一起吗？”——“不。”——“应该怎么办？”——“球放在一起，砖放在一起（她将曲线物体重叠地放在左边，直线物体放到右边，与几个曲线物体在一起）。”——“你是怎么做的？”——“我把球放到这边；然后，然后我将这些小木片和这些砖放到这边。”——“它们同球有什么不同？”——“它们是圆的和方的木头东西。”当要求她作新的分类时，她将两个球和两个椭圆球放到右面，其余的放到左面：“球在这边。小木片和砖在另一边。”——“这些小木片和这些砖相像吗？”——“不。”——“怎么办？”——“我将它们同球放到一起。”

实验者将直线物体放到一边，所有的曲线物体放到另一边：“这样行吗？”——“不（再次将圆形和正方形放到一起）。”在让她看见物体的情况下所做的分类还是将“圆的”放到一边，其余的放到另一边。

布来（5 岁 3 个月） 在列举了之后，她在一个隔间内构造了一个队列，其中包括一个大立方体，一个大圆，一个大正方形和一个长方体以及放在它上面的一个圆形。在另一个隔间内，她摆出了另一个队列，先是大球和大椭圆球，最后是大椭圆，中间是两行小立方体，球，长方体和椭圆球。要求她找出比较相似的东西，她便构造了两个新的队列，人们不难发现邻近成分之间的许多部分的相似性。然而，这种并列常常是任意的（例如小圆形和立方体的并列）。后来，她在一个隔间中摆出了一些三维的图形，在另一个隔间中摆出了一些两维的。虽然她感觉到在每一个集合的成员之间存在着某种相似性，但从她的实际排列中很难看到这一点，她对于这一点的表达主要还是通过她说的话“那是因为它们相像才分开的”。在视觉条件下的分类相似于这种类型，但要整齐得多。

杰奥（5 岁 3 个月） 他使用球、板、正方形、滚筒、圆等词汇来列举这些成分。“你将相配的东西放到一起，摆成两堆。你明白吗？”——“明白，我要将一个球和一个正方形放在一起。”——“哪些东西放在一堆？”——（他将一个大的和一个小椭圆球，一个大立方体，一个大球放进一个隔间，将其余的放进另一个隔间，其中有一些出乎意料的并列。）——“这个正方形和这个小滚筒相配吗？”——“配。”——“为什么？”——“……”实验者开始根据形状分类。将正方形放到一起。杰奥不继续这种分类。这个根据形状进行的完全的分类对他没有任何的暗示作用；那些根据厚度，大小，或曲、直线等进行的分类也是如此。

库恩（5 岁 6 个月） 他开始于自发的分类，将“砖块和四方砖块”放到一起。然后他指出将那些大球体“和像那么大的，然后是小的放到一起”。这样，他构造了八对小成分，排成两列。一列包括两个大球体，两个大立方体，但在两个大球体之

后放了两个小圆形。另一列包括两个大圆形，两个小正方形，几个小立方体和球体。"你能少放几堆吗？"——"一个正方形和一个薄的正方形！平的和薄的！然后其他的还是那样。"他用立方体和球体等构造了一个长队列，将对应的两维的物体紧靠在一起。"你将什么放到了一起？"——"我两个两个地放到一起。"

在视觉条件下的分类是相同的类型：一个长的队列，前半部分是三维的物体，后半部分是对应的两维物体。这两个部分是：(1)立方体，球体，立方体，球体，两个小球体，两个小立方体；(2)两个圆形，两个正方形，两个小圆形，两个小正方形。

为了进行比较，下面我们举同样水平的两个例子，在这两个例子中，允许受试者始终看见那些成分。

斯雷(4岁11个月)　在一个隔间内将大立方体，大长方形和小正方形排成一行。然后他将两个椭圆放到这个队列的开头部分，将两个圆形放到结尾部分。他继而放上两个椭圆球和两个长方体，整个队列的形状像个马蹄形。实验者劝他将这划分为两个集合，一个隔间里放一个；于是他在右边的隔间里构造了另一个队列，这个队列的组成都是相同的对子(两个圆形，两个正方形，两个立方体和两个球体)。"这一间里的所有的东西都相像吗？"——"是的，因为这个和这个(每一对都指了)都是一样的。"在第二个隔间里，他构造了类似的队列。

实验者将物体分为曲线的对直线的，三维的对两维的，但他未接受实验者的这些划分。

古益(4岁2个月)　也是开始于一个长的队列，但他的相对进步之处在于前八个成分都是三维的(大、小椭圆球，大球体，大立方体，大、小长方体，小球体和小立方体)，而另八个成分都是两维的(但未按相似性连接起来)。然后要求他将这组成分在两个隔间里加以安排，这样每一间里都有一个"家"。尽管他年幼，但他的答复却属于阶段Ⅱ。他将所有的曲线成分放到一起，所有的直线成分放到一起，并且说："这个房间里是这个球和这些球……妈妈，爸爸，孩子，父母，这是一个圆的家。在这里是方的家：这是大桶，这是一个小桶……"(他组合这些东西的方式如同人们在起居室里一样。)但是，当实验者要他改变他的标准时，他连续四次都回到圆成分和方成分的两分法，他每一次都使用了同样的假托的名字。

这些反应同处于同样水平的儿童在视觉条件下做出的那些反应非常相似。存在的一些小的差别是不具体，这完全是由于做出触觉比较的困难。它们非得是连续的。这种比较的方法也在早期阶段的视觉领域内出现，所以在触觉领域内肯定总是要出现这种现象这一事实，并没有使这种实验方式导致任何新的现象。这些实验没有发现新的事实，而只是进一步地检查了我们关于事后认识和事前预见的那些假设罢了。

最原始的反应是挑出一些由完全相同的成分组成的对子，或者是挑选几个似乎有意义的物体而忘记了其他的东西(参见罗斯)。这只不过是连续同化的另一个例子，我们知道，这是非常年幼儿童的典型的反应。在第一章第3节中，当我们要求他们发现与

某一物体相像的成分（"给我一个像这样的"等）时，我们已经看到过。然而，由于触觉比较往往是连续的，我们便发现这种类型的行为一直持续到较大年龄。

一旦受试者设法去创造某种集合，他的行为便相应于我们所知道的阶段Ⅰ的图形的集合。这些构造自然不如视觉条件下详细，而且小堆占的比例也大些。最常见的结构是单一的或双重的队列，其成分之间的关系有着不同程度的变化。不过我们也发现了一些两维的和三维的圆形构造，而且我们也看到了这两种构造的各种变化。说明这些安排实际上只是一种图形集合或复杂对象的最有把握的标志是，当受试者最后在看见这些物体的条件下对它们分类时，他还是重新摆出了这种构造。甚至在触觉的理解方式下仍然发现图形的集合这一事实有着重大的意义，因为它进一步证实了我们的解释，即这种现象乃是内涵和外延没有协调的结果。图形的集合必须不仅仅是感觉构造的模仿。它们不同于装饰画，而装饰画的唯一目的是产生一幅合意的图片。因为如果将图形的集合等同于装饰画，那么我们就不能理解它们表现出这些并非任意安排的、其成分由触觉而觉察到的那些分类的原因。那种认为儿童对于通过这种方式而觉察到的成分加以安排以符合一种内化了的视觉图像的说法，几乎不能解释他在不能看见它们时还是要构造这些构造的原因。我们已经做出的解释是，那些构成其起点的相似的关系是内涵的，而且，这些儿童构造由它们引起的外延的唯一方式却是空间的。从儿童的观点来看，感知-运动的格式没有外延，唯一的一种外延是附属于感知的组合，它或者是空间的，或者是时间的。如果这种解释正确，我们必定会指望出现图形的集合，甚至当受试者仅仅通过触觉和动觉来觉察时，情况也是如此。而这正是我们的发现。

视觉的分类和触觉的分类的主要差别是，第二个条件对于最初发现总的分类标准起阻碍作用。在阶段Ⅰ，儿童的确不是自己发现那些标准的，因为这些图形集合的实质在于运用（连续的项目之间的）相似性以及功能或空间特征的不相干的联系，而不是运用一个真正分类之普遍的相似性。然而，只要受试者能够看见所有这些成分，实验者常常就能够或者通过使用"家"这样的词汇（见古益），或者只是通过口头列举的要求来激起对于共同特性的寻求。如果受试者不能看见那些物体，那么阻力就大些。不过这种差别比较微小，而且不难解释：因为比较一定得是连续的，所以连续的同化作用发生得就较慢，而我们在上一章中所讲的那种类型的事后认识就比较困难。结果，儿童便也难以做出那种最终将使他发现共同特性的事前预见（或部分预见）（参见第七章第3节）。

3. 阶段Ⅱ：非图形集合；首先通过尝试与错误，然后通过预见而发现的单一标准；发现其他标准的困难

阶段Ⅱ是非图形集合阶段，一旦受试者能够在不考虑特殊的空间构造的情况下，仅仅基于相似的关系来构造集合，这个阶段便开始了（大约在5岁6个月）。不过，我们还

是可以根据事前预见的程度来找出一些连续的步骤或中间阶段。这些中间阶段中的第一个阶段表现了从阶段Ⅰ向阶段Ⅱ的过渡，这时候，儿童所能做的只是通过尝试与错误来发现一个标准。

下面是这个过渡阶段的一些例子：

雷姆(5岁6个月) 逐个地触摸了这些物体，并仔细地用手指指端部分来检查它们。然后他将它们成对地组合起来，有几对是由完全相同的物体组成(两个立方体，两个正方形，两个球体等)，另一些由一个三维的成分同一个两维的成分组成(一个立方体和一个正方形等)。最后，他将所有的直线物体放进一个隔间，所有的曲线物体放进另一个隔间。但他不能解释他这么做的原因，当实验者指着那些曲线物体并且问“它们有点相像吗?”时，他回答说：“因为它们小些和大些(差异性比相似性给他的印象更深些!)。”——“不过，它们是否有点像?”——“是的，两个球。”——“这里的(直线物体)，它们是否有点像?”——“是的，两块砖。”——“为什么你将它们放到一起?”——“它们相像。”——“怎么像?”——“它们是一块大的和一块小的卡片。是的，它们是砖。”再给他其中的几个物体让他触摸，他说“一个大球，一个正方形”等，最后说，“在这里，我摸到了圆的”。——“其他的呢?”——“其他的是正方形。”实验者几次想使他改变标准，但每次他都在最后做出了相同的划分：圆的成分和方的成分。令人奇怪的是，最后的在视觉条件下的分类还不如触觉条件下的分类合适：他摆出了几对，有几对是完全相同的，有几对相似，但这些对子都混杂在一起，而没有考虑到线的标准。

贺夫(5岁6个月) 非常仔细地检验了这些物体，开始时未对它们分类。然后她说：“这些大的方块！大的球!”并将两个立方体放到一边，两个球体放到另一边。她摸到了一个小圆形并将它“同其他的圆东西放到一起”，然后摸到一个小正方形：“我要将它同大正方形放到一起。”她继续如此地进行，一次拿一个物体，最后她组成两个没有作再划分的集合：“大的和小的正方形、球，大的和小的在一起。”运用各种方法来使她改变标准，但最后她还是构成那个相同的两分法，虽然其中也出现过一些不同的队列(所有这些队列都表现了大、小成分的交替)。视觉条件下的分类也是将物体分成曲线的对直线的，但每一个集合都再进一步地划分为大的和小的。

蔡义(5岁6个月) 构成了三堆。第一堆有两个球体(一大一小)，一个圆形；第二堆有大的和小的正方形；第三堆有大的和小的正方体。“你能将它们分成两堆吗?”——“方的放到这里，圆的放到那里。”蔡义未能发现第二个标准。实验者将一个大球体放到一边，小球体放到另一边：“大的在一边，小的在一边。”——“你能换一种方法吗?”——“不能。”——(实验者开始将一个球体和一个圆块放到一起。)——“一边是厚的东西，一边是小的东西。”

乔司(5岁6个月) 一开始构造了六堆，每堆由一对成分组成：两个大球体，两个小立方体，两个大立方体，两个大正方形，两个大圆形，两个小球体，两个小正

方形，两个小圆形。“能将相同的东西摆成两堆吗？”——“（他将立方体放到一边，球体放到另一边，然后将圆形同球体放到一起。）因为它们也是圆的”等等。他未能发现第二种标准。当实验者开始摆成一个或两个分类时，他或者不能继续进行下去，或者回到那个曲线物体对直线物体的划分。

斯涛（5岁6个月） 遵循了非常相同的原则：“是的，圆的同圆的在一起。”——“你在干什么？”——“球同球放在一起，圆形和球都是圆的。”——“另一边呢？”——“方的。另一边都是方的。”另一个标准：他将物体分成三个集合，这三个集合是正方形，圆形和砖块（立方体）。“你能将它们放成两堆吗？”——（他回到“方的”和“圆的”那两个集合去。）在视觉条件下的分类与此相同。

德劳（5岁7个月） 准备分成三堆，但除了对第一堆能说出是“圆东西”外，他无法说出这几堆是什么。事实上他构造了四堆：球体，立方体，正方形和圆块。“你一共摆了几堆？”——“三堆。”——“摸摸看。”——“（他摸了所有的四堆）三堆。”——“再摸摸看。”——“三堆。”——“第一堆是什么？”——“球。”——“第二堆呢？”——“方块（＝立方体）。”——“第三堆呢？”——“像墙一样的方块（平的东西）。”——“第四堆呢？”——“圆形。”——“我想要你在这两个隔间里摆成两堆。第一堆放些什么？”——“方的。”——“第二堆呢？”——“圆的（他的确将这些成分划分为曲线的和直线的）。”他未能发现第二种标准。实验者开始按大小分类：“那是一个小的和一个大的。”——“继续下去。”——“圆的放到那里，方的放在这里。”给他看一个完全的分类（三维的物体对两维的物体）：“我是怎么放的？”——“平的东西和厚实的东西。”

在这些例子中，存在着两个有趣的特征。第一，几个受试者（雷姆、贺夫、斯涛）开始时的实际的分类是一些大的集合（直线物体对曲线物体），而不是从一些小的集合开始逐渐构成大的，这正是他们在看见材料的情况下的所为。我们在上一章（第3节）中已经注意到，如果让儿童看见这些材料并要求他们对安排做出预见，他们是这么做的：他们预见一些大的集合。看来，似乎一旦儿童的发展超过了图形集合的阶段，触觉的感知便迫使他去抽象那些有关的特性：事后认识和不完全预见的相互作用，乃是这种实验过程之困难性的一个不可避免的结果，在这里，同时的比较被排除了。第二，我们应该特别注意这么一个事实，即同受试者能够看着材料作比较，在这种情况下，事后认识有大大提早出现的倾向。因此，在尝试与错误的行为中偶尔隐约地表示出来的预见也出现得早些。于是，当贺夫发现了厚方块和球之间的对照时，她继而便考虑了一个比较全面的计划并付诸实施。斯涛是这个方面的另一个例子。

第二组受试者达到了真正的不完全的预见，即在触摸了那些物体之后，他们随即预见了第一个标准，尽管他们随后并不能改变这个标准。由于那些我们已经讨论过的原因，这种不完全预见能够在相当早的时候出现。

傅里（5岁2个月） 首先触摸了每一个物体。“现在你准备怎么办？第一个

隔间里放什么?”——“圆的东西。”——“第二个呢?”——“方的东西。”在他分完时,要求他作第二种分类,但他未取得成功。然后要求他描绘他刚刚作了分类的那些物体:“它们是什么?”——“方的和圆的。”——“还有吗?”——“大方块和小方块。”——“你能换一种方法摆成两堆吗?”——“不能。”——“试试看。”——(他还是摆出原先的两分法。)但在实验者开始根据大小分类时,他理解了:“小的放在这里,大的放在那里。”他还是不能发现其他的标准,但在实验者将这些成分划分为三维的和两维的时,他也理解:“薄的东西和厚的东西。”

阿李(5岁3个月) 在他列举了之后,“第一个隔间里放什么?”——“圆的。”——“另一个呢?”——“方的。”——“如果要你摆成另外的两堆,同前面的不一样,你怎么摆?”——“圆的和方的。”——“你已经那么分过了,想一想你摸过的那些东西,它们像什么?”——“小的,中等的和大的。”——“那么再将它们分成两堆,但要同前面的不一样。”——(他还是回到圆的成分和方的成分去。)另一方面,他也理解了大对小的两分法和“厚”对“薄”的两分法,其中有一次,实验者在开始分的时候未作任何评论。

第三组的受试者并未达到真正的不完全预见,而是仅仅像贺夫和斯涛等人那样通过尝试与错误达到部分的不完全预见,但他们能在随后改变标准。这种反应类型不常见到。我们只举一个例子。

韦伯(5岁9个月) 用一只手检验了每一个物体,未作任何评论。“我想要你将相像的东西放到一起。你知道怎么放吗?”——“知道,球在一起,砖块,砖块……”在实际的分类中,她将三维的物体放到一边,两维的物体放到另一边,并重复说:“我要将球放到一起,然后将砖放到一起。那是个大球。”——“好。现在我想要你换一种方法,你能想出一个新方法吗?”——“(她将物体分成曲线的和直线的)是的,我要将砖放在一起,球放在一起。(像前面那样,她摆出了一个完全的两分法)这一次我得将平的和高的放到一起。”她未能发现第三个标准(最后她摆出一个由三维物体组成的集合和两个由两维物体组成的集合,后两个集合中的一个由圆形组成,另一个由混杂在一起的正方形和圆形组成)。在视觉条件下的分类只分成一对对的物体。

最后,我们来看看第四组受试者的情况。这些都是明显的阶段Ⅱ的例子。他们表现了对于第一个标准的不完全的预见,然后便通过尝试与错误而发现其他的标准。

里斯(6岁3个月) “你准备怎么办?”——“长方形,然后正方形,正方形……”——“另一边呢?”——“所有剩下的。”——“它们是什么?”——“蛋,然后是圆的。”他成功地将材料完全地两分为直线物体和曲线物体。要求发现第二种标准,他花了很长时间去组合,最后成功地将小成分放在一边,大成分放在另一边。但他不能系统地阐述这种划分,只是说:“我将圆的和方的放到了一起,这样它们就(同第一次)一样了。”——“你能分成三堆吗?”——(他将物体分为圆的、方的和椭圆

的。）

高尔（6岁3个月） 在触摸了物体之后预见："球和砖。"实际的构造是一个由直线成分组成的集合和另一个由曲线和直线成分混合的集合。"你是怎么分的？"——"我将球放到了这里，将砖放到那里。"要求发现第二种标准，他说："我不知道，"但还是试了试，最后两分为三维的和两维的物体。在视觉的条件下他重复了这个分类。

布路（6岁6个月） "你将摆成几堆？"——"三堆：方的，圆的和小的圆的。"在实际的构造中，开始时他这么分，但后来将方的再分为大的和小的："你想分成三堆还是四堆？"——"四堆。"后来，在他继续作的构造中，他发现了两维物体和三维物体的差别，并将四堆再分为八堆。这样他便几乎构造了一个以三个标准为基础的型式。"一共是几堆？"——"八堆。"——"它们是什么？"——（他根据记忆正确地列举了它们。）——"如果我要你分成两堆，你怎么办？"——"方的和圆的。"在第一次要求他作另外的两分时，他并未想到要利用他先前的那些再划分。然后他想到了："小的和大的。"——"还有吗？"——"扁的和厚的。"

马利（7岁3个月） 设想了四堆："正方形和立方体，圆形和球。"但在实际的构造中，他最后摆成三个集合：立方体，球体和两维的成分。"你能将所有的分成两堆吗？"——（尝试与错误，然后：）"那里的都是厚的，这里的都是薄的。"要求发现第二种标准，他最后的划分是大成分和小成分。他未能发现第三个标准。

在这些反应和那些处于同一水平的在视觉帮助下出现的反应之间只有很小的差别。第一种标准显然发现得很快，而第二种标准则要慢些。只要受试者能够改变标准，通常他从一开始就显示了相当大的机动性（这是同一般类型的实验相比较而言的）。在我们讨论阶段Ⅲ时，我们还要回到最后这一点上来。最后，在阶段Ⅱ，形状的标准最普遍，但有一、两个例外（如韦伯，她一开始便发现了两维和三维的两分法，但她未预见那个标准）。

4. 阶段Ⅲ：两种或三种标准的预见；结论

从7—8岁开始（个别的甚至从6岁6个月开始），我们的受试者便预见了前两种标准，通常是两分为大的对小的，三维的对两维的。从8—9岁开始，他们便容易预见所有三种标准。

奥格（6岁7个月） 检验了那些物体并且说："这些薄木片做的放到一起。这些表面是薄木板的。"——"然后呢？"——"所有用厚木块做的放到一起（三维的物体），薄木片做的放到一起（他按此做了）。"——"能换一种方法吗？"——"能，方的同方的在一起；然后砖块同方块，球同圆块在一起。"

他未能发现第三种标准，给他一个大的和一个小的长方体："我有两个方块，不，两块砖。哦，这倒是个办法！所有的小的放到一起，所有的大的放到一起。"

贲伯(6岁8个月)　立即说："圆的和方的。"——"能换一种方法吗?"——"小的同小的，大的同大的。"他未能发现第三种标准。给他一个立方体和一个正方形："这个薄。可以将薄的方块放到一边，厚的方块放到另一边。"——"剩下的怎么办?"——"你得将薄的圆的和厚的圆的放到另一间去。这样要摆成四堆。"

拉姆(7岁8个月)　"圆的和方的。"——"你能换一种方法吗?"——"一块扁的方块和一块扁的。"——"第二个隔间呢?"——"厚的圆的，厚的(他进行了两维物体对三维物体的分类)。"——"还能有一种方法吗?"——"?(他未能发现)"

赛恩(8岁5个月)　成功地预见了三种标准："我要将小的放到一边，大的放到另一边。"——"能换一种方法吗?"——"(她再次触摸了那些物体)将扁的放到一边，厚的放到另一边。"——"第三种方法呢?"——"圆形和正方形的在一边，长方体的和椭圆的在另一边。"

斯塔(8岁11个月)　说："两堆：方的和圆的。"但他随即在大的和小的之间作了区分，并根据两种标准划分了那些材料。他进一步根据维度的标准对它进行再划分。"能换一种方法吗?"——"能，四堆：将扁的正方形同扁的圆形放到一起，然后球和砖放到一起。"——"你能用第三种方法来分吗?"——"小的和大的。"

罗思(9岁7个月)　"首先，大的东西和小的东西。"——"能换一种方法吗?"——"圆的东西和方的东西。"——"再换一种。"——"圆的东西放到一边，方的东西放到另一边。"——"这个你刚刚说过，是吗？能再换一种方法吗?"——"能，扁的东西和厚的东西。"

贺恩(9岁10个月)　"圆的东西和方的东西。"——"换一种方法。"——"所有的扁的东西放到一边，另一边放不是扁的东西。"——"告诉我另一种方法。"——(他一边搔头一边列举了圆形和方形，然后列举了球和砖。)——"再换一种方法。"——"哦，我知道！所有的大的和所有的小的。"

我们需要根据实验的整个发展过程来看这些第Ⅲ阶段的例子。下面的数字是重要的。第一组结果得自于用第一组材料做的实验。

表XXI　运用第一组材料通过触摸而进行的分类(%)

G＝图形的集合；1，2，3表示使用标准的数目

年龄(受试者人数)	G	1	2	3
4(10)	80	20	0	0
5(26)	15	77	8	0
6(30)	5	82	13	0
7(20)	5	25	50	20
8(20)	0	15	40	45
9(24)	0	12.5	30	57.5
10(20)	0	5	35	60

根据一种标准的分类在6岁时达到最大量，根据两种标准的分类在7岁时达到最大量，而根据三种标准的分类则在10岁时达到最大量。在80%至90%的事例中，形状是选择的第一种标准。大小和维度的选择很少，在7岁之前很少选择它们。

下表得自用比较复杂的那组材料做的实验，这组材料中没有完全相同的成分。最后一栏是预见的程度。

表XXⅡ　运用比较复杂的第二组材料通过触摸而进行的分类(%)

G=图形的集合，1—4指标准的数目，A=预见

年龄(受试者人数)	G	1	2	3	4	A
4(8)	90	10	0	0	0	0
5(22)	54	41	5	0	0	9
6(14)	21	71	7	0	0	21
7(15)	20	33	27	13	7	40
8(20)	15	20	35	30	0	55
9(15)	13	0	33	53	0	87
10(17)	0	6	27	53	23	82
11—12(18)	0	0	16	53	31	93

第四个标准是指伸长的形状如长方体和椭圆体对正方形，圆形，立方体和球体。这个标准比较难以发现。

主要的结论是，作为完整的分类乃是由于运算的发展。分类和序列都可以看作是不同类型的感知的“格式塔”，前者涉及一个包含的巢式系列，而后者则体现对称的转换关系。这种解释造成了谬误。如果它们中的一个或两者都是感知的事情，那么我们就该发现，连续的运动和触摸的方式对于感知的限制将系统地阻碍这种发展，因为这排除了对于整体的同时的理解。而事实上触觉的分类却容易些，至少在某些方面是如此。在序列方面也有非常相似的情况(见第九章)。

如果我们用电影来显示其顺序并配之以文字说明，就可以清楚地看到这种类型的研究有一个突出的特征。儿童们很少再回过去检验他已经检验过的那些物体以同他正在触摸的物体作比较。他们的行为给人的印象是，似乎实际上已经一起“看到”过所有这些东西。这有两个原因。第一，在我们要求他们对这些物体加以分类之前，他们已经将它们摸过一遍。在第一次触摸物体时，许多儿童感到一定得列举这些物体。极为经常的情况是，他们的口头描述相当含糊，但他们的确使用了语言(既有外部语言，毫无疑问地也有内部语言)，这样，在特别被要求做出列举的儿童和未被要求作列举的儿童之间只有很小的差别。其次，虽然他们很少在行动上再回过去触摸那些已经检验过的物体，但在思想上却的确有回过去的活动或追溯。记忆和言语的象征两者在这方面无疑

都发挥了作用,但整个的过程仍是一个连续的再组织过程,这个过程伴随有根据连续的感知而进行的对于关系的不断出现的重新整理。

换言之,感知受到限制这个事实,意味着触觉的比较将给受试者造成一种更为能动的组织。实际的比较往往是分别做出的(因为必须得这样),但是,现在受试者通过引进一种更为合适的事后认识来填补了这些空隙,并以它来代替以前可能有过的同时的感知,这就使这种比较能够像在看见的情况下所做出的比较一样。因此,在这种实验中,这种事后认识的重要性就特别明显。尽管我们在讨论视觉条件下的分类时已经注意到它的存在。

所有这些都解释了事前预见之所以较早出现而且看上去相对容易一些的原因。甚至5岁的儿童可能就开始预见第一种标准(见第3节中傅里和阿里的所为),虽然比较常见的是那种从儿童的尝试与错误的行为中产生的不完全的预见,但它也是最后的运算反应的真正的先行者。我们在较早的时候就曾经提到,事后认识和事前预见是密切联系的。而目前的这些发现则进一步地证实了那个结论:当同化的格式根据事后认识经历了足够程度的再形成和再适应时,它就成了对于未来之比较的事前预见。

事后认识和事前预见的相互作用,乃是存在于这些观察之中的最显著特征——我们的受试者能够抽象出相当多的成分的共同特性(我们发现,在实验者的一定程度的推动下,甚至第Ⅰ阶段的儿童也在这么做)这一事实——背后的东西。这种抽取本身便极其清楚地证明了这么一个事实,即分类乃是一个能动的过程,而不仅仅是一个感知的过程。这些儿童并没有被那些在视觉的感知中可能会出现的全部的复杂关系所控制或被它们弄得不知所措,这就是他们能够通过事后认识和事前预见的运用来进行一个真正构造的原因。诚然,他们抽象的那些特性(首先是形状,然后在第Ⅲ阶段则是大小和维度)符合于一定的感知可变性。因此,批评家可能会争辩说,这种抽象得自于感知,或得自于物体本身。然而,同其他地方的情况一样,这里的这个(抽象)概念比感知要更丰富些。换言之,抽象不仅意指从感知的结果中提取出一些关系,而且要给感知的结果增加一些关系。认识到诸如方的和圆的,或大的和小的,或扁的和厚的这些共同特征的存在便意味着根据受试者的动作以及物体的特性来构造那么多的格式:一个正方形(甚至一个物质的正方形)乃是一个其四条边和四个角相类似的图形;它们事实上是相等的,但是,只有在受试者通过其活动(通过衡量等等)将这个特性赋予它们时,它们才具有这个特性的。更为概括的说法是,分类依赖于共同的特性,但如是没有受试者的活动,这些特性就不能成为"共同的",虽然如果物体本身不宜分类,受试者的活动也就完全无用。抽象乃是活动的果实;在只允许使用触觉的情况下,触觉比较的空隙却有助于而不是有碍于抽象,其原因正在于此。

总之,我们所发现的视觉分类和触觉分类的那些相同之处和相异之处都指出了它们的运算的特征。当我们将分类和序列(触觉的和视觉的)加以比较时,这个论点将更为增强,因为在那里,感知和运算的对立要更为尖锐。

第九章 序 列[①]

在第一至第四章，我们发现运算分类的困难在很大程度上是由于这么一个事实，即年幼儿童不能协调外延和内涵。这种协调与感知不相干，它在感知-运动组织中也不发挥作用。结果我们便发现图形集合之间的相当大的时间滞差，而这些图形结构是受感知的和感知-运动的构造所控制的，是一些等级的分类，而且它们依赖于类包含关系。倍增的分类(如矩阵)从外观上看稍微接近于相应的感知组织，因为物体的对称的或直觉的安排，比较接近地反映了两个或数个特性的逻辑干扰。然而我们也发现，运算的组织并不是持续地从感知的组织中发展出来的，它要依靠自己的构造——如果没有它，矩阵问题的正确的解决办法就不能达到。现在我们要了解一下，序列的发展是否与我们已经发现的分类的发展相平行。

1. 问题的陈述

序列和分类之间有两个主要的差别。第一，人们可以理解一个关系，而不能理解一个类别本身。第二，序列的构造组成了一个感知上的“好的形式”，它比矩阵的结构显然要简单些和基本些。如果将感知的结构看作是运算结构的唯一来源，那么，序列就应该早在分类之前出现。但实际上并非如此。虽然它的出现稍微早一些，但并不早于7岁或8岁。

下面是出现的两个主要的问题：

(1) 感知的构造是否构成了运算的序列从中抽象出来的材料？

(2) 运算的序列与感知的序列有什么根本的不同？这种不同是否足以构成运算的序列出现较晚的原因？

第一个问题确实需要对感知加以分析，而这种分析是超出我们目前的研究范围的。我们现在所能做的只是提醒读者几个事实，而这些事实同第二个问题的解决显然是相关的。

在感知-运动的水平上就存在着序列，即使有关的行为并不系统，情况也是如此。

---

① 与M.查尼塔(Zanetta)合作。

一个必要的条件是，这个序列的成分之间的差别必须要相当大，以致儿童只要看到这些材料就能够将它们拣出来。我们知道，这种类型的序列就是八个月的儿童通过利用一些体积减小的砖块来建造房子的方式，或者说是在稍后的时候玩弄蒙台梭利盒子的方式。这都是些序列方面的例子；而且，虽然它们依赖于关系的感知，但也暗示了一个不仅仅是感知的感知-运动格式。人们有理由问，这种类型的格式是否真的处于序列的感知构造意识之后，而不是在它之前。

皮亚杰和莫夫的一项研究与这个问题有关。我们将用不同长度的小棒构成的一个序列的安排呈现给 4—10 岁的儿童，其中有些是等差的，这样，这个序列就能直线上升。有些是不等差的，但它们还是有规律的。当小棒按一条直线加以安排时，这些小棒的顶部便构成了加速抛物线或减速抛物线，即它们的差自左向右有规律地递增或递减。提出的问题是要求受试者比较由相邻的成分组成的两对之差。第一对靠近这个系列的开始部分，第二对则靠近结尾部分。比较年幼的儿童(5—7 岁)需要通过测量每一对的差来做出比较；而年长儿童(9—10 岁)则能够通过考虑这个序列的构造(即考虑那些小棒顶部形成的那条线的形状)而立即说出它们的差是相等还是不相等。看来这个实验证明，只是在到了较大的年龄时，儿童才利用这整个的构造。对照实验是要求他们比较由相邻成分组成的邻近的两对的差。结果证明是相同的。

此外，我们还想起了兰伯瑟尔关于序列安排之效果的研究，这个研究表明等差的变换随着年龄而增加。这进一步证实，总的形状，即序列的构造只起第二位的作用。

这些已经知道的事实似乎表明，相应于序列构造的感知格式并不是原始材料，而且它本身要受到受试者活动的影响。虽然这些活动包括感知的活动，但它也包括那些涉及整理物体的活动(它们是感知-运动的)。换言之，即使受试者具有这种对于序列构造的直接感知，那也是因为他将它看作是自己能够构造或重新构造的结构。序列的运算只是先前活动的内化的结果。因此，它们的起源必须从感知-运动格式而不是纯粹的感知格式中去搜寻。

现在我们可以将第二个问题重新阐述如下。我们认为，构成序列构造的认识之基础的那种格式，乃是从整个的活动，而不是从单纯的感知中产生的。因此，我们应该找出从图形到运算序列的那些中间步骤。同我们研究分类时的情况一样，这将帮助我们确定后者往前者上增加了些什么。目前的困难在于，感知的序列构造同有关的运算组织的对应比图形集合同基于包含之分类的对应要更紧密些。既然运算的序列事实上并不明显地比运算的分类出现得早，那么我们就得研究这些中间的阶段；而在这些中间阶段中，序列的构造比运算的序列要提前出现。在研究过程中，我们将搞清这两者之间的差别，而这将有助于解释运算的序列之所以没有较早出现的原因。

这种类型的中间步骤是可以观察到的，因为序列具有图形的特征，所以它们容易被看作是一些好的感知形式。因此，在 5—6 岁时序列的构造便引起了一种不完全的预见，而它是不能等同于分类领域的不完全预见的，因为类别本身是不能被理解的。

我们已经看到在事前预见和有关类别之附加和倍增的那些运算之间的某种关系。现在我们便来研究对于序列构造的不完全预见，以便发现它在前运算的水平上出现的方式和原因。不过，我们还要搞清楚为什么这种不完全的预见还不足以造成序列方面思想活动的运算组织。

人们无法将序列只产生于图形因素的那些方面和那些同运算本身有联系的方面分离开来。但是，同前面的情况一样，我们还是可以分析仅仅通过触觉而觉察到的物体的序列，然后再将这些"触觉的序列"同普通的视觉序列加以比较。甚至在触觉的序列中，我们也能够要求受试者先触摸那些小棒，然后再画出他想要构成的那个构造图。此后，我们便可以将那些产生于触觉检验的图形的预见同那些产生于视觉的预见加以比较。

2. 序列和对于用看见的成分构造序列的预见

许多年以前，皮亚杰和斯泽明斯卡(Szeminska)在一个用长度为 9－16.2cm 以及一套随后用于插在一个完全序列之间的中等长度的一些小棒所做的实验中，研究了序列的发展。[①] 我们发现了三个不同的阶段。在第一阶段，儿童不能将最初的十个成分依次排列。他将它们摆成一些由两个、三个或四个成分组成的小序列，而且不能在随后将它们放到一起。在第二阶段，他通过一个尝试与错误的过程试验性地摆成一个最初的序列。他只能通过进一步的尝试与错误将增加的一些成分插进去，而且通常他得从头开始。在第三阶段(开始于 7－8 岁)，儿童进行这个过程时，便总是先找最小(或最大)的成分，然后再在剩下的那些中找最小的成分，等等。可以将这个过程(而且仅仅是这个过程)看作是一种适当的运算，因为这意味着他知道，一个给定的成分比它前面的大而同时又比它后面的小(即 $E>D$、C 等，同时 $E<F$、G 等)。这种运算的可逆性伴随着那种在没有尝试与错误的情况下正确地插入新成分的能力。

为了进一步证实达到第三阶段的年龄和这三个阶段的连续的顺序，我们重复了这个实验。B. 奥克西里亚(Oxilia)和 E. 希尔克斯(Schircks)又利用许多统计的对照以使之标准化。他们的结果将出现在英海尔德和万 · 邦的一部关于标准化的发展测验的著作之中。下表 XXIII 即取之于该著作，它为随后的研究提供了一个非常有用的起点。(删去了中间插入的那一组的结果，因为它们同我们目前的研究目的并不直接相关。)

系统化的序列直到 7－8 岁时才能达到，至少对这一组受试者说是如此。年龄部分地同特定的实验相关。正像我们在其他地方[②]注意到的那样，重量序列的发展比长度序列晚两年。此外，我们还发现，如果我们使用的成分较少，或成分之间的差异较大，那

---

① 参见皮亚杰和斯泽明斯卡:《儿童的数概念》第六章。

② 皮亚杰和英海尔德:《儿童的数量的发展》。

么长度序列的改进是相当快的。但不论这两种情况中的哪一种,都意味着我们在衡量感知对于一个直观整体而不是运算推理的调节作用。事实上,正像我们马上就会看到的那样,这种类型的感知调节乃是一个相当早的发展。

表 XXⅢ 序列的发展(%)

年龄(受试者人数)	4(15)	5(34)	6(32)	7(32)	8(21)
阶段ⅠA. 无序列的意图	53	18	7	0	0
阶段ⅠB. 不相协调的小序列	47	61	34	22	0
阶段Ⅱ. 通过尝试与错误取得成功	0	12	25	15	5
阶段Ⅲ. 用运算的方法取得成功	0	9	34	63	95

另一方面,如果我们在不改变成分之间差异的情况下增加成分的数目(即保持成分之间的很小的差异,让儿童实际通过用一个成分去衡量另一个成分来比较小棒),那么,达到第Ⅲ阶段的平均年龄很可能仍然不变:只要发现了一个系统的方法,他们就能够加以概括。

知道了达到运算序列同达到运算分类的年龄相同之后,我们就可以转而研究序列的预见,以便将直观的成分同那些与逻辑格式的形成相关的运算的成分分离开来。

我们首先要强调,运算序列的格式必定是一种预见。受试者事前知道,通过在剩下的那些成分中挑出最小的成分,他就能够造一个序列,而这个序列中的每一个项目都比他前面的那些项目大些;这就是他之所以能够避免错误以及避免前后矛盾的原因。A. 雷伊(Rey)的一个类似的实验进一步证实了序列格式的预见性。雷伊向他的受试者呈现一张 10—15cm² 的正方形的纸,纸上画了一个 2—3cm² 的小正方形,要求受试者在这张纸上画一个 2—3cm² 的小正方形,一个尽可能大的正方形和尽可能小的正方形。7－8 岁的受试者立即画出了一个很小的正方形(1—2mm²)和另一个沿着纸边画出的大正方形。然而,年幼的受试者只是在纸上原先有的那个正方形的附近画,他们努力使自己画出的正方形比原有的稍微大些和小些。使人奇怪的是,他们甚至连这一点也未做好,他们画出的正方形基本上都沿着原有那个的边线。因为他们没有预见的格式,所以他们就不能想象画在这张纸上的最大和最小的正方形。不用说,雷伊还发现了在两个极端之间的相当多种多样的中间的反应:逐步接近的预见,同时还伴有对于这个研究不同方面的见识。

我们的问题是相当困难的。在雷伊的实验中,给受试者显示的是一个成分,而且受试者要想象一个完全是想象中的序列的两个极端。在我们的实验中,受试者察觉到这个序列的所有的成分,然后,要求他在实际构造这个序列之前想象(或画出)这个序列的安排。他要搞出来的唯一的东西是序列的形式,因为无论是通过看(本节中的实验)还是通过摸(下一节的实验),他都能觉察到构成这个序列的成分中的每一个成分。

第一个问题是,儿童是否要到 7－8 岁的运算水平时才能预见这个序列。或者说,是否存在一个他们虽然能够预见这个序列之结构(如画出一套有顺序的成分)但不能在其后自己顺次排列这些成分以进一步证实其预见的阶段。如果实践证明有这种情况,

那么我们就想搞清这种不完全的预见是如何产生的，以及它为什么还不足以造成运算组织的原因。认为儿童能够画出一个序列而不能摆出这个序列的说法有自相矛盾之处，因为将一些抽象的图形符号整理有序几乎并不比将实际的材料整理有序容易些。

事实上这种自相矛盾并不存在，因为第二个假设证明是正确的。我们的实验方法如下。首先，我们向受试者显示四个大小不一的洋娃娃，要求他们有序地加以整理。这是让他知道要求他干什么。然后给他 10 根剖面为 0.5cm^2，长度为 9－16.2cm（差为 0.8cm）的涂有颜色的小棒。将这些小棒杂混地放在一起，要求受试者像安排洋娃娃那样将它们加以排列。在他实际安排之前，先要求他“猜”他的安排将是什么并将它画出来。存在着两种画图的方法。我们可以要求他画一幅彩图；每根小棒的颜色各不相同，将不同颜色的蜡笔交给儿童，让他用蜡笔的颜色去配小棒的颜色。在儿童将蜡笔同小棒相配时允许他接触小棒，但要在他配好之后，随即将小棒放回原处。在这个阶段，允许他作重新安排。如果彩图画得正确，就要求他用普通的铅笔画。这对年幼儿童尤其有用。画完图后，他就开始摆实际的序列。这意味着我们可以将他图形预见的水平同行为水平加以比较。

下面是得之于 88 名受试者的结果。我们发现，在画图方面有三个水平：(1)完全的和分析的预见，即在颜色和大小方面与后来的正确的序列完全对应；(2)总括的预见，即铅笔画正确，或彩色画的大小顺序正确，但画中的颜色与实际物体的颜色不符；(3)失败。在实际的序列中，我们区分为三种，一种是通过运算而得到的正确的解决；一种通过尝试与错误而得到的正确的解决；还有一种是不正确的解决。

表 XXIV 序列的预见和行为（%）

年 龄	4	5	6	7	8—9
（受试者人数）	(19)	(33)	(19)	(10)	(7)
Ⅰ.不能预见	89	42	5	0	0
总括的预见	11	55	73	20	0
分析的预见	0	3	22	80	100
Ⅱ.序列行为失败	84	54	42	0	0
通过尝试与错误而成功	16	40	36	20	14
运算的序列	0	6	22	80	86

我们最好记住，图形的预见给实际的序列提供了一定数量的实践。这就是表 XXIV 所显示的 4—7 岁受试者的实验结果稍微比表 XXIII 好一些的原因。对于 8—9 岁的受试者来说，则没有明显的差别，但我们仅仅实验了这个年龄组的 7 名受试者。然而重要的一点是，在 5—6 岁时，图形的预见明显地早于实际的序列。在 5 岁时，正确预见的数字是 55％和 3％，而实际的序列是 40％和 6％。在 6 岁时，它们的数字分别是 73％、20％和 36％、20％。如果我们记住，虽然“分析的预见”极为明显地对应于运算的序列（只有

一种例外,即两者同时出现),但"总括的"预见同通过尝试与错误而得到的序列却很少有相似之处,那么这些结果就更为突出。总括的预见是指,虽然一根根线条的颜色同小棒的颜色并不对应,但受试者能够正确地、没有尝试与错误地画出那个序列。所以,看来5岁或6岁的儿童似乎在他们能够以运算的方式将物体构成序列之前,就可以预见序列的形式,至少在6岁时,预见甚至也要早于通过尝试与错误而获得的正确的解决办法。

在对这些差异加以解释之前,我们最好先研究几个实录以搞清这些阶段之间的质的差别。

阶段Ⅰ:无预见——在这个阶段,儿童不能在他们的图画中预见那个序列,他们也不能在后来构造它。我们既不能说画图先进些,也不能说行为先进些:两者的结果都是一些由两个或三个成分组成的一些小的不相连的集合。

符拉(4岁) 给了彩笔以后,符拉从纸的这一边到另一边画了几根同样长度的线条,还有两根比其他线条短十倍的小线条。铅笔画是:(1)一根长线,一根短线;(2)五根长线(三短两长)。实际的序列是一组不协调的对子。

季尔(4岁8个月) 画了九根长短不一的彩色线条,长线条长度方面的变化有时达几厘米,而短的却基本上相等。铅笔画是七根线条,都比较相似,而且实际的序列也不比这好些。我们还要求季尔用彩色蜡笔临摹由实验者摆出的一个正确的序列。她画的前三根线一根比一根长,第四根和第五根同样长,第六根比第七根短些但同第八根一样长,第九根是全部中最短的一根。

考尔(5岁5个月) 尽管年龄略大一些,但他用四个洋娃娃作的预备性的安排没有成功。实验者替他按顺序排好。将小棒呈现出来后,他首先画出的是三根同样长的线条,随后的则短些,颜色任意;第二次画出的是九根黑线,一根黄线,都一样长。他第三次画出的线条顺序为2,1,9,3,8,2,1(这些数字对应于长短)。他的实际序列首先是2,4;然后是2,3;然后是1,2,7,5,3,6,4,9,8,10(这些是小棒的号码)。

希尔(4岁5个月) 安排洋娃娃的顺序正确。"现在我要请你给我画这些小棒,但画的顺序是,从最短的开始,然后稍微长些的,然后再长些的,一直画到所有这些中最长的为止。"——(铅笔画:2,1,4,10;然后是10,2,6,8,7。实际的序列是:1,3,7;然后是8,7;然后是两个不协调的序列:1,3,7,10和2,4,8,9)。

柴阿(4岁5个月) 对洋娃娃的安排正确。图画:1,3,9,7,4;然后在这个的左边是5,8,6,2,这样,整个的顺序是5,8,6,2,1,3,9,7,4。实际的序列是:2,8,9,3,4,10;然后是2,4,7(很不协调)。

乔斯(5岁6个月) 对于洋娃娃的安排正确。铅笔画:2,4,5,6,8,7,3,9。实际的序列是:1,9,10(停止)。

除了一些由两、三个成分组成的很不协调的小序列之外,这些图画中不存在预见。

实际的序列也是同样的类型。虽然可以将图画中的部分的序列看作是预见，但在实际上，无论是在绘画中还是在对物体本身的安排中，都有着同一类型的活动。哪一个都不比另一个更先进。有时候第Ⅰ阶段儿童构成的小棒和代表它们的彩色线条之间的长度对应之所以比第Ⅱ阶段儿童还要好些，原因就在这里。因为他们一次仅仅临摹两个或三个成分。后来，当他们开始预见整个的结构时，绘画描绘了在实际行为之前的一个构造，这便导致了颜色和大小之间的分离。

第Ⅰ阶段引起了一个十分重要的问题。在分类的情况中，第Ⅰ阶段是图形集合的阶段，而第Ⅱ阶段的前逻辑的集合便不再依赖特定的空间构造。然而，在序列的情况中，第Ⅰ阶段是小的次序很不协调的阶段，而只有到了第Ⅱ阶段，我们才发现一种对于整个序列构造的图形的预见。换言之，在同分类时图形集合相对应的那个阶段中，显然不存在图形的序列结构，而且，只有到了分类的集合开始失去其图形特征时，序列之图形的预见才出现。然而，如果我们从"内涵"和"外延"的方面来提出这个问题(序列之"内涵"为它的次序，外延指它的一套成分)，那么这个问题便不存在了。我们知道，图形集合的出现是因为缺乏内涵和外延之间的协调，它是由于这么一个事实，即内涵的基础是那些仅仅通过连续的比较而造成的相似关系，而外延则依赖于实际的空间感知。对于第Ⅰ阶段所构成的那种小的很不协调的序列来讲，情况也是如此。受试者之不能预见一个完全的序列正同他不能构造它一样，其重要原因在于，两者都涉及一个从连续比较的顺序中构造一个空间的整体的问题。他所做的乃是一些造成包含两、三个成分的小序列的孤立的比较。然后他只是将这些小序列放成一线。这里也缺乏我们在分类中所发现的内涵与外延的协调。所以，这些小序列便确实相应于我们所熟悉的那些图形的集合和"复杂对象"。相反，为了像儿童们在第Ⅱ阶段那样预见序列的构造，他们就得达到内涵和外延之间的某种协调(不管这种协调是多么不完善)。分类中的非图形集合也是如此。

阶段Ⅱ：不完全预见。小阶段ⅡA：预见的绘画中的颜色和实际物体的颜色之间不对应。实际的序列通过尝试与错误进行，而且可能不成功。第Ⅱ阶段是极其有意思的。在这个阶段，儿童能够在他的图画中描绘正确的序列(偶尔有一、两次颜色方面的混淆，但能纠正，有时是立即纠正)。但在同时，他的实际行为通常仅仅是近似，即使是完全正确，他仍然需要相当多的尝试与错误。我们将先描绘小阶段ⅡA，在这个阶段中，图画中的颜色和长短之间没有联系。存在着许多个别差异，而这些变化同线条之间长度之差的规则有关。虽然我们不打算坚持这些细微的差别，但在个人的实录中，它们还是相当明显的。

巴德(5岁2个月) (在这项研究的开始阶段，我们使用了相同颜色的九根小棒)"想办法从最长的往最短的安排。你能猜出它们将怎么摆吗?"——"能。"——"好，将这些小棒画出来。"——"(画了一座屋子。)"——"不，是这些小棒。"——(画了八个细长的长方形。)这幅图画是一个高度渐增的很好的长方形序列：7，11，19，

27,57,65,82和91mm。差别是不规则的,但增长是连续的。每画完一个,巴德就看着它,虽然我们无法判断他是在努力临摹每一个物体还是仅仅为了获得一个总括的印象。实验者指着图画中的第一个和最后一个成分,并要求他拿出对应的小棒。巴德将这两根小棒放到他的画的上方,并继而将其他的小棒放到画上,这样,他最后便获得了一个包括所有物体的序列,然后要求他在没有图画的情况下重放这个序列,这一次他最后摆出的是1,5,2,6,3,9,4,7,8,1。"这同你画的图相同吗?"——"相同。"——"你是不是从最短的向最长的安排的?"——"是的。"——(实验者通过将1,2放在开始部分来纠正前两个。)——(巴德继续下去,最后的顺序是1,2,3,5,4,8,7,6,9。)

多姆(5岁3个月) 正确地安排了四个洋娃娃。第一幅("从最大到最小")的彩图是:7,1,2,4,10,3,6,5,8,9。"你怎么知道你将它们都画了出来?"——(将几根小棒放到图画上。)——"用这支铅笔画出它们整理好以后的样子。"第二幅画是一个很好的按185—90mm排列的线条的序列,而且它们的差相当有规则。第一次实际的序列是1,2,3,4,6,5,但最后,他通过尝试与错误达到正确的排列。

拜尔(5岁3个月) 说她要把小的放到一边,大的放到另一边。第一幅(彩色的)画是一个好的序列,而且成分之间的差有规则。但她不想摆实物(只是看着它们),实物有12个,而不是10个。实际的序列只是由较少成分组成的一些小序列。她不能将所有12个成分摆成一个序列。

曼恩(5岁6个月) 第一次也有规则地画了一个由小到大的序列,这个序列同物体本身并不一致。然后只给他呈现5个成分,要求他选择正确的颜色:他不能使之一一对应。实际的序列是一些小的很不协调的序列。

鲍尔(5岁9个月) 第一次尝试是使他画的颜色和大小都对应于实物。他接近达到他的目的,但未能画出一个序列。第二幅画是一个有规则的从大向小的序列,但与实物并不一致(其中有一个成分用的次数太多,绿色的用了3次)。当再次要求他保持颜色一致时,他画出来的与第一幅相似,没有序列。实际的序列是:1,7,2,8,6,3,4,5,9,后来摆出的是1,3,2,6,4,5,7,8,9,10,他一步一步地加以纠正,直到造成一个正确的序列。

普罗(6岁) 开始于画彩图,但既没有共同的基线,也没有形成序列。然而,他的铅笔画却是一个通常的序列。实际的序列是一些小的很不协调的序列。

安格(7岁) 首先画出来的彩色线条都是一样长,而且没有顺序。"我用彩色笔画。绿色的在这里,红的在这里……"——"我要你画按大小次序来排列的小棒(重复最初的指导语),用铅笔来画。"——"(他仔细地看着物体)绿色的是第一根(画了一根线,每画一根线时他都看着物体)。"这样,他构造了一个相当规则的序列。"你能够不看这些小棒而画出来吗?"——"不能(画了3根线条,然后停了下来)。"实际的序列:1,2,4,3(纠正了),6,5(纠正了),7,8(他比较了它们),9,10。

尽管存在着相当多的个别差异，但这些反应在很大的程度上都有共同性。在受试者中，每一个人都能相当好地画出 9 个或 10 个成分的序列，但是，当他们实际构造序列时，就或者完全失败，或者得求助于尝试与错误。然而，如果所有的物体都是用一种颜色（巴德），或者使用铅笔；或虽使用颜色蜡笔但不考虑大小的对应（拜尔，曼恩），那么他在第一次尝试中就能正确地画出那个序列。如果不能立即正确地预见这个序列，那么我们便发现，受试者毫无例外都考虑了颜色，而且他们不能同时使大小和颜色两者都对应（多姆，鲍尔，普罗，安格）。如果他忽视了颜色，他就能用铅笔（多姆，普罗，安格）或胡乱地使用彩色蜡笔立即正确地画出那个序列。不过，虽然这种预见既是立即做出的，又是正确的，但实际的序列却是不合适的，或远不是立即做出的。换言之，在图画的系统性和实际序列之缺乏总的系统性之间对照强烈。我们知道，问题并不在于小棒的颜色妨碍了儿童正确地将小棒按从短到长的顺序安排成一个序列。在这个阶段，序列常常是不正确的，而且受试者在安排序列时往往迟疑不决，即使在使用相同颜色的小棒时，情况也是如此（见表 XXIV）。

这个问题的解决实际上非常简单。我们已经看到，系统地构造出一个序列蕴涵有可逆性：发现最小的成分，然而再从剩下的那些中间发现最小的成分等等。这意味着在头脑中要记住，一个特定的成分（如 E）比已经放到序列中的那些成分要长些（E＞D、C），同时又比随后放到序列中的那些成分短些（E＜F、G）。而画图却没有任何这方面的要求。儿童只是遵循大小变化的趋向一根接一根地画出那些线条，他无须在对子之间作任何比较。他所赋予的关系是单向的，因而是不可逆的。这些图画所表达的关系是一种不完全预见的格式，因为它是前运算的。它们并没有用实物构成的运算的序列中所包含的那种做出比较的预见（这种预见含有大于和小于这两个方向的协调）。唯一的预见是对于结果的总括的预见，而且儿童并不能预见获得这种结果的步骤。这便是精确意义上的**不完全预见**，因为它只适用于一个方向，而不是两个方向的变化。很自然，这种不完全预见应该是处于运算的序列和它所暗指的完全的预见格式之前的整个阶段。

虽然我们已经解决了第一个问题，但第二个问题尚未解决，这就是解释不完全预见之形成的问题。这种解释不是在第一阶段。解释不完全预见之形成，需回到系列的“内涵”和“外延”的关系。正如我们已经看到的那样，在第一阶段这种关系还是很不协调的，因为“内涵”或次序涉及连续比较的顺序，而外延则要符合实际的空间构造。随着将一个物体同另一个物体联系起来的能力的发展（这种发展依赖于那种在任何时候都不停止的动作协调的进步），最终会达到这么一个阶段——儿童很容易想象出同一关系（特别是“大于”“小于”……或“小于”“大于”……的关系）的不明确的“副本”，并通过图画来表示这一“副本”。不过，一个明显的事实是，内涵和外延之所以非常容易协调，仅仅是因为受试者能够在他选择时形成内涵。当他非得拿起实际的物体并对它们加以安排时，协调的意图便要受到实际物体所具有的全部多重关系（即大于和小于关系）的抵

制。这就是在阶段ⅡA安排实物时内涵和外延的协调远不完善的原因。尽管这时能用简单的图形来表示一种预见。

当我们全部描绘了这些不同的阶段时，我们还要回过来讨论这些图形想象的性质以及在它们背后的意象。

阶段Ⅱ。小阶段ⅡB：图形的预见和单个物体之间开始一致。实际的序列通过尝试与错误进行。——这个阶段有一定的进展，受试者在画图时倾向于参考小棒的颜色和大小，而不是满足于一种完全抽象的绘图。虽然实际的序列往往也正确，但其方法是尝试与错误，而不是系统的或运算的。

拉克(5岁2个月) 画了一个彩色线条的序列，其长度从15mm有规则地渐减至7.5mm，其颜色符合小棒的颜色，顺序为2，1，4，3，6，10，7，5，9。他努力使颜色和长短都相符，但他不能避免许多颠倒。这个例子处于阶段ⅡA和ⅡB之间。实际的序列是：先是2，1，加以纠正；然后从1，2，4，3纠正为1，2，3，4等等。最终达到正确解决。

波斯(5岁4个月) 先画出1，4，6，8，10，9，然后在1之前加上2。这样，虽然线条逐渐增长，但有两处颠倒，而且遗漏了三个成分。实际的序列是：2，6，9，然后是2，6，7，8，5，9，10，没有一致的基线。后来又出现过一些错误，但都得到了纠正。最后达到正确。

瓦尔(6岁10个月) 画出的是：1，3，5，7，9，10，8(8画得最短，所以其颜色和大小都不相符)。线条的长度有规则地从5.5cm减至1.7cm。"你有没有忘记了什么?"——"(只是一根接一根地看着图画中的线条)没有。"——"为什么这一条线(8)在这一条(10)之后?"——"我不知道(加以纠正)。"——"如果将小棒排列好，这像排列出来的样子吗?"——"是的。"——"真的?"——"不全像。"实际的序列：1，3，5，7。然后他用4去量7，并将4放到一旁。后来他摆出的是1，3，5，7，6，2，4，8，9，10(即两个分离的序列)。最后他对此加以纠正，并达到正确。

小阶段ⅡB的进步之处在于，图形的想象不再仅仅是不完全的预见，因为它不仅仅是一个总括的单向的格式。虽然这种预见不完善，但它却是真正意义上的预见，因为它不仅对该序列的结果有影响，而且还影响了构造序列时的细节。这些受试者的图形的预见和实际的序列应该说处于同一水平，实际上也是如此。

阶段Ⅲ：预见在细节上也正确，而且在构造实际的序列时运用了运算的方法。——在这个阶段，预见的图形想象完全正确(如果出现错误，那是由于思想不集中，而不是由于方法的不当)，而且实际的序列完全是运算的！这两个特征之间有着明显的相关(参见表XXIV)。几乎每一个表现有其中一个特征的受试者都显示了另一个特征(只有两处例外，一处是在5岁时，另一处是在8岁时)。这种一致性并无令人奇怪之处，因为分析的图形预见和正确的行为两者都依赖于同一种方法，而这种方法乃是这个发展过程的顶点。

下面是三个例子，其中第一个是中间的状态。

米尔(6岁2个月)　开始于2,3,1,4,5,…,10,前三个成分与它们的颜色不一致。实际的序列：开始时与图画完全相同，然后将前三个成分纠正为1,2,3。“这不对，绿的应该在红的前面。”然后的排列正确，而且没有再看图画。

波吴(6岁1个月)　绘画正确，而且在增加新成分时，能正确地将它们插进去。他的实际序列是运算的。

本恩(7岁2个月)　绘画和实际序列都是一次成功。将实际的序列搞乱，并增加一个新成分，本恩系统地将它同最小的成分相比较，并一次成功地将它插入5与6之间。“为什么放到那里?”——“(重新构造这个序列以证明他的正确)就是在那里!”

在第Ⅲ阶段，图形的预见和实际序列处于同一水平，这同第Ⅰ阶段的情况是一样的，但两者的原因却是相反的。在第Ⅰ阶段两者之所以都不正确，是因为在内涵和外延之间没有协调。在第Ⅲ阶段两者都正确，则是因为这个序列的这两个方面得到了协调。在第Ⅱ阶段，特别是在小阶段ⅡA，存在着一种仅仅适用于这个序列之总括格式的不完全预见，因为外延和内涵在“抽象的”绘画中比在对物体的实际安排中更容易得到协调。

我们还要考虑一个问题，即这种预见之图形的想象(不管它是在阶段ⅡA水平上的总括的图形，阶段Ⅲ水平上的分析的图形还是阶段ⅡB水平上的过渡的图形)的性质究竟是什么？我们尤其要考虑，这种想象同意象本身或一般的感知格式究竟有什么关系?读者肯定会想起(第1节)，虽然类别不能被察觉到，而关系却是常常可以察觉到的。由于一个正规的序列具有一个“好的形式”，情况尤其如此。根据在前面已经提出的那些理由，我们并不认为这种感知的格式乃是最初的基本的材料。但是下列情况也是可能的，即预见之发展方面的显著的差别，如序列的预见和分类的预见之间的差别，同前者可以被感知这一事实是有密切联系的。我们需要知道的是预见同意象或意象同感知之间的关系。对于序列之早期预见的一个可能的解释是，这种总括的不完全预见格式乃是从那种“好的”感知形式中抽象出来的，或者说它可能是从儿童的感知经验中抽象出来的；毫无疑问，这些也适用于运算格式本身。另一种解释是，不仅运算的格式，而且先于它出现的预见的图像，两者都是从受试者自己对于那些可作序列安排之物体的动作中抽象出来的，而不是从他的感知中直接抽象出来的。这意味着要将意象作为内化了的动作之模仿来加以认识，然后则要将运算看作是一种带有来自于比较完善结构的、更为丰富内容的、扩展了的、内化动作的形式。第二种解释并不完全否认感知的作用。正像我们指出动作影响感知格式那样，我们完全同意感知反过来也影响动作。换言之，只要关系具有一个可以明显地感知的相关的事物，受试者就比较容易根据他的动作来发展有关的格式(在不完全预见的水平和运算的水平都是如此)。这样，系列之预见就要比分类之预见容易一些。此外，一个整齐序列的“好的形式”之所以明显地被感知，也仅仅是因为它们符合于感知-运动的动作格式及其整个的发展(类别的确不能被觉察，这

是因为它们处于感知的空间—时间结构之外；另一方面，动作确实要影响一个人对于那些属于某一特定类别物体的感知，而这乃是一个感知的问题）。

我们不接受第一种解释。首先，许多实验结果都表明，序列构造感知的发展与整个活动（包括运算推理）的发展是一致的，所以，感知与动作（包括内化了的动作）之间的关系是双向的关系。我们在第1节中已经简要地概述了这方面的证据。但我们之所以拒绝第一种解释，除了这些一般的根据之外，还想引用一个与本节所描述的这个研究有联系的小实验的结果。我们要求处于较低阶段的受试者在实验者构成一个正确的序列之后画出这个系列（在他画过预见的图形之后提出这个要求）。实验结果是，所有的3岁儿童和三分之二的4岁儿童都不能画出一个其线条长度有规则地增长或减短的图画。基于这个事实，人们便很难再认为图形的意象是从感知中抽象出来的。为了画出这个序列，儿童必须得根据连续的模仿活动来造成一个图形的再构造；而这些模仿活动本身非得加以序列化不可。型式的感知可能有助于序列，但却不能完全决定它。相反，如果受试者能够以他序列地安排实物的方式来使他的动作有序，那么感知本身就要容易些（第1节）。

因此，我们接受第二种解释，现在便可以转而研究触觉序列的问题，这项研究将使我们可以对此作进一步的阐述。

3. 触觉序列及其在绘画中的预见

为了搞清楚感知的作用，我们继而研究仅仅通过触觉而感知到的物体的序列。开始时，用大小相同于第2节中那些小棒来做实验，但我们发现，有关的触觉辨别太接近于阈限，以致结果难以比较。于是我们决定使用长度为10—19cm，横截面仍为0.5cm^{2}的10根小棒。现在每一对相邻小棒的长度差为1cm。这个实验的受试者为43名四至八、九岁的儿童。另一个实验的受试者为相同年龄的50名儿童。这个实验使用了5根长度为4—16cm，横截面为1cm^{2}的小棒，相邻两根小棒的长度差为3cm。

实验有四个步骤：(1)触觉检验。我们一直鼓励儿童检验这些物体，直到他说出小棒的差别为止。在用5根小棒做实验时，将小棒逐根地交给儿童，以便使儿童能够“感觉到它们有多长”。交给小棒的顺序是3，4，2，5，1。(2)预见这个序列：要求受试者用小棒画出“第一根是所有中最长的一根，然后是稍微短一些的，再就是又短一些的，如此下去一直到全部这些小棒中最短的一根”。(3)通过触觉安排实际序列。要求受试者说出他在怎么做，然后检查一下那是否正确。(4)如果儿童不能通过触觉来安排一个序列，就要求他在视觉的条件下安排。受试者可以纠正他通过触觉来安排的序列，也可以重新开始（他们喜欢这样）。

下面是我们得到的结果：

表XXV　利用触觉感知的图形的预见和实际的序列(%)

成分的数目			10			5	
年　龄	4	5	6	7	8—9	4	5
(受试者人数)	(3)	(10)	(7)	(9)	(9)	(15)	(30)
Ⅰ. 不能预见	66	50	43	11	0	53	23
接近于总括的预见	33	20	14	0	0	20	20
正确的总括的预见	0	30	43	89	100	27	57
Ⅱ. 实际序列失败	100	90	71	89	11	67	40
通过尝试与错误而	0	10	29	0	56	33	60
成功运算的方法	0	0	0	11	33		

如果将这些结果同表XXIV相比较①,我们便发现,大多数的触觉结果滞后于视觉的结果,虽然其差别比我们曾经想象的要小些。我们也发现,这两个结果之间的最大差别是在实际的序列方面。图形的预见受的影响较少,而且到了7岁或8岁之后,它便同利用视觉的感知一样的完满。

在对这些事实之意义的估价方面,我们想先介绍一些利用10根小棒的那个实验的几个定性的结果。我们将结果划分为与视觉序列相对应的三个阶段,但是在年龄方面则要像这两个表所显示的那样系统地滞后一些。在阶段IA,不存在对于总的格式的预见,而且没有序列,即使通过尝试与错误,也是如此。

皮尔(4岁9个月)　我们将10根小棒相当靠近地放到一起,成扇形,放在一块隔板的下面。"将你的双手伸进隔板的下面,并告诉我你的感觉。"——"(他拿了两根小棒)木头。"——"将它们都摸一下。"——(拿起了所有的小棒,未作检验。)——"有没有一样长的?"——"有。"——"它们像什么?"——"(仍然未作任何检验)短。"——"都短吗?"——"是的。"——"它们所有的都短吗?"——"(他比较了两根)不是。(他拿起了,然后拿1和9,并逐个地检验它们的长度。接着对10也作了同样的检验。)"——"它们都不一样吗?"——"是的。"——"再摸摸,搞清是否有两根一样长。"——(他拿起1,检验两端。)——"这一根?同哪根一样长?"——(指着10。)——"它们怎么样?"——"长。"——"一样长?"——"不。"——"有没有两根一样长的?"——"有(指向10和2),这几根。"——"仔细摸(他检验了它们的长度)。现在你知道了吗?没有两根一样长的。如果你摸到两根一样长的,就将它们给我。"——(指了10和5。)——"仔细摸。它们一样长?"——"不。"——"它们都不一样,有长的,有中等的,有短的。你想法将它们按次序放好,先放最长的……(一般的指导语)但我想先要你画出它们按次序放好后的样子。"第一幅图(Ⅰ)有几根线条,其中一根短,三根长,两根中等。不存在序列,也没有共同的基线。要求他

① 对这个比较有两点保留:(a)不存在对应的触觉的分析预见,因为分析预见的基础是利用颜色;(b)在利用5根小棒做的触觉实验中,几乎不可能区分运算的序列和通过尝试与错误的序列。

画另一幅图(Ⅱ)。这一次,那些线条从纸的下边开始:一根长的,一根短的,然后是三根长的——仍然没有序列。实际的序列(重复指导语):他拿起10和1(这两根是碰巧放在一起的),然后继续拿到什么就安排什么,未作任何检验,其顺序为1,10,4,5,2,3,7,8,9,6(那段小的子序列是由于机遇)。"它们的次序对吗?"——"对(将手指放到小棒上)。"——"将它们的样子画给我看(图Ⅲ)。"——(他画了11根线,开始的长,最后的短,虽然其中有几处颠倒,但却是一个序列。)现在我们拿去5根小棒,剩下1,3,5,7,10,要求皮尔按次序安排它们。他接触了它们,但未作检验,构成的顺序是10,3,1,7,5。"我要你按次序放好,从最长的那根开始"。他找到了长的一根,构成1,5,7,3,10。然后他又重新开始,构成1,5,10,7,3。最后将隔板拿掉,在视觉的条件下他构成了10,7,5,3,1。

考尔(5岁4个月) 检验了几个成分,但不系统。开始她认为8和9长度相同,所以便要求她"好好地摸"。她检验了它们的端点并知道它们长度不等。她又摸了另外两根,但未检验它们。她通过触摸端点的方法将几根小棒同9作了比较,并承认没有两根长度是相等的。图Ⅰ:1(长线),2—5(短一些,几根长度相等),6—9和10—12(稍微长一些,长度都相等)。总共有12条线(因为考尔没有数),基线上斜,而不是水平。实际的序列:未作任何比较地连续检验了4根小棒,然后拿起所有的小棒,并按8,5,4,2,6,7,10,1,9,3的顺序放下。"放好了吗? 真是从最长的一根开始的吗? ……"——"(拿起3和9,又将它们放下,未作任何检验)这样放是对的。"——"你有没有仔细检验它们?"——(一根接一根地拿起它们,未作任何检验,并构成下列序列,它们还是没有共同的基线:8,5,4,7,10,9,1,6,3,1。)——"将你的安排画给我看。"——(图Ⅱ:1是长的,2—4较短,而且是逐渐减短,5—7较短,但长度相等,8稍微长些,但随后的9—12渐短,13—15短,而且长度相等。)当拿掉隔板时,考尔在视觉条件下构造的序列为1,2,3,6,4,7,5,8,9,10。绘画也接近于它(1—3渐短,6长些,8—10相等)。

失败显然是不可避免的,因为这些受试者并未检验物体。这个阶段的儿童仍然是"消极的"(这同我们已经从"触摸"感觉的研究中知道的情况相同①):他不是用手指沿着小棒的边去摸,而只是触摸一个端点,不去理会另一个端点;除了告诉他比较两根小棒之外,他决不做这种比较,而且他不知道如何用一个小棒去比较所有其他的小棒;最后,他丝毫也没有想到要核实一下是否已经触摸了所有的物体。这当然就不能构成序列。这个阶段之所以持续的时间多于视觉条件下持续的时间,是因为在触觉的领域内不可能同时感知所有这些成分,这就比较难于做出比较,所以受试者需要有更多的活动。

如果最初的对于这些成分的检验是如此之不合适,那么图形的预见几乎就不能有

---

① 皮亚杰和英海尔德:《儿童的空间概念》(1956),第二章。

所改进。但有一点比较显著，这就是，如果受试者摆出了他认为是的那个序列，那么他就能画出它，而且他的绘画要比他摆出的好得多(参见皮尔的图Ⅲ和考尔的图Ⅱ)。这表明，即使在ⅠA的水平上，预见也要比实际的序列稍微先进些：虽然儿童不能构成实际的序列，但他认为他构造的比他实际上构造的要好些。

在ⅠB的水平上，预见要好得多，现在，受试者能够构成一种接近于正确的总括的格式，而且在经过几次尝试之后，它可能完全正确。但实际的序列仍然处于过去的水平。

雷伊(4岁7个月) 将他的双手放到小棒上，但没有移动双手，并且说："有长的和短的(所有的都不一样长，所有的都是'黑的'，这肯定是指他看不见它们)。"——"你一定得仔细地摸它们，这样你才能知道。"——(他继续将他的手放在小棒上，没有移动。)——"将它们抓到手上好好摸。"——(他拿了半数小棒。)——"有没有两根一样长的?"——"有，两根(5和7)。"——"仔细摸它们。"——"(他将它们的一端对齐并摸另两个端点)不。(他比较了4,5和9,然后将6和9,8和9加以比较。)可能我已经摸过它们了。(比较8—10。)一定得摸端点。(比较8和9。)"——"它们都不一样长。我们要将它们按次序放好，这个次序是……"——"但你先要给我画出它们按次序放好以后的样子。"图Ⅰ的线条都很短(1cm至1mm)，非常接近于序列。图Ⅱ有六条线，1是长线，2—4逐短，5—6是相等的短线。实际的序列是由长的成分和短的成分组成的一些很不协调的对子。

蒙恩(5岁9个月) 以与雷伊相同的方式检验了小棒：开始时他的双手不动，然后摸一端等等。第一幅图画只有5根线条：1>2<3<4>5(1,3,5长度基本上相等)。"画好了吗?"——"好了。"——"给我讲讲这幅图画。"——"一根短的，一根长的，一根短的……"——(重复指导语。)——(图Ⅱ：基线下斜的7根线条，虽然有一、两根线条长度相等，但还算得上是一个适当的序列。)实际的序列是：8,7,4,9,2,5,1,7,3,10。"你觉得需要改动吗?"——"它们有一根放错了!"他加以调整，直到认为次序正确为止。图Ⅲ类似于图Ⅰ。将隔板拿掉，蒙恩在视觉的条件下在经过几次尝试后摆出了一个正确的序列。然后再放回隔板，他画了他刚才摆出的那个序列，图画与图Ⅱ类似。

布罗(6岁3个月) 以与其他人相同的方式检验了小棒，然后画出图Ⅰ。它包括五根线条：1=2=3>4>5。"告诉我，你是怎么做的。"——"一根长的，一根中等的，一根很短的。"——"你将它们都画出来了吗?"——"是的。"在进行触觉的实际的序列安排之前，他重新检验了小棒。这一次他将它们都放在同一条基线上，并且摸了每一根小棒的边线而不仅仅是两个端点。在他构造序列时，他用手指沿着小棒顶端形成的一条线摸了摸：摆成的顺序是，2,5,6,4,7,3,8,9,1,10。他又沿着顶线摸了一遍。看来他认为顶线的倾斜是正确的，所以他没有摸间隙。在未拿掉隔板的情况下要求他画出结果，他画出了1=2>3=4>5=6。视觉条件下的实际

序列在几次错误之后取得成功。他将这画成(没有看那个序列)由六个成分组成的有规则地逐渐减短的序列。

稍微得到改善的预见同比较彻底的对于物体的检验是相衬的。最好的行为是将小棒的下端摆成一条直线并检查顶端所形成的那条线。这种检验的方法虽然完全可以解决这个问题,但这只不过是一种意图,因为受试者没有察觉到那些存在着的不规则性。这里的不完全预见还是比实际的序列(它仍然处于ⅡA的水平)先进些。

在阶段ⅡA期间,受试者正确地预见了总括的格式。但他还是不能实际地构成这个序列。即使是通过尝试与错误,他也不能成功。

艾格(5岁3个月) 先触摸了所有的小棒,随后将它们一起加以检验以搞清长度是否相等。然后用手指从上到下一直摸到小棒的中间,没有系统地进行检验。然而他却能够说:“有一根长的,一根短的。”他拿起2,并且说:“这根相当短;这一根5稍微短些。”——“它们都是一样的,还是不一样的?”——“一根长,一根短,然后一个更短些,然后另一根最短(这是序列的原则,他在听到指导语之前系统地说了出来)。”——“下面就要请你排列。但先要将它们排列了之后的样子画出来。”——“好的。我先画最长的,然后是短一些的,然后是短的。这不难。”他的第一幅图画(Ⅰ)包括9个长方形,都处于一条基线上,而且很有规则地递减。

在构造实际的序列时,他任意地一根接一根地拿起小棒并检验起长度,其方法是一只手拿住小棒,用它来量另一根小棒。最后他将10放到一边,然后是6,并尽量使它们放在同一条基线上。他用7替换6,然后将3放在7的旁边。他将3拿掉,将6放到3的位置上,然后估量9并将9替换7,放到10的旁边。他继续以这种方式在手中估量长度,最后构成的顺序是10,9,7,8,6,5,2,4,3,1。然后他摸顶线并意识到2是短的,他用4来替换它,将4放在6与5之间。在经过一些进一步的纠正之后,最后的顺序是10,9,7,8,6,4,5,3,2,1。要求他将这画出来,他画出了一个安排得非常有规则的由11个长方形组成的整齐的楼梯。

杰恩(5岁10个月) 将双手放到小棒上去摸它们,立即就说都是不相同的。他的图画是7个长度从10cm至1.5cm递减的长方形。他的触觉条件下的序列是不规则的。随后的视觉条件下的序列通过尝试与错误进行,但最终正确。

德拉(6岁) 总括地检验小棒,并且说:“都是一样的。”——“仔细地摸。”——“(他比较仔细地检验它们)不。(他比较了8,4和2。)”在他第一次绘画之前,又一次通过摸小棒的端点来检验一些成分,并将4和9,8和3,5和4,5和10以及4和9相比较。“不,它们的长短都不一样。我想摸最长的,然后短一些的,然后中等的。”他继续进行检验并且说:“马上就好了。”然后他画出了由非常有规则的一些长方形组成的楼梯,这些长方形处于同一底线之上。他在画完第十个时停住,然后加上第六个长方形。

在构造实际的序列时,他将7放到1的旁边,然后加上6,一边说:“有两个以上

的长的。"他寻找"非常短的,像这一根(他图画中的最后一个)的找不到了"。他摆出了1,10,3,然后用2来替换10。在进一步的尝试与错误之后:"我不能再放了。"——"不过你干得很好。"他继续进行,最后的构成除开始的1,2,3那几个成分外很不规则。隔板拿掉以后,他作了纠正,然后又画了一幅与第一幅完全相同的图画。

对于成分的检验有了明显的改进,预见也相应地更正确一些。于是,虽然艾格看上去是采用了一个总括的看法,但他对情况有着充分的理解,以致能够在指导语未说出来之前就讲出了序列的形式。杰恩的想法相似,尽管他不够明确;而德拉则在绘图之前先比较对子中的两个成分。预见造成了一个有规则的总括的格式,结果,它便指导了对于小棒的检验。尽管在预见和检验这两个方面都有了进步,但同第Ⅰ阶段相比较,实际的序列只有很少的进步。在实际的序列方面,虽然有了较好的构想,而且在有些方面也进行得好些(存在着一些小的子序列,儿童检验小棒顶端构成的那条线等),但它仍然是不正确的,因为每个成分都没有同足够数量的其他成分联系起来。

然而在阶段ⅡB,虽然预见和序列两者都正确,但后者却是尝试与错误的结果。

汤姆(6岁8个月)　拿起三根小棒,将它们的一端对齐,检验另一端。他以这种方式继续进行,对于那个一般性问题的回答是,"没有两根是一样的"。在要求画图时,他先整理小棒:"我将它们从最短的到最长的放好。"——"不,在你安排它们之前先画图。"他画了七根长度递减的线条。在构造实际的序列时,他开始于一些对子,并构成6,8,5,7,每一次都检查一下底线。然后构成3,2,1,并将这些成分紧靠在一起,摸顶线,同时保持底线一致。他将8和6分开,在它们的中间放上7,然后将4同5分开,并把它们与3,2,1靠在一起。他以这种方式正确地完成了那个序列,并像前面那样画了图。当隔板拿掉之后,他对这个序列感到满意,画了与前两幅相似的第三幅图画。

查阿(5岁9个月)　相当草率地检验了那些看不见的成分,很快便说它们都不相同。她曾经对1和2是否相等有所怀疑,但经过比较后便认识到它们是不同的。图Ⅰ是由九个其长度有规则地递减的正方形组成的序列。在进行实际序列的构造时,她寻找最长的小棒1,然后放上6,接着是2。她开始摸底端,并经常检查是否在一条底线上。她摆出了1,2,3,6,10,4,然后将4插到3和6之间,等等。她再一次用手检查小棒的端点,使它们处于同一条底线之上。最后只有3,5和7被遗漏。她成功地将其中两根插入,而另一根留在一旁。她的图Ⅱ是,由十个成分构成的一个整齐的序列,但第7个成分与它们分开。实际序列的构造也是通过尝试与错误进行的。

这种系统的进步造成了一个通过尝试与错误而构成的正确的序列。这种构造包括对于小棒两个端点的检查。这样,问题就能通过连续的再安排和成分的插入而加以解决。表XXV显示,这种方法持续了很长时间。其原因是,在这种情况下,这种方法比运

算的方法更实用些，因为受试者不能同时觉察那些成分。更确切地说，这种方法乃是使对成分的感觉比较接近于同时进行的一种方式，这也是它之所以能够成功的原因。

不过，还有一个从7—8岁开始的第Ⅲ阶段，其特征为运算的方法。这是指首先寻找所有成分中最大的成分，然后再从剩下的那些成分中寻找最大的，等等。

艾莉（8岁2个月） 检验了成分之后很快就画出了预见的图画——一个由十个长方形组成的序列，其长度非常有规则地递减。在实际序列的构造中，她将所有的小棒集中到一起，并寻找那个最长的成分1。她将1放下，并将剩下的那些底端对齐，然后再找剩下的那些中最长的一根；在对于3稍做犹豫之后，她发现了2并将它放到1的旁边。通过这种方式，她完成了一个正确的序列。

汉恩（9岁3个月） 检验了小棒并且说："有短一些的，有长一些的。"然后画出由11个长度递减的长方形。在实际序列的构造中她拿起了3，4，1并检验它们，然后将它们放下。她拿起2并再一次寻到1。"你在找什么？"——"大的。"继而她将其他的竖在桌子上并摸它们的顶端，以发现最长的那根。她以这种方式构成了一个正确的序列。"这同你画的图画一致吗？"——"不一致。"——"还想再画一幅吗？"——"可以，一根长的（画出17个其长度有规则地递减的正方形）。"——"为什么画这么多？"——"我知道只有10根，不过我将它们画得稍微多一些，所以我得再画。"

同那种将小棒底部的端点对齐并用尝试与错误来检验顶线的方法相比较，运算的方法则意味着抛弃那种半同时的感知而采用连续的比较。毫无疑问，这个年龄阶段之所以不常使用这个在视觉条件下的序列中通常运用的方法，其原因正在于此。

现在我们还要回到那个序列，预见同感知的关系问题上来，在比较了触觉和视觉条件下的序列以及相应的图形之预见之后，我们认为第2节中的第二种解释是正确的。同在视觉条件下的情况一样，触觉领域内的预见显然也比实际的序列提前（虽然两者都要稍微受到一些妨碍）。此外，触觉序列领域中的有关障碍仅仅是由于触觉感知的连续性。它们两者的前运算过程（通过尝试与错误进行纠正）和运算过程都是相同的。从这个观点来看，将用10根小棒做的实验同用5根小棒做的实验加以比较，将会有很大的启发作用。如果序列的成分减少而成分之间的差别增大，那么，4—5岁受试者在触觉实验中所做出的预见和实际序列，不仅要好于用10根小棒做的触觉实验，而且也好于用10根小棒做的视觉实验。我们只想举一个例子来说明五个成分的实验，因为其定性的结果类似于那个主要实验的结果。唯一的并非偶然的差别是，通过尝试与错误做出的序列不再能够同用运算的方法构成的序列区分开来。因为这很容易造成几乎是同时的感知。

拜德（5岁8个月） 在将五个成分集合到一起之后检验了小棒的端点，并画出了一个由五个长方形构成的整齐的序列。在实际序列的构造中，她一起拿起了所有的小棒，并指出1（随后她将它放到一边）。然后她选择2，接着是4，她又拿回

4 并代之以 3。最后她放下 4 和 5。

再说一遍，那种认为序列的结构（无论是预见的结构或是实际的结构）乃是从那些独立于受试者动作而存在的感知结构中抽象出来的说法是错误的。

预见的结构产生于动作的渐进的组织，而且，这种组织也在对感知加以构造，使它适应于自己的需要。那种从连续的比较向同时的图形转换的方式很好地说明了这一点。

第十章 倍增的序列①

如果我们将类别结构的发展同不对称的转换关系的发展加以比较，我们就会发现一种令人难以理解的现象。一方面，序列（它是不对称转换关系的附加的安排）似乎比类包含的附加的次序更直观些，因为它与一个简单得多的感知构造相一致。另一方面，类别的倍增似乎也符合于一个非常简单的感知构造，以致可以无须任何运算的方法便能解决矩阵测验的问题，而不对称的转换关系的倍增（沿着横轴和纵轴加以有序地安排的矩阵）则可能要复杂得多，因为它涉及双重对称。不过，如果不通过具体的实验研究，我们就不能对此加以确定。我们知道，同序列的倍增相对立的序列的对应乃是像简单序列那样非常容易的。换言之，一个能够构造单一序列的儿童也能够构造两个或三个序列：$A_1 < B_1 < C_1 < \cdots$；$A_2 < B_2 < C_2 < \cdots$；$A_3 < B_3 < C_3 < \cdots$，而且他能够知道 C_1 对应于 C_2 和 C_3，等等。② 但是，序列之间的对应在这个结构中是不对称的。它不涉及一个不同方面的新的不对称。我们需要研究的是不对称转换关系的倍增，这样，我们才能够将它的发展同倍增交叉分类的发展适当地加以比较。我们事实上也进行了这么一项研究，这项研究的受试者有 52 名。

1. 实验的过程

将 49 片树叶（它们是画在硬纸板上之后剪出来的）呈现给儿童。这些树叶可以根据大小或颜色强度加以整理。共有七种大小，我们将它们编号为Ⅰ—Ⅶ，颜色的深浅从浅绿到深绿共有七种，编号为 1—7。每一种大小的叶子都有那七种深浅，而且每一种深浅的颜色又有那七种大小。有时候，我们用 98 个成分（49 对）来测验儿童对于完全相同成分的反应。对于年幼儿童，我们有时也用少一些成分（16 对），但大小和颜色的差别要大些。要求受试者按照我们所希望的那样来安排这些成分。如果他不能完成，实验者可以沿着那个表（见图）中的一行安排一个序列，或者沿着其中的两行摆成两个序列，剩下的部分让受试者来填补。不管是受试者自发地完成还是在实验者的帮助下

① 得到 A. 莫夫的协助。

② 皮亚杰和斯泽明斯卡：《儿童的数概念》（1952）第五章。

完成，一旦这个表构成之后，就要求受试者按照两个同时存在的标准找出一个成分。有时候，虽然受试着能够自己正确地构造出这个表，但还是不能理解它的真正的倍增的意义。

Ⅰ1	Ⅰ2	Ⅰ3	Ⅰ4	Ⅰ5	Ⅰ6	Ⅰ7
Ⅱ1	◦	◦	◦	◦	◦	◦
Ⅲ1	◦	◦	◦	◦	◦	◦
Ⅳ1	◦	◦	◦	◦	◦	◦
Ⅴ1	◦	◦	◦	◦	◦	◦
Ⅵ1	◦	◦	◦	◦	◦	◦
Ⅶ1	◦	◦	◦	◦	◦	◦

我们将区分出三个阶段，以同通常的三个水平相对应。第一阶段没有严格意义上的序列。儿童们的构造介于分类和序列之间，而且其基础通常是图形的集合（队列，等等）。第Ⅱ阶段虽然有序列，但基础是这两个标准中的一个，或者，儿童在这两个标准之间变化不定，而没有综合这两个标准。最后，在第Ⅲ阶段（从 7—8 岁开始），儿童可以根据这套成分的两个方面的序列做出倍增的安排。

2. 阶段Ⅰ：没有真正的序列

我们从几个例子开始：

汉恩（5 岁 5 个月） 用 32 个成分：他一开始将 32 片树叶排成一行，完全相同的成分紧靠在一起。他又将 8 片大树叶放到一起，但剩下的那 24 片却不规则地分散开。“你能够安排得再好些吗？”——（他再作安排，最后根据大小摆出四个集合，但没有序列的次序；他完全没有考虑到颜色。）——“能不能将它们排列得使别人能够看出哪些是颜色深的，哪些是不太深的，哪些是浅的，哪些是很浅的？”——（他试着摆出了一个序列，但这仍然只是比较接近于序列，因为他对于大小有所忽视。）——“现在再安排一下，使得大的放在一起，小的也放在一起，而且相同颜色的也要放在一起。”——（他根据颜色将这些树叶连接成一个大圆形，然后根据大小再分成一些集合。）——实验者摆出了那包含 16 个空格矩阵中的第一个横行和左边的一个纵列，要求汉恩将两片或三片树叶正确地放进空格之中。他能够通过尝试与错误来完成：“**因为它大小一样，颜色一样**。”

维尔（5 岁 7 个月） 32 个成分：他根据大小将它们分成四个没有序列化的集合。“你还有其他的办法吗？”——（摆成两堆，一堆是大成分，一堆是小成分。）——“还有办法吗？”——“**没有了**。”——“能不能将深色的放到一起，浅色的放到一

起?”——“不能,不能这么放。有大的,有小的。”——“那就一起考虑。”——(摆出三堆:浅色的,中等的,深色的。)——“这些(第三堆)怎么样?有很深的,有不很深的。”——(他将它们再分开,这样就造成了以颜色标准为基础的四堆。)——“能不能这么放,使它们在放好之后,我能一下子拿到大的?”——(他按大小摆出了四堆,丝毫未注意颜色。)——“能不能在放好之后同时既能找到大小,又找到颜色?”——(他聚成一堆,再分为浅色的,小的等等,没有倍增的体系。)最后实验者摆出最上面的那一行和左边的那个纵列,维尔通过尝试与错误完成了它。

布尔(5岁9个月) 将49个成分分成几个集合,其中有些是根据大小,有些是根据颜色。当提示他如何根据大小将这些成分安排成一个序列时,他继续进行了下去,丝毫没有注意到颜色。在用32个成分做实验时,他造成了一个由深色大树叶组成的集合和浅色大树叶的集合,(深色和浅色)小树叶的集合;然后将这三个集合摆成不相连的三行,既不是序列,也没有两个标准的复合。

符斯(6岁) 按不同的颜色摆成几行。但除了几个由三个成分组成的小序列之外,这几行都没有序列,每一行都包括任意凑到一起的不同大小的成分。“能不能换一种方法,以便使人能够知道哪种大小的在哪里?”——(他按照大小排成一些纵列,但颜色混杂。)然后他努力将同样大小的树叶放到一起,但未形成序列,或者说未考虑颜色。

这些反应的总的特征是构造图形的集合(横列,圆形,纵列等),这很容易发展为类别和序列。受试者并未自发地构造任何的序列,但可以通过尝试与错误来构造它(参见汉恩)。此外,他的图形分类的基础是那两个特性中的一个。或者,他可能会在没有复合的综合的情况下,在那两个特性之间转换。如果实验者在随后提醒他注意忽略了的那个特性,他能够考虑它,并对他已经构造起来的那些集合再作划分。但这不是真正意义上的倍增。然而,如果实验者摆出了矩阵中最上面的那一行和左面的那个纵列,他的确能够利用基于倍增关系的矩阵(参见汉恩和维尔)。但这是通过尝试与错误来完成的,而且它是一种图形的,而不是运算的解决问题的办法。

3. 阶段Ⅱ:基于一个或两个特征的自发的序列,但不能对二者加以倍增的综合

下面是几个例子:

赛恩(6岁) 自发地将32个成分摆成一个16格的方阵,完全相同的成分重叠在一起。横行是四种不同深浅的颜色,从最浅的向最深的依次排列,但大小却是任意布置的。“你是怎么摆的?”——“(她指了指那四行)最浅的,稍微浅一些的,深的,最深的。”——“大的和小的在哪里?”——(指了指它们。)——“能不能将它们放

得很快就能找到？”——(她构造了一个新的方阵，横行的成分从最小的向最大的依次排列。这一次颜色混杂。)——“不过，你看，这一次颜色不好找了。”——(赛恩拿起浅色的树叶纵向地从最大向最小排列。)——“对深色的也能这样吗？”——(她照此排列，然后插进中等程度深浅的，对大小也作了依次排列。)这样，在实验者的提示下，赛恩成功地构造了一个与基于倍增关系的矩阵图形相同的方阵。但赛恩不是自发地完成的，而且她也没有充分地掌握它的意义。当给她呈现一个由49个成分组成的矩阵(实验者安排了第一行和左边的纵列)，并要求她将另一些树叶放上去时，她不能发现颜色对应的那一行；她也不能找到大小对应的那个纵列，除非那片树叶恰巧该放在矩阵中已经有了的那个成分的旁边。

斯特克(6岁3个月)　也将32个成分构成一个方阵，这个方阵的四行对应四种颜色，这四种颜色自左至右有序地逐渐加深。这四行中成分的大小混杂。“这仍然很乱。能不能将它们安排得使我能很快找到大小？”斯特克随后摆出的每一行的大小都接近序列。她继而摆出四堆，每一堆都按大小有序地排列(最大的在最下面，最小的在最上面)，然后根据颜色使这四堆形成一个序列。接着她自发地将这四堆中的成分排列成行，这样就形成一个完整而正确的四方的矩阵。但是，同赛恩一样，她不理解它的充分意义。当那个由49个成分的矩阵呈现出来时，对其他成分的放置则大小相符，而颜色却不对应——除非它的最邻近的成分已经放置在矩阵上。

凯特(6岁2个月)　将32个成分中的深色的树叶按大小排成循环的序列，即最小的成分紧靠最大的。她还以这种方式构造了另外三个圈，第一个圈是不太深的，第二个是浅的，第三个是最浅的。完全相同的成分总是重叠。第四个集合摆成一线，颜色由浅至深。这个构造实际上是一个完全的和正确的倍增系统。但是，要将一个圈中的一个成分与另一个圈中对应的成分联系起来并不方便。于是凯特换了一种方法：她将其中的一个圈改变为一行，然后将其他的圈也都作如此改变，这样就形成了一个16格的四方矩阵。然后她将每行的成分叠在一起，最大的成分在最下面，最小的成分在最上面。最后，她又对所有的成分重作安排，最大的成分按从深到浅的次序排成横行(Ⅰ)。她将次大的成分也按颜色排成第二行(Ⅱ)，它紧接在(Ⅰ)的下面。但是，Ⅰ和Ⅱ的颜色并不对应，Ⅱ短些，这样，对应就是斜的，而不是垂直的。她将再小一些的树叶摆成另一行(Ⅲ)，它是颜色的序列，但比Ⅱ短些。对第四行(Ⅳ)的安排也是如此。这样她也摆出了一个二元的矩阵，但不是四方的。只有第一列(由Ⅰ1，Ⅱ1，Ⅲ1，Ⅳ1这些成分组成)是垂直的，其他几列则逐渐缩短。

艾思克(6岁4个月)　按四种不同的颜色将32个成分加以分类，然后拿出最浅成分的集合并按大小的次序排列。对另几个集合他也作如此处理，这样就构成了一个完全的倍增体系。但是，由于这些成分没有完全重叠在一起，所以他不知道

那些分散到其他集合中的同样大小的树叶的对应。换言之,虽然他知道四个颜色集合的序列以及每一个集合内的大小序列,但他没有发现不同集合中的成分之间的对应。

在整个的这个阶段,始终存在着一种逐渐的发展,而且这个阶段发展的顶点非常接近倍增序列矩阵。如果将这种发展加以整理,那么赛恩那样的受试者处于早期;赛恩仅仅将两个变因中的一个加以序列,而且在实验者特地提醒她之前,她完全没有考虑到另一个变因。最初的提醒未能奏效,因为他们所做的一切都是根据第二个标准来安排序列,而忽视了第一个标准。但后来,虽然他们根本不知道倍增,但还是在努力协调这两个标准。接下来的发展就是斯特克的情况。斯特克开始也是按两个变因中的一个来安排序列,但是,在实验者的提醒下,她能够在那些集合内引进一个基于第二种变因的序列:因此他们最后在一个序列内便构成了一组序列。不过,即使这种构造和复杂构造的型式完全一样,他们还是不能理解它的充分意义。这个阶段的最后发展以凯特为代表,她一开始便构造了某种双重的序列。然而,虽然她的意图非常清楚(如在凯特构成的颜色序列中,每一组颜色中的成分都根据大小的标准以循环的形式加以安排),但结果往往不如人意,因为这两种序列互无联系,一个是集合的序列(圈,行或堆),而另一个却是这些集合内的一组序列。因此,整个的安排并没有构成不同集合中的单个成分之间的一对一的对应。凯特本人构成了一个四边形的排列,其中的对应几乎是正确的,但是,她的矩阵不是四方的这一事实(应该从有关的倍增的观点去看待它)表明,它仍然是在不同的平面上考虑这两个序列,而不是将它们加以协调。艾思克的所为与她相类似,但他的反应是立刻做出的。因此艾思克相当接近于运算的顿悟。

对于那组 49 个成分的反应进一步证实了这个假设,即在第Ⅱ阶段,这两个系列是在不同的平面上加以考虑的。虽然为了使受试者将不同的树叶正确地放到初具轮廓的矩阵的格子内,我们常常先排列好最上面的那一行和左边的那一列,但第Ⅱ阶段的儿童却不能正确地发现其他树叶该放何处,除非有邻近成分的帮助;不过,他们的确能够或者立即发现该放在哪一行,或者立即发现该放在哪一列。人们很难将这种困难归之于感知的因素。他们的困难在于不能同时兼顾两个序列,而它乃是倍增的本质。如果只有 32 个成分,同样的这些儿童就能考虑这两个序列,但是,由于他们正在进行的动作的复杂的本质,所以他们就不能理解这两个变因乃是同等的。

4. 阶段Ⅲ:成功的倍增

我们先举出介于第Ⅱ阶段和第Ⅲ阶段之间的三个例子,接下去再举几个第Ⅲ阶段的例子。

克罗(6 岁 6 个月) 立即根据大小和颜色安排了 32 个成分。她逐渐构成一

个由四行(按从大到小的次序自左向右排列)和四个纵列(按从最深到最浅的次序自上向下排列)组成的型式。她懂得,在每一行或每一列中,只有两个特性中的一个特性发生变化;当要求她找出一个比另一个成分既浅些又小些的成分时,她沿着对角线或一条与对角线平行的线去找。

然而,她对于2×49个成分的安排却差得很。不过,当实验者在排列一行和一列时,她对于剩余部分的排列却很少出现错误,而且对于这些错误她都能自发地加以纠正。

当克罗到了7岁1个月时,她能立即将32个成分排成一个矩阵。当给她98个成分时,她开始的安排正确,但随后厌倦。当呈现那个最上一行和左边一列已经安排好的矩阵时,她能毫无错误地完成它。

朱姆(7岁6个月) 一开始将32个成分由大到小地摆成八个横列,颜色混杂。他将这八行组合成四行,形成了两个并列的方阵。然后他将每一行的颜色作有序的安排,这样就形成了两个由完全相同的成分组成的矩阵。第二个矩阵中的颜色次序同第一个矩阵对称地颠倒,但两个矩阵的大小序列相同。

苏特(7岁2个月) 开始也是摆出大小的序列,颜色混杂,然后从深到浅地使颜色序列化。这样她就正确地构成了一个矩阵,每一个成分出现两次。

对于2×49那组成分,她随即按相同的方法将它们构成一个矩阵。除了几个小错(由于色彩的差别很小)之外,她的排列是正确的。

马尔(7岁4个月) “你看到什么?”——“有几个颜色深一些的,有几个小一些。”——“能将它们整理好吗?”——“(他拿起最深的那些树叶并按大小的次序加以排列)第一个的颜色最深。这样可以吗?”(他将树叶重叠地放,以比较大小。继而排列颜色不太深的,等等,直到完成一个矩阵。)——“你是如何将它们安排得这么好的?”——“我总是看着最小的那些和颜色最浅的那些。”

魏斯(7岁5个月) 先将成分排列成行,每行3至4个成分,而且从大到小同时又是从深到浅。这表明他认为能够避免在构造序列时一个特性变化而另一个特性保持不变。但他也认识到不能都按这个方法来构造一个序列。“能换一种方法吗?”——(现在他构造了一些由同样大小但颜色由深到浅的成分组成的横行和颜色相同的从大到小排列的纵列。)

杜普(7岁11个月) 先将32个成分中的大树叶按从深到浅的次序加以排列,然后以同样的方式将次大的树叶加以排列,等等。但他将这些序列排成一长行。——“如果你想一下子就找出颜色最深或最浅的那些树叶,怎么办?”——“哦,我知道(他将那些序列加以并列,这样就形成了一个矩阵)!”

对于49个成分的处理方式相同,但这一次他一开始就使那些序列并列。

古益(8岁3个月) 将深色树叶按从大到小的次序加以排列……但他也是将那些序列排成一行。“能不能换一种方法,以便一下子就能找出每一片树叶?”——

“哦，当然(他将那四个颜色的集合并列起来，形成一个矩阵)!”

巴尔(8岁6个月)　同魏斯一样，开始时也是排列成行，其中的成分遵循从大到小，从深到浅的次序(其对角线的成分是Ⅰ1，Ⅱ2，Ⅲ3，Ⅳ4)。然后他构成由六个成分组成的一列，颜色由深到浅(Ⅰ1，Ⅰ2，Ⅰ3，Ⅰ4)。自然，他不能完成这个矩阵，实验者排完最上面的一行和左边的一列之后，他就转变为第二种方法。

如果将这个阶段同第Ⅱ阶段相比较，我们发现两个新的特征，但它们并不是互不相关的。

第一点是，一旦受试者看到这些材料，他们就认识到一定得按照两个变量来安排序列。一个典型的反应是说“有几个颜色深一些，有几个小一些”(马尔)。此外，虽然儿童可能开始时根据一个变量来安排，但他往往从一开始就意识到最终的结果是两个变量都要考虑。

其次，我们常常看到那两个序列是相似的，同等重要的，甚至在先排出一个序列的情况下，也是如此。所以，第二个序列并不像第Ⅱ阶段时的情况那样是从属的。我们再也见不到一系列的小序列的集合。换言之，最终的结果往往是根据颜色和大小而不是颜色或大小的序列，尽管儿童开始时的序列标准通常是两个标准中的一个。当受试者(如杜普)构造成一系列的类别(这些类别是由大到小，每一个类别内的成分由深到浅)时，他已经在思想上构成了大小不同的类别的颜色之间的对应(这是我们在第Ⅱ阶段中所看到的那种情况的逆反)。杜普和古益之所以在实验者稍作提示的情况下就能够将那些类别并列以形成一个体现了两种变量得到系统的协调的矩阵，其原因正在于此。

然而我们应该注意到，预先的格式仅限于按两种变量加以整理和构成两个同等重要序列的想法。换言之，这种格式体现了必不可少的复合的想法；但受试者往往不能事前知道能够最好地体现其想法的精确的空间排列。在倍增分类时我们没有发现这一点。在倍增分类中，大多数受试者似乎都能预见空间的安排(矩阵)和它的倍增本质。不过我们在第九章中看到，如果只有一个序列，那么，早在第Ⅱ阶段就有对于图形安排的不完全预见！这正是问题的关键。在本章开始时我们就曾提到过它。

一个序列之所以是一个“好的”感知形式，是由于两个理由：第一，在相连的成分之间重复出现同质的差异；第二，这些差异在数量上也可能相等(但不需要相等)。此外，它们本身的不同的关系能够直接察觉到，而在分类中却并非如此。

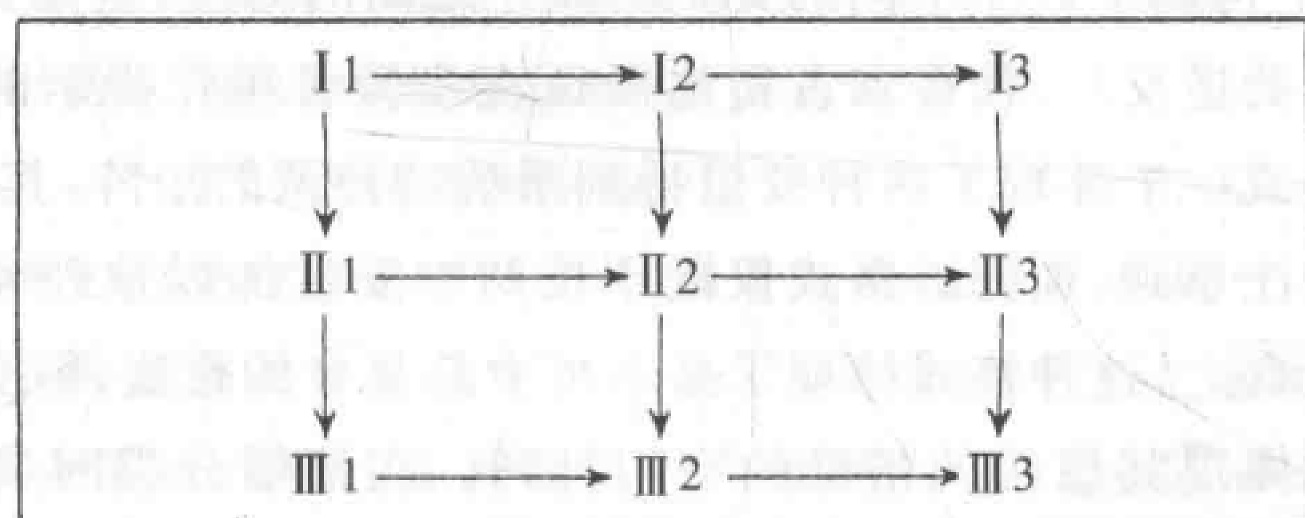
相反，分类之所以不是“好的”形式，是因为它的组成关系感知的复杂性。类别系统整理之后的形式是 $A<B<C$，而且要决定于 $A+A'=B$，$B+B'=C$ 等等的运算。它包含两种关系类型：(1)相等的关系，如所有 A 的成分都有特性 a，所有 B 的成分都有特性 b，等等(虽然这些关系是可以察觉的，但作为如此联系起来的成员之联合的那些类别却不相等；如果它们相等，那仅仅是在某种人为的图形的配置方面)。(2)相异的关系，或者说，A 和 B 的成分或 B 和 B' 的成分等等之间的“互补性”。这后一种关系并不重复，即 A 和 B 的成分之间的差异并不相同于 B 和 B' 的成分之间的差异。一般说来，它们

也不成序列。由于相等和相异的混杂，所以分类的构造比序列的构造要复杂得多。它既不简明，又无规则，所以它不是一种“好的”感知形式。

A_1A_2	$A_1A'_2$	$A_1B'_2$
A'_1A_2	$A'_1A'_2$	$A'_1B'_2$
B'_1A_2	$B'_1A'_2$	$B'_1B'_2$

在研究倍增类别时，我们发现了如上图所示的下列一些互补的相异关系：A_1 和 A'_1 之间；$(A_1+A'_1)$ 和 B'_1 之间；A_2 和 A'_2 之间；最后是 $(A_2+A'_2)$ 和 B'_2 之间。这些相异的关系和附加分类的那些关系相类似。但是，倍增的实际情况非但远未增加感知这种系统的麻烦，而且还由于它造成的对称性而使这种感知更容易些。它使相同的特征在每一横行或每一纵列重复出现，形成了这些排列中的双重对称。所得到的效果是，虽然存在着像相同关系那么多的相异关系，但在图形的显示中，突出的还是相同关系。于是我们便发现，倍增的分类矩阵产生了比单纯的附加结构更为使人信服的“好的形式”。这就是我们在第十章中所考虑的问题之来源。

这应该也运用于那种我们已经作过说明的不对称关系和转换关系的倍增。唯一的差别是序列的差异代替了我们正在讨论的互补性。



正如我们所知，序列是一个比分类“好”的形式；所以序列的倍增应该比不能加以序列化的类别的倍增要容易些。但实际情况是，那种使交叉分类比简单分类容易些的相同性，却使得倍增的序列比简单序列更困难些。造成这种令人费解现象的原因是，当受试者在分类时他也在寻找相同性，因为类别乃是成分基于相同关系的联合。在一个有序的类别系统中不可避免地要出现的相异关系（即互补性）却与这一心理“定势”相反，这就使分类变得困难。现在，出现在倍增排列中的对称性减弱了这些相异性，于是受试者便比较容易集中于相同性。相反，当他在安排序列时，他是在寻找相异性，因为序列乃是一个不对称的、转换的相异性的链。在倍增的序列中存在着两组可以序列化的相异性这一事实使得这一“定势”更为强烈。遗憾的是，我们现在无法在不引进相同性的情况下来制表表现双重序列。如果你想制表，那么你只能发现一个完整矩阵中的一些对角线。换言之，你不能将那些联合限制为＜＜，＞＞和＜＞；你还得预见这么一些可能性：＜＝，＞＝，＝＜，＝＞和＝＝（不管它们出现还是不出现）。这些部分的相同性

(它们不出现在简单的序列中)构成了构造倍增序列之图形的障碍。毫无疑问,这便解释了那个问题,即交叉分类造成了比简单分类"好"的形式,而倍增序列的形式却比简单序列的"坏"。

在下列事实中有一个有趣的提示:有几个受试者(如魏斯和巴尔)一开始就将成分同时按两个变量加以整理以构成一个双重序列<<或>>(如越来越大和越来越深)。虽然他们在构造对角线,但他们这么做的时候有一个误解,即以为他们是在构造矩阵,至少是在构造矩阵中的一行或一列。我们所期待的正是这种态度——这要有一个条件,即受试者知道存在着两种关系。这就是我们在第Ⅰ阶段中没有发现这种态度的原因。在第Ⅰ阶段中,儿童倾向于按图形的集合加以分类。在第Ⅱ阶段我们也没有发现它。在第Ⅱ阶段,受试者仅考虑一个序列或一个主要的序列。

更为引人注意的是,尽管在图形的转换中有这些困难,但受试者还是自发地排出了一些表现倍增之一个方面的有序的类别(如杜普和古益的长列),甚至还自发地构造了一个考虑到两个变量的矩阵。

我们将通过总结的方式来回答这个问题。在本章开始时,我们曾从下列两个方面提出过这个问题:(1)儿童在他达到交叉分类的同时(7—8岁)也达到了倍增序列方面的运算水平。(2)不过,这些格式中的第一种格式本身的确也造成一个问题,这是一个空间的象征意义而不是逻辑结构的问题。平均从7岁或8岁开始,他们便显示他们知道需要观察有关的相同性和相异性(甚至那些一开始便将相异性联系起来——>>或<<——的受试者也是如此)。实际上,只是到了将大小类别中的成分排成颜色的序列和颜色类别中的成分排成大小的序列时,他们才解决了这个问题。但他们并不是每个人都立即构成基于两种变量的矩阵的;虽然有些受试者做到了这一点,但还有一些儿童却构成一个基于一种变量的循环队列(Ⅰ,1—4,Ⅱ,1—4等等)。

最后,在类逻辑和关系逻辑方面存在着四种主要的"组合",它们分别对应于简单分类,倍增分类,简单序列和倍增序列。一个非常明显的事实是,尽管乍看上去有着一些差别,但所有这四种结构大体上都是在相同的时期变为运算水平的。虽然存在着由于问题内容本身形象性的程度而造成的某些小的差别,但这些差别还不致推翻我们的主要论点。

结　论

论述分类之发展的文献相当多，也发表了若干序列方面的专著。这个领域中最杰出的是戈德斯坦(Goldstein)和他的合作者、著名的席拉(M. Scheerer)的著作。戈德斯坦和席拉①从有关的抽象的观点出发分析了"范畴"方面的行为。这些著作给了我们很大的启发，使我们产生了分类方面的机动性或易"转换"性同刻板性之间对立的想法。戈德斯坦和席拉的"分类测验"有33个普通的物体，要求受试者以尽可能多的方法对它们加以整理；也可能要求受试者对实验者构成的类别加以界说。里查德(Reichard)，施奈德(Schneider)和拉帕波特(Rapaport)②研究了儿童的这种行为，汤普森(Thompson)③也做了这方面的研究。早在1937年，汉夫曼(Hanfmann)和卡沙尼(Kasanin)④在阿切(Ach)的著作(沙嘉罗夫和维果斯基对它作过修改)的基础上设计了一个用22个木块作的分类测验。这些木块的颜色(5种强度)、形状(4种)、高度(2种)和宽度(2种)各不相同。要求受试者将它们分成四组：正确地解决需要有机动性和持续性，思维的灵活性非常重要，而刻板性则有碍于正确地解决问题。戈德斯坦的思想导致瓦隆(Wallon)断定儿童的思维有一个"前范畴"水平，而这乃是一般的前运算思维的一个表现。我们以前的一个合作者阿斯科利(G. Ascoli)在瓦隆的指导下也进行了儿童分类的研究⑤。此外，格式塔心理学的思想也给了梅利(R. Meili)关于分类结构的研究以很大启发。

毫不奇怪，在分类和语言的关系方面也有了大量的研究。这里应该提一下奥莱龙(Olerom)⑥和文森特(Vincent)⑦，他们都研究了失聪者的行为。我们还应该特别注意斯莱马-卡扎库(Slama-Cazacu)最近关于语言在分类中的作用的卓越研究。受试者是正常的儿童，但他的研究的一个突出的特征是实验情境反映普通生活的方法。斯莱马-

① K. 戈德斯坦和M. 席拉：《抽象的和具体的行为：一项有专题测验的实验研究》，1941。
M. M. 博尔斯(Bolls)和戈德斯坦：《关于精神病人"抽象"行为之损伤的研究》，1938。

② 里查德·施奈德，拉帕波特：《儿童概念形成的发展》，1944。

③ 汤普森：《不同年级儿童分类测验的概括能力》，1944。

④ E. 汉夫曼和J. 卡沙尼：《一个研究概念之形成的方法》，1937。

⑤ G. 阿斯科利：《儿童如何对物体分类》，载《儿童》杂志，1950第3期。

⑥ 奥莱龙：《聋哑者智慧能力之研究》。

⑦ 文森特：《聋哑者运算逻辑之起源》。

卡扎库使用了"碗橱游戏":要求受试者在真的碗橱内安排实物,这意味着分类具有真正的功能意义。

当然,对倍增分类领域做出杰出贡献的是拉文(Raven)的"渐进的矩阵"①。虽然我们知道目前尚无对于序列的系统研究,但在有关感知结构的文献中常常讨论这个问题。

鉴于既往研究的范围及其高度的水平,我们自己实际的研究结果究竟提出了哪些前所未有的东西,对于这一点我们感到没有把握。不过,我们想强调这么一个事实,即我们向自己提出的问题是相当不同的,因为我们自己的观点也同我们的先行者有所不同。

心理学家要研究分类和序列的行为是自然的事情。但分类和序列也是一些具有逻辑学家和数学家系统地提出的精确法则的逻辑结构。由于儿童的发展,所以他的行为便越来越符合于这些逻辑—数学结构。研究分类和序列的大多数心理学家已经研究了纯功能的问题,如为什么某些人缺乏从不太符合要求的标准转变为比较有效标准的灵活性;为什么语言对某些分类结构有促进作用而对另一些分类却没有,等等。"格式塔心理学家"(戈德斯坦,梅利等)是一些例外,他们努力将每一种结构都归并为非常概括的术语"格式塔"。我们认为,这种试图确实歪曲了运算结构独有的特性。

我们一直关心的主要问题来自我们对于发生认识论的兴趣,而且它是相当不同的。我们想要知道为什么分类和序列的行为采取它呈现的那种形式。我们尤其想要知道为什么它会越来越接近于逻辑—数学结构。(虽然,无论是逻辑学家或是数学家都不能先验地构造这些型式,但事实是,对这些型式毫无所知的受试者却存在着构造与这些型式越来越同态的一些组织形式的倾向。)例如,我们研究的那些主要问题中的一个问题是儿童逐渐构造类包含结构的方式。这个结构并不是原始的材料(它既不是发生地给予,也不是一个格式塔):它乃是通过一个逐渐构造的过程而完善起来的,只要仅仅考虑一下成人语言行为所反映的这种"成品",我们就几乎不能怀疑它的存在。

结构如何完善的问题并不是一般的心理学家已经非常关心的问题。大多数心理学家对于逻辑学没有兴趣,这意味着他们有一种将他们认为是逻辑的必然的东西作为以某种方式"给予"的东西加以接受的倾向,而不是对此提出问题。我们得自问,我们得以造成或承认这种"必然"的确切过程究竟是什么,这就必须要分析作为儿童和少年的我们的发展。以前的研究使我们确信,分类和序列实质上乃是运算的行为型式。正是由于这个理由,我们才将我们目前的工作确定为探索这些运算的发生,尤其是分析它们的基础结构和相应的感知和感知-运动行为机制之间的关系。现在我们便来总结我们的结果:

1. 在逻辑运算以及先于此的前逻辑动作的发展和亚逻辑运算以及动作的发展之间有着非常密切的关系。逻辑的(或前逻辑的)和亚逻辑的之间的差别仅仅在于,前者

---

① 拉文:《渐进的矩阵》,路易斯出版社,1938。

处理不连续的成分之间的关系，而后者则同构成一个空间连续统一体之部分的那些成分有关。第Ⅰ阶段的那些“图形的集合”（见第一章）提示了在逻辑的和亚逻辑之间完全缺乏最初的分化。第Ⅱ阶段有部分的分化（见第一章第4节）；第Ⅲ阶段则完全分化（见第二章第3节）。这两种行为的发展是平行的。我们开始于这一立论，因为它表明，如果将我们对于这些运算之起源的研究限制于语言的符号和概念，那是错误的。相反，我们必须注意任何有关的动作，这些动作可能是将物体放在一起（联合），也可能是整理实物，而不管这些成分是否构成一个较大的空间连续统一体的部分或是不是一个集合的无联系的成员。

2. 分类的联合和再分类回复到行为的最初起源（在那里，它们丝毫也没有从亚逻辑的联合和再划分中分化开来）这一事实意指，儿童从这些早期的未分化的功能的聚合到掌握真正的分类概念是一个非常长的过程。我们知道，后者乃是语言之语义内容的一个部分，而且它有助于通过语言中介的心理运演。这些概念既具有外延（界定一定类别的成分），又有内涵（其成员共有的特性）。内涵的基础是相似性关系，这意指它回复到感知-运动的同化：即使是在感知-运动的水平上，也存在着相似性的同化；它的来源既是共同特性的感知，又是那种与功能目的有密切联系的初步的抽象。另一方面，只有得到精确符号的帮助，概念的外延才能得到发展。但掌握适当的言语记号还是不够的：它们必须进入一个适当的数量关系的系统。

因此我们认为，对于图形集合现象的唯一适当的解释是，年幼儿童难以协调内涵和外延。指出逻辑的（或前逻辑的）和亚逻辑的之间缺乏分化还不足以说明这种行为类型的普遍性。这种分化的缺乏有助于说明这么一种奇怪的方式，即年幼儿童倾向于将质的相似同仅仅的空间的邻近的关系相混淆，他们所构造的队列和复杂对象都表现了这种混淆。它也有助于解释那种将功能的附属关系引进相似性的倾向。只要这种联合本身的实质是部分的空间的接近，那么联合就无须是同类的，因为它只是构造仅仅基于相似关系之联合的逻辑。但真正的问题是，为什么会缺乏分化以及为什么它能存留：当年幼儿童开始对一组物体分类时，为什么他们最后构成了空间的和图形的整体，为什么这种行为要持续这么长的时间？现在我们知道其原因是，从一开始就对内涵做出了某种鉴别（这种鉴别的基础是感知-运动同化），而处于这个水平的儿童只能有一种类型的“外延”，这就是一个感知整体的空间的或图形的外延。虽然这种类型的外延可能适合于构造一个亚逻辑的整体，但它同那些由不连续成分所组成的逻辑类别的外延相去甚远，因为那种外延是不受空间安排的影响的。

3. 因此，我们便认为内涵和外延之协调乃是分类行为之发展的中心问题。从而我们就通过研究受试者本人的动作和运算来探索这种协调的发展。换言之，我们从一开始就认为，只研究那些以通常语言表述的那个言语概念体系所预想的儿童理解内涵和外延的方式是不够的。事实上，我们对于“所有的”“有些”之使用以及包含之数量关系所做研究的结果（第三章和第四章）非常清楚地表明，只有儿童能够自己对其内容进行

再构造,他们才能适当地理解言语概念的外延(因此也能理解感知构造的外延)。换言之,即使是理解言语概念,其起点仍然是受试者的动作和运算。但是,由于以此作为我们的出发点,我们便会自然而然地碰到那个令人费解而反复出现的外延与内涵之间关系的特征。事实上,我们已经面临一个只有通过发生的分析才能得到解决的错误的循环论证。

另一方面,我们不能通过研究单个的连续的成分来确定一组成分的共同特性(即这个类别的"内涵");如果我们这么做,我们就会遗漏其中的一个成分,这样,我们归纳的这个类别的那些特性就不是真正的"共同的"特性。所以我们必须要比较这个类别的"所有的"成分。换言之,我们决定其"内涵"的基础是对其"所有的"和"有些"成分的分析,这样,除非外延事先已经得到详细的说明或同时得到详细的说明,否则就无法知道内涵。另一方面,如果不确定这组成分的特性,我们又不能构造外延。但是,如果不在或大或小的程度上提到共同特性(它是这个类别的内涵),我们还是不能决定哪些是"所有的",哪些是"有些"。换言之,外延以内涵为先决条件,内涵也以外延为先决条件。我们能够理解如同第Ⅰ阶段的那种情况(内涵和外延完全不协调),我们也能理解如同第Ⅲ阶段的那种情况(每一个概念都具有这两个方面,但它们得到充分的协调,而且它们互相依赖)。但从一种情况向另一种情况的过渡却相当难以理解。

4. 如果我们检查一下我们的那些研究结果,那么这个难以理解的事情就开始明朗化。内涵和外延的逐渐形成主要是这两者之间的越来越多的协调:只有当它们互相分化开来才可能有这种协调。开始时,这两个方面的界说都不适当,因此,它们便相对地没有得到分化。尤其是,一个集合的外延(它决定了"有些"和"所有的"这些词汇的使用)即使在非图形集合的水平上也还不是一个纯粹的数量的概念,更不用说在图形集合的水平上,因为无论是对"有些"还是对"所有的"使用都表现出这么一种情况,似乎它们在以某种方式描述一个物体,而这个物体却不是单个的成分,而是作为整体的集合或全部物体。换言之,这些词汇的确切意义乃是部分的外延和部分的内涵(见第三章,结论)。其原因是,即使非图形集合并不依靠特定的空间构造,但它仍然是具有确定空间位置的那些成分的聚合,而不是完全由其内涵加以界说的一个真正的类别。然而,经常存在着某种相应于内涵的东西,因为即使是处于感知-运动的水平的儿童也能察觉某些关系,并将他所察觉的那些同化到各种功能的格式之中。同样地,在每一个水平上也有相应于外延的某些东西,尽管在长时期内这种"某些东西"呈现了相当突出的拓扑学特征和其他的空间特征。因此,如果有人只是问内涵或外延是如何出现的(它是产生于子虚乌有,还是一个从另一个中产生的),那么这种问题的提出便是错误的。应该提出的问题是,它们是如何分化的,以及它们是如何由于分化而得到协调的。

5. 显然,我们特别想知道究竟什么控制着从第Ⅰ阶段向第Ⅱ阶段,从第Ⅱ阶段向第Ⅲ阶段之平衡的过渡。为什么那些持续地在各种考虑的基础上构造聚合(图形集合)的儿童最后能够只考虑相似性和相异性(即内涵,这是他们在构造非图形集合时的考

虑——第Ⅱ阶段)?其次,我们如何来解释从非图形集合(它们是简单的并列,或许要加以再划分——第Ⅱ阶段)向包含的等级系统(第Ⅲ阶段)的过渡?

这个问题又不是突然出现的(它不是无中生有),因为这里还是有逐渐的分化和协调。这样,虽然只有到了第Ⅱ阶段相似性才完全支配分类,但在第Ⅰ阶段绝不是完全没有的;事实上,相似性在最初的感知-运动同化中即开始存在,而且在图形集合的细节方面发挥了相当大的作用(一对成分之间的关系,或一个队列内部的一个小集合成分之间的关系和复杂对象成分之间的关系)。第Ⅱ阶段的新颖之处是相似关系占据优势,但这乃是一种从图形的考虑中解放出来和对外延作了明显区分的事情。同样地,这些区分和非图形集合之再划分为等级的包含作了准备。而后者给人的印象是如此之深刻,以致我们不能在不进行第三章和第四章那些实验的情况下,对非图形集合和真正的分类做出区分。

6. 第Ⅰ阶段和第Ⅱ阶段之间的过渡显然由最初的事后认识和事前预见所控制(这和比较发展的形式是完全相同的),这些最初的事后认识和事前预见的过程便导致了第Ⅲ阶段之可逆的运算结构。

如果我们分析一下第Ⅰ阶段的行为和思维过程,我们一定会发现这么一个事实,即儿童碰到什么就干什么,既没有记住他曾经做过的,又没有预见他将要做的。队列便是一个例子,在安排队列时,他一直在改变那种决定将该集合中的一个成分与下一个成分并列的标准;另一个例子是集合对象或复杂对象,儿童只是将成分放到一起而没有任何始终如一的计划(事实上,他可能会说"我要造一座房子",现在还未造好,不过,虽然从某种意义上说这是一个计划,但这意指他现在已经忘记了最初的意图——分类,因为他已经不知不觉地转变为玩耍)。我们在第七章(第3节)中所看到的是,只有在他们放弃这种连续的同化,并通过记住他开始构造集合的方式而表现出某种追溯过程的迹象的时候,他们才开始抽象共同的特性。这使他们能够在开始时的所为和后来出现的所为之间保持某种一致性,这甚至也使他们能够按照后来的情况来改变前面已经完成了的。换言之,一旦同化的格式变成追溯的,它也就呈现了预见的特征,因为如果不对未来做出选择和对未来有所打算,他就不能使过去保持一致。开始时,这仅仅是不完全的预见,虽然其部分的含义是儿童不能从总体上预见将来,但它也是由于这种预见只能在他正在进行的尝试与错误的过程中产生。不过,即使是这种预见不完全,它也有利于产生一种比连续的同化好得多的方法。这个方面的关键的实验是那些将视觉条件下的分类同仅限于通过触摸来感知的分类行为加以比较的实验,因为它们表明了这些早期的事后认识和不完全预见在非图形集合之构造,即从第Ⅰ阶段向第Ⅱ阶段之过渡方面的重要作用。

当然,无论事后认识还是事前预见,都不能创造某种全新的东西。换言之,现在的这个结论并不是循环论证或同义反复,如果我们说:"儿童迟早将能够发现一组成分的共同特性,而且他将那些成分一起归入一个以那种标准为基础的集合之中——因为现

在他能够改变他自己的行动并预见它们的共同特性!”这才是循环论证。事实上,由一个共同的行动联合起来的任何两个成分之间都有一个共同的特性。我们想知道的不在于共同特性是如何产生的,而是一个同化的格式(它是所有行为共有的特征)开始时如何以纯粹连续的方式发挥作用,然后又如何变成一种可以适用于任何数目而不仅是两个或三个成分(先是连续地察觉,然后忘记)的思维或表现工具的。我们知道,那几个成分后来通过一个稳定的内化的动作联合了起来。追溯和预见的重要性在于,这两个概念帮助我们详细地说明了这种内化、持久性和一致性的条件,它们表明,内化、持久性和一致性都不是一件由于一个未加解释的意识而突然出现的事情。相反,我们看到,它们的出现乃是连续的动作之间逐渐协调的结果,这种协调最终克服了在一个系列中所固有的单向性,并呈现了从目前向过去转移的形式,而这种形式很快便开始同将来密切联系起来。只要我们知道这种类型的转移对于整个一组成分之间的比较是必不可少的,那么我们就开始理解了这些调节之所以很可能在最终呈现运算形式的原因,因为这种转移本身就是可逆性的一个早期形式。

7. 由于第Ⅱ阶段儿童的行为现在包含了一定程度的事后认识和事前预见,他就开始构造非图形集合。但他面前敞开着两条道路,而且它们将导致两种互相对立的构造方法。它可以开始于一些小的集合,将一些小集合中成分的共同特性作为他的标准,然后联合这些小集合以形成一些具有比较一般的共同特性的较大的集合:这是上行法。另一条道路是,他可以从具有一般特性的较大的集合开始,然后对它们进行再划分以形成一些较小的集合:这便是下行法(在每一个阶段,再划分可以是、也可以不是两分法)。

我们很自然地会自问,是否有某种能够发现运用这两种方法之顺序(这个顺序具有普遍性)的方法:例如,那种认为儿童在运用下行法之前总是先运用上行法的说法是否对?然而我们发现,对于以这种形式提出来的这个问题没有一般的解决办法。一个原因是,人们无法将一个类别的形式同它的内容分离开来,而且,实际的方法确实部分地依赖于将要加以分类的那些材料是否具有大小、颜色或形状等方面的差别,这些差别的强度如何,这些特性的分布以及成分的绝对数目。但还有另一个更为重要的原因。实验的结果表明,从总体上看,只要一个儿童一开始就连续地摆弄物体,他自然而然地就运用上行法;相反,如果他在未安排物体之前先努力预见结果(而且令人奇怪的是,如果是触觉分类,只要他开始分类),他就倾向于先采用下行法。一个推论是,这肯定是由于儿童之间有许多个别差异(而且造成差异的原因主要是性格的差别而不是认知的差别):一个儿童可能想一开始就玩弄物体,等到他作了一些初步的探索之后再精确地形成他的设计;另一个儿童可能在行动之前先犹豫一番,而且可以在较早的阶段做出预见(这并不意指预见较好)。结果我们便发现,不存在一个固定的顺序,这两种方法可以混合(或结合)于各种方法之中。

但是还存在着另一个问题,现在我们知道,它比年龄的顺序还要重要些。假定我们提出这么一个问题,即这两种方法在每一个年龄得到协调的程度如何:对这个问题的答

复是，尽管上行法和下行法可以在第Ⅱ阶段中的任何时候出现是一个事实，但作为整个阶段之最显著特征的是，它们根本没有充分地协调起来。一个运用这两种方法之一种的儿童发现，这对于预见使用另一种方法的结果只有很小的帮助作用。例如，他能够将一个集合(如 B)加以再划分，以形成两个子集(A 和 A')；现在，这应该使他知道 A 和 A'都是包含在 B 之中的。但在第Ⅱ阶段，如果儿童不从这个新的观点出发重新回顾他的划分，他就不能认识这个事实，有时候甚至在重新回顾之后还是不能认识这个事实。换言之，虽然他在预见，但他仅仅在预见这么做或那么做的纯结果，而不是在预见整体的转换。这就是他不能理解类包含或一般运算的原因。

现在我们便可以明白尽管第Ⅱ阶段比第Ⅰ阶段有很大进步，但这时的外延和内涵仍然没有充分分化和协调的原因了。数量词"所有的"和"有些"的准确使用必须要具备包含的格式。而包含的格式又转过来意指上行的过程($A+A'=B$)和下行的过程($B-A'=A$)——它是前者的逆反——已经融合而形成单一的运算整体。

8. 如果循此加以解释，那么，只要事后认识和事前预见比较发展，从第Ⅱ阶段向第Ⅲ阶段的过渡就同人们所期待的情况毫无二致。在第Ⅲ阶段刚开始时，事后认识和事前预见只是部分的(第七章中的不完全预见便是一个例子)，它的意思尤其是指，它们不同转换本身有关，而是同转换的孤立的或静止的状态有联系。不过我们已经知道，事前预见和事后认识之间是来回地迁移的，所以我们就有理由认为，这个过程迟早会达到平衡。如果(而且只有)受试者在面临他得加以分类的一组物体时能够预见有关完全分类的几个阶段，并能够同时预见这些阶段的逆反次序，那么这种状态才能存在。换言之，他必须既要预见联合，又要预见再划分。当上行法和下行法一起形成一个真正的转换系统时才有这种平衡，这是受试者在预见转换本身而不是它们的静止结果时必定会出现的情况。虽然事前预见和事后认识都进入了这样的一个系统，但由于它们的结合是如此之紧密，所以它们便具有另一个正运算和逆运算的特征。

我们发现，要知道儿童是否已经达到这个平衡的阶段，最好的办法就是检验他是否能够确定包含的数量关系(第四章)。有时候会出现这样的情况，在儿童正确理解问题之前，他也能构造一个等级的分类，我们得很好地确定他的理解是否完全符合我们的要求：当询问儿童 A 多些还是 B 多些($B=A+A'$)时，他常常在开始时将 A 和 A'加以比较。然而，人们很容易将言语方面的误解同不能把握实际关系分别开来，如果儿童能够把握实际的关系，那么他事实上就肯定能同时预见下列两种运算：正运算($A+A'=B$)；逆运算($A=B-A'$)。最后的结论便是：他能够理解包含的关系。

9. 如果继续循此路线加以解释，那么，标准的改变或"迁移"就只是运算的变动的另一种表达方式，因而也是可逆性的另一种表达方式，这乃是一个完全分类结构之标志。如果成分没有变化，那么改变标准便意指从一种分类的样式(如 C)"迁移"到另一种分类的样式(C'或 C'')。但这不仅仅是替换，因为这两种分类必定是有联系的。换言之，这种"迁移"表达了一套新的运算，它是一个"替代"关系的系统。所谓"替代"关系的

系统是指 $A_1+A_1'=A_2+A_2'$ 这种类型的那些关系，其中 A_2 包括 A_1' 的部分或全体，同样地，A_2' 也包括 A_1 的部分或全体。这些替代的关系形成了一个与其他运算同等的运算"组"，我们正是根据这种类型的组才能够将一种分类样式转换为另一种样式的。这种转换的一个简单例子是相等：法国人和其他人（即非法国人）=英国人和其他人（即非英国人）。因此，当儿童达到一般的运算变化的水平时，他就能够改变标准，这并无令人惊奇之处。

10. 我们应该提醒读者，在附加分类和倍增分类的发展中我们始终发现有平行的现象，尽管后者的构造样式事实上比前者更易于从直观上加以接受。平行发展这个事实并不意指它们的发展主要是一件感知的事情。但在同时，这些倍增的结构又不是从属于附加结构的发展，它不依赖于某种类型的概括。实际的情况是，儿童通过构造等级的包含体系而逐步发现了如何按一个标准来进行分类，与此同时，他们也通过构造交叉分类矩阵而逐渐学会了基于两个或三个标准的分类。这两个过程是同步的，因为它们表达了同一个一般的运算的组织样式。

11. 然而，最突出的平行发展的实例是整个的分类和整个的序列（不管它们是附加的还是倍增的）之间的平行。这个发现最值得注意，这有两个理由，由于有了这两个理由，我们便可以预期序列的发展将跟随一个不同的过程。序列具有一个非常容易接受的"好的"感知形式，而分类却不然。相反，分类结构却始终得到语言的句法结构的强化。

实际情况仍然是，除去那些在序列中没有对等的标准的变化之外，分类和序列的发展都有一些类似的转折点，而且转折的年龄大体上相同。在分类和序列中，我们发现它们都经历了第Ⅰ阶段（关系的建立是连续的），第Ⅱ阶段（问题可能会得到解决，但方法是前运算的）和第Ⅲ阶段（上行法和下行法得到了协调）。此外，对于它们两者来说，我们都可以在静止构造的预见和转换的预见之间做出类似的区分。序列方面的第一种类型的预见得到一个序列构造之"好的"直观形式的强化，但在相同的年龄（即5—6岁），分类的前运算的预见也出现这种情况。无论分类还是序列，这种"不完全预见"都不足以造成实际过程中立即用运算方法取得的成功。同样，两者之第二种类型的预见都在7岁或8岁左右时出现，而且这种预见都同运算的行为有联系。

分类和序列之间发展的平行性在交叉分类和倍增序列方面最明显。从理论的观点来看，平行性最重要，因为它最有力地支持了这么一个论点，即运算行为之发展乃是一个自主的过程而不是一种从属的、依赖于感知的发展或语言的发展的结果。我们决不否认语言是有助于运算发展的一个因素，但平行性证明，运算并不直接产生于语言，而且语言也不是运算发展的主要因素。

12. 暂且将运算发展之自主性这个至关重要的一点搁置不论，我们应该提醒读者，我们在本书中一直在研究其发展的那些结构事实上是在具体运算的水平上完全形成的。这意味着，它们相应于基本的类别和关系的"组合"，而不包括类别和关系逻辑的全

部。尤其是，这些结构并不包括那些与命题结构（如“二元法则”的各种表达方式）同型的分类结构。事实上我们已经接触到儿童后来发现这种转换（这意味着一个比这些“组合”更为完全的结构）的方式。问题是：什么时候儿童才能理解$(A<B)\rightarrow((\text{非} A)>(\text{非} B))$这种转换？我们发现，只有到了形式运算的水平时这种形式才被理解，这并无奇怪之处，因为这意味着否定（或互补）和反演的联合使用，而这恰恰是那种构成 INRC 群的命题之四种转换的结构（见第五章第 5 节）。

13. 现在我们便回到这项研究始终在揭示的那个运算发展之自主性的问题上来。我们应该指出，这并不意指逻辑运算像某种“国中之国”那样是同整个心理生活相分离的。情况正好相反。运算乃是动作之继续；它们表达了所有的动作普遍具有的某些协调的形式；不论这种协调是否完全，运算和前运算的协调都进入了形形色色的行为类型之中。我们之所以发现它们的发展在很大程度上是自主的，而不从属于这种或那种比较具体的因素（如感知、学习或语言），其原因就在于此。换言之，我们是在说，运算之所以是自主的，是因为它们具有普遍的适用性，而这恰恰颠倒了人们常常坚持的一种说法——它们之所以是自主的，是因为它们适用的范围非常有限。

我们再次看到，逻辑运算（具体来讲就是分类和交叉分类，序列和倍增序列）同某些非常基本的动作——将东西堆在一起，将堆在一起的分成几群，摆成队列，等等——有着密切的联系。发展的连续性是惊人的：在这些动作之后，我们对于这些动作有着各种各样的调整，而这些调整反过来又变得越来越复杂，结果，整个的过程最后就得到内化和概括。主要的调节类型当然是那些追溯的和预见的过程，无论是在受试者的行为里还是在受试者行为的预见里，这两个过程都很突出。如果循着他们的发展去观察，我们就会发现可逆性几乎是接踵而至地首先出现的，随后我们就会看到可逆性如何发展为具有我们最熟悉的那个形式：整个运算最一般特征的形式。首先，在外显行为的部分之间开始有协调；然后这些调节便逐渐深刻到足以使动作越来越内化；最后，它们便呈现转换的、可逆的运算结构的形式。这个发展的顺序同我们在先前关于逻辑—数学过程之发展的研究中所发现的顺序在本质上是相同的，而且如果说这些阶段的界说有些什么新颖之处的话，那就是它比任何其他的界说要更精确些。

14. 在我们讨论这个发展的自主性时，我们希望别人能够从这么一个非常精确的意义上去理解我们的想法，即对于这个发展的解释不一定要涉及那些在实现这种发展方面无疑起一部分作用的因素，如成熟、学习和社会教育（包括语言）。因为对这种发展所做解释的关键是平衡化的概念，它是一个比这些概念中的任何一个都要广泛的概念，而且它包含了它们全部。我们之所以要坚持这一点，不仅仅在于我们对于一个系统化的阐述有兴趣，或恪守某一套假设，而且还因为我们所有的研究都证明这是一个必然的结论——这是一个非常简单的理由。

以分类为例：在第Ⅱ阶段（受试者逐渐地接近于运算的解决问题的样式），我们发现受试者虽然摇摆于上行法和下行法之间，但仍然没有达到那种将使他理解包含之本质

的这两种方法的稳定的综合。那么第Ⅲ阶段是怎样达到这种稳定性的呢？答案是，通过一个补偿的系统，而这个补偿系统是：受试者将为上行方向的每一个转换都找到一个对应的下行方向的转换，反过来也是如此。换言之，作为这种发展之结果的运算结构（它本身是先前各种水平所有追溯和预见调节的顶点）表现了一种平衡的状态，这既因为它是一种稳定的状态，又因为从进一步的意义上来说，它的稳定性乃是补偿作用的结果（它反过来又表示了这些特定运算的可逆性）。

在序列方面，如果受试者能够同时遵循一个序列的两个方向，那就有了平衡。尤其是，当他能够在进行一个序列之构造时从一开始就将一个成分既同它前面的又同它后面的成分加以比较（如 $E>D$、C，以及 $E<F$、G）时，就有了平衡。这里的稳定性也是补偿运算的功能，而可逆性仅仅表现了它们的补偿性特征（〈和〉）。

能够将这种发展归结为一系列的阶段（每一个阶段都具有比它前面阶段更高程度的平衡）的价值在于，这个过程本身本质上乃是平衡的过程。它之所以是平衡过程，是因为在运算的可逆性和某些类型的界说其平衡的补偿作用之间有着非常密切的联系。只要如此理解这个过程，那么人们就能够解释它为什么呈现这种形式的原因了（这种解释只需将那些连续的阶段转化为盖然性术语）①。于是，每一个连续的阶段显然只可能表现为前一个阶段的结果。这句话的意思是，朝向最后平衡的这种运动并不完全由诸如人的大脑等机制来决定，而是从这个连续过程本身的性质中得到了保证，其理由是，序列方面每一特定阶段的行为都从前一阶段之完成中获得了出现的盖然性，它乃是先前行为的功能和它的结果。

不用说，人们仍然还会合乎情理地提出这么一个问题，即构成这种动作之协调、追溯和预见的调节以及运算本身之基础的心理—生理机制是什么。这便是要解释这些东西是怎么可能的。我们在这方面已经做的工作非常别致——详细地说明为什么（假定从心理学的角度来讲它们是可能的）它们在出现时呈现这些特殊的形式，以及它们在什么时候才可能出现。

15. 现在是我们重新考虑我们在序言中提出的那几点的时候了。首先，我们要谈语言的作用。我们还是准备承认，某种语言对于正在讨论的这些结构（即分类和序列）的完成是必要的。这是因为运算含有符号，因而也含有物体的象征性的处理，因为它们超出外显行为所做处理的范围。但我们想坚持的要点是，仅仅有语言还是不够的。相反，儿童是否理解像"所有的"和"有些"这些词汇或任何用以指类包含概念的其他的词语形式，同样地，他是否理解指序列之不对称和转换关系的那种语言，这都是些主要决定于他在运算行为的发展——这种发展相对地与任何其他发展无关——中已经达到的水平的问题，因为它受它自己的平衡法则所控制。因此我们说，语言并不是这个过程的充分的和必要的原因。

---

① 参见皮亚杰：《逻辑与平衡化》，载《发生认识论研究文集》，第二卷，1957，第27—113页。

至于成熟，我们已经谈到，没有成熟，受试者就几乎不可能达到他一直在处理的那种连续的协调。但我们也表明，就算可能有某种依赖成熟的协调，那么，如果没有一种使其出现的趋势，这种协调还是不能出现，而这种倾势乃是依赖于一种受连续的盖然性控制的平衡过程的。换言之，成熟也不是一个充分的原因，因为能够决定这种或那种行为形式具有何种程度之平衡的，不是成熟。我们还想进一步指出，由于在成熟和（社会的和物质的）经验之间肯定存在着相互作用，所以成熟本身也得服从平衡的法则。

最后，我们要转而考虑感知因素和感知-运动因素所发挥的作用。正像我们在序言中指出的那样，这两个因素都发挥了重要的作用，但两者都有限度。读者肯定能回想起，在我们对于分类和序列早期阶段的解释中，它们在不断地出现。例如，如果不提连续的同化（为此我们必须探索“内在”相似的来源），就难以说明第Ⅰ阶段的图形的集合；这些同化乃是典型的感知-运动的一般格式。同样地，作为这些真正类别之先兆的外延毫无例外地都呈现了空间的形式，因此这在很大程度上应归因于感知。它的意思是，感知-运动因素和感知因素的联合赋予这些集合以明确的特征。然而，图形集合的局限也是由于上列因素：这些局限本质上是由于同化的连续特征和这种基本的外延形式的空间特征。同样地，在序列的情况中，只有根据序列之感知构造和某些其基本特征为感知-运动，但又试图作初步协调的基本行为样式，包括总括预见的序列形式（我们看到，它乃是一个值得注意的早期发展——见第四章）在内的那些早期阶段才能得到说明。

这绝不是说我们是仅仅通过这些途径而发现感知因素在分类和序列的发展中发挥重要作用的（在解决矩阵问题时，它们尤其突出，见第六章）。但是，无论在哪一种情况中，不管感知因素看起来是有促进作用还是阻碍作用，运算行为的发展都显示出要超越单纯的感知。运算行为有其作为一个整体的感知-运动活动的来源，而且感知结构也有一个类似的来源，因为它们也要经历某种发展，这样才能很好地将那些作为任何一个特定阶段之特征的各种感知结构理解为一种先前所有活动之剩余的结晶状的沉积。因此，分类和序列之运算的活动最终要超越任何种类的感知构造，这几乎没有任何可惊奇之处。事实上，它们最终将要表现为各种成套的转换形式，而这些转换都具有其运算的结构，并受其自身的平衡法则所控制。

于是，这就是那些最初的分类和序列之组合的来源；早在形式推理所特有的那些比较复杂的“组合”出现之前，这些基本的组合就已经出现了，这便使我们目前的研究告一段落。仍然需要说明的唯一的事情是，我们非常清楚地知道还有许多工作有待完成。尤其是我们还没有彻底研究积极思维和意象之间的关系问题。我们感到，对于前者，我们开始了解得多些，因为这乃是一个运算机制之发展的问题。但是，在对感知构造了解很少的情况下，我们还不能完全解决整个的心理意象的问题。从最初开始符号化起，所有的心理活动（不管是前运算的还是运算的）都毫无例外地伴随着一连串的心理意象（即以想象形式出现的表象）。既然心理意象具有其自己的，既不同于感知又不同于运算的法则，那么我们就需要理解这些法则以完成我们对于预见之机制的认识，对于我们

的解释(尤其是第七至第九章的解释)来说,后者将显示出极度重要的意义,因为它们同运算的关系相当密切。因此,整个的预见和意象的问题便形成了一系列新的研究主题,我们已经对此作了一些研究,而且在不久的将来,我们将完成它。

数学认识论与心理学

〔瑞士〕埃弗特·W.贝丝 〔瑞士〕让·皮亚杰 著
胡林成 译
张 野 审校

数学认识论与心理学
法文版　*Épistémologie Mathématique et Psychologie*, Paris: Presses Universitaires de France, 1961.
作　者　Evert W. Beth, Jean Piaget

英文版　*Mathematical Epistemology and Psychology*, Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company, 1966.
英译者　W. Mays

胡林成　译自英文
张　野　审校

内容提要

逻辑与数学的本质问题是一个哲学话题。针对该问题，柏拉图主义者或语言模式论的解释逐渐流行，而抽象主义者和建构主义理论已风光不再。贝丝(E. W. Beth)和皮亚杰在本书中分别从不同的观点和立场研究了这一个问题。

在本书的第一部分中，贝丝对于哲学中研究数学的历史进行了详细的研究，让我们认识到亚里士多德的实证科学方法的重要性。贝丝告诉我们，这种方法有三个基本准则：一是演绎性，二是自明性，三是实在性。第三个条件意味着实证科学的基本概念必须指向真实的实体领域，这样才会使该方法有意义。在亚里士多德看来，逻辑理性在数学中扮演着重要角色，而纯粹的直觉则扮演着次要角色。

本书的第二部分由皮亚杰所写，由于他主要研究个体的发展，所以对逻辑数学思维的历史发展涉及的比较少。他把儿童可观察的行为作为逻辑和数学分析的基础，而不是把成人的内省作为分析基础，所以他特别强调外显行为在思维概念机制形成中的作用。皮亚杰认为，概念抽象的过程是儿童在较大年龄出现的动作高度形式化的结果，这种形式会应用到复杂的学习过程中。

皮亚杰发现智慧行为包含的首先是简单的分类以及表示关系的一些动作，在这些基本的智慧行为中，儿童对其周围事物进行区分、排序、比较，并以此为基础衍生出儿童以后的逻辑、数学行为、命题或者形式运算。皮亚杰运用“运算”概念来指代儿童的动作或者身体运动系统，运算本身蕴涵在思维活动的形式之中。皮亚杰区分了四种运算形式。第一，感知运动；第二，前运算思维；第三，具体运算；第四，命题运算阶段或者形式运算阶段。皮亚杰认为应该关注历时性研究，历史的、心理发生的研究具有认识论方面的重要意义。用历时性方法研究知识决不会妨碍共时性的研究。

在贝丝和皮亚杰的各自论述中，他们都指出了亚里士多德实证科学论的内在困难。实证科学所提出的准则远非不证自明的真理，它们充其量是起一点作用的假说或准则。所以，就演绎性原则而言，与以往任何时候相比，我们都没有把握认为，逻辑和数学整个都可以放到实证科学中进行讨论。至于自明性原则，我们似乎没有理由相信，现在看起来清楚和确定的东西，未来永远都会如此。

胡林成

目录

纪念贝丝(1908—1964)/587
译者序/589
前言/595
第一部分/597
序言/597
第一章 传统三段论不能分析数学思维/599
1. 笛卡尔(Descartes)/599
2. 洛克-贝克莱问题/600
3. 贝克莱(Berkeley)、休谟(Hume)和康德(Kant)的解答/600
4. 分析和综合的判断/604
5. 笛卡尔和康德的直觉主义/606
6. 非欧几何(Non-Euclidean geometry)/608
7. 直觉主义的最新形式:兰格(F. A. Lange),布伦茨威格(L. Brunschvicg),戈布洛(E. Goblot),庞加莱(H. Poincaré),布劳威尔(L. E. J. Brouwer)/609
第二章 对于数学推理的心理学解释/613
8. 密尔(J. Stuart Mill)/613
9. 杰文斯(W. Stanley Jevons)的批判/614
10. 马赫(E. Mach),齐亨(Th. Ziehen),斯特林(G. Störring)和海曼斯(G. Heymans)/615
11. 胡塞尔(E. Husserl)的假想的反心理主义(supposed anti-psychologism)/618
12. 恩里克斯(F. Enriques)和曼诺利(G. Mannoury)/620
第三章 逻辑学家的传统/622
13. 亚里士多德的观点:与希腊数学实践的一致性/622
14. 帕斯卡(Pascal)/623
15. 莱布尼茨:对公理的论证/624
16. 弗雷格:对胡塞尔和海曼斯(Heymans)的影响/626
17. 罗素(Russell):对基础的批判/627
18. 集理论学家:康托尔(Cantor)和策梅洛(Zermelo)/628
19. 其他的反应:布劳威尔(Brouwer)的直觉主义,曼诺利(Mannoury)和恩里克斯

(Enriques)的心理主义,希尔伯特(Hilbert)的激进形式主义/629
20. 哥德尔危机/634
21. 自然演绎:根岑(Gentzen),库里(Curry),洛伦岑(Lorenzen)/639
22. 句法与语义/645
23. 语义表方法/647
24. 代数和拓扑学概念/654
第四章 严格证明与启发式过程/659
25. 数学家的类型学/659
26. 庞加莱(Poincaré),阿达玛(Hadamard),波利亚(Polya)的观点/660
27. 寻找一种既是启发式又是证明式的方法:笛卡尔以及对古人的分析/664
28. 莱布尼茨和决策问题/665
29. 更基本水平的坚持:阿基米德的方法/666
30. 新颖的思想:创造还是发明,建构还是发现?柏拉图主义的回答:弗雷格,康托尔和埃尔米特(Hermite)/667
第五章 直觉结构与形式化的数学/670
31. 空间知觉:康德,赫尔姆霍兹(Helmholtz),克莱因(F. Klein),尼克德(Nicod),怀特海(Whitehead)和塔斯基(Tarski)/670
32. 时间直觉:康德(Kant),柏格森(Bergson),布劳威尔(Brouwer)和德·格鲁特(De. Groot)/673
33. 基于希尔伯特(Hilbert)的有限直觉以及无限论的无限直觉/675
34. 柏拉图哲学作为真实或者虚幻的直觉观:唯名论者的批判/677
第六章 "思维机器"与数学思维/679
35. 形式化与"思维机器"的建构/679
36. "思维机器"的建构意味着对关键问题的解答/680
37. 布劳威尔的"从目标跳到方法(leap from end to means)"的不可约简性/682
38. 递归函数:无解问题,绝对无解性/682
39. 数学思维的两个自由度:解决问题与设置问题/685
40. 依据伯奈斯(Bernays)所获得的自明性/686
格里兹(Jean-Blaise Grize)对"思维机器"想法的评论/689
第二部分/691
序言/691
第七章 来自逻辑学和心理学关系的历史经验/695
41. 逻辑学研究和心理学研究之间关系历史的三个阶段/695
42. 合作需要/698
43. 发生观与标准观/705

第八章　逻辑数理思维的一般心理问题/710
A. 结构问题/710
44. 布尔巴基的“矩阵结构”/710
45. 主体动作和运算中的类别和关系的结构；“群集”的形式化/712
46. 可逆性的两种形式(倒置和互反)以及它们在四种转换群中的终极结合/718
47. 儿童几何学中的基本拓扑学/722
48. 三种基本结构与布尔巴基矩阵结构的关系/724
第九章　逻辑数理思维的一般心理问题(续)/727
B. 自明性、直觉与发明/727
49. 自明性，它的变量与逻辑必要性/727
50. 发明与发现/731
51. 数学“直觉”的多元形式/737
第十章　“纯”思维的心理学问题/748
52. 纯数学的发生学根源/748
53. 纯数学的心理学问题/758
54. 形式化的心理原因/761
55. 普通思维的形式化如何让发生方法与公理方法结合起来/765
第十一章　形式分析与发生分析的会合/768
56. 自然数的建构/768
57. 逻辑还原论的困难/776
58. 形式化的局限/779
第十二章　认识论问题与逻辑和心理的相关性/782
59. 经验论的解释与先验论/782
60. 对于数学的唯名论或者语言学的解释/785
61. 柏拉图主义者对于数学的解释/788
62. 动作的一般协调律对于数学的解释/791
总结论/797
文献总汇/803
原版人名索引/811
原版主题索引/819

纪念贝丝(1908—1964)

在本卷书开始之前,我要和读者一起纪念英年早逝的贝丝。这本书由梅斯(W. Mays)从法语版译成英语,贝丝对此非常高兴,他用惯常的认真精神通读了本书。贝丝是一个伟大的逻辑学家,他对逻辑学的历史以及与逻辑学有关的其他领域都非常熟悉,这样的学术背景决定了他的认识论立场。贝丝写作了本书的第一部分,他思考和整合了康德主义的有关观点、曼诺利(Mannoury)的心理语言学以及布劳威尔(Brouwer)的直觉主义的心理成分,最终通过"学术转向"形成了一种独特的形式主义者和逻辑学家的观点。1950年左右我认识他的时候,他对几乎所有与心理学有关的思想持怀疑态度。

本书的写作缘起也值得纪念,因为他是贝丝人格魅力和终极学术观点的集中体现。正如他在序言中所说,他要通过"持续的努力来认识到各种观点都是一种理性的表达",他要"对各种当代思想趋势进行一种学术上的综合"。在1950年我出版了一本关于逻辑运算机能的书,我的出版者决定把这本书叫作《逻辑的训练》,贝丝在《方法论》杂志上予以猛烈的抨击。博琴斯基神父(Father Bochenski)曾经要求我写一个评论,但是他却没有发表。后来我把我的回应简化成几句话,我认为如果两个作者因为他们的学术观点分歧很大而相互不能理解,那么唯一有效的办法就是两个人来共同完成一部作品,在这部作品中两个作者对同样的资料进行调查分析,直到双方都能够满意地理解和接纳对方的观点为止。正是沿着这一思路,我给贝丝写信,请他参加各种各样的会议,在会议上我们讨论心理形式以及某些基本逻辑结构的发展变化。贝丝展现了他学术上的宽宏大量,他没有拒绝我的邀请,因为在他看来,参加这样的活动是一种冒险。十年后我们最终出版了目前这本书,其基本的结论主要由贝丝撰写。这本书的两部分是独立写作的,第一部分(第一—六章)由贝丝撰写,第二部分(第七—十二章)由我撰写,每一个作者对对方的写作内容都进行了审阅。

这一段经历给我留下了美好的回忆,它让我看到了贝丝良好的学术品质,至于他的为人,那更是无可挑剔,因为他的朋友们对此深有感触。用他的话来说,他是一个逻辑学家,但是他仍然相信,逻辑学和数学的基础并不充分,由于他高度的学术诚信以及良好的洞察力,他拒绝涉足对他而言尚未充分证实的领域。他的学术观点与"学院派"哲学家的观点相左,学院派哲学家的观点局限于一些终极系统,但是当贝丝发现自己的观点过于极端时,他却有着超凡的哲学勇气来修正自己的立场和观点。

贝丝的英年早逝对于当代认识论是一个巨大的损失。虽然他一直受到贝丝夫人的爱护、关心和帮助，但是他仍然有许多工作要做，尤其是他对自然演绎的研究引导我们在这个领域取得了更多的进步。

贝丝给我们树立了一个伟大的榜样，他作为一个有着深刻理解力的研究者，没有让自己变成一个大一统的综合者，他曾经直面各种需要解决的新问题。无论目前的新情况与他的早期的观点有多大的冲突，无论需要他做出多大的努力去调整自己以适应新情况，为了这一目标，他都做到了。

皮亚杰

译者序

最近几年关于逻辑和数学的本质的问题已经成为一个哲学议题。柏拉图主义者或者语言模式论的解释逐渐流行,而抽象主义者和建构主义理论已经风光不再。在本书中,贝丝和皮亚杰分别从不同的观点和立场研究了这一个问题。尽管贝丝讨论的是数学中启发式思维的本质,但他所用的方法却主要是历史批判法,而皮亚杰则采用的是心理发生的观点。本序的主要目的是对他们的各自观点进行总结。

在本书的第一部分,贝丝对于哲学中研究数学的历史进行了详细的研究,让我们注意到亚里士多德(Aristotle)的证明科学(demonstrative sciences)方法的重要性。贝丝告诉我们,这种方法有三个基本的准则:一是演绎性,二是自明性,三是实在性。第三个条件意味着证明科学的基本概念必须指向真实的实体领域,这样才会使该方法有意义。在亚里士多德看来,逻辑理性在数学中扮演着重要的角色,而纯粹的直觉则扮演着次要的角色。

我们可以发现,在笛卡尔和康德的作品中存在从形式的逻辑理性到直觉的转换。对概念的定义以及对真实的证明直接来自于直觉,而不需要形式推理这一中介。数学论证等同于实际的思维过程,而不是从形式逻辑中衍生出的一种体系。例如康德认为几何学和代数学分别以空间直觉和时间直觉为基础。但是,随着非欧几何的发现,这种观点受到了极大的削弱,这就意味着在不需要直觉的基础上,我们可以有正确的数学论证。

另一方面,在莱布尼茨(Leibniz)看来,正是逻辑和形式推理为数学提供了基础。数学概念可以用逻辑同一性或者重言式这样的术语来界定。他还试图去创造一种形式化的语言,因为他相信通过这种形式化的语言,我们可以运用机器去论证。莱布尼茨的观点影响了逻辑学家弗雷格(Frege)的逻辑程序以及康托尔(Cantor)的理论。但是,正如贝丝所指出的,弗雷格和康托尔的努力都不符合亚里士多德方法论的准则。因为,第一他们没有得到一种纯粹理性的自明性,第二,哥德尔(Gödel)的研究发现,到目前为止仍然不能确信所有的数学定理都是可以被证明的。

柏拉图主义者(Platonist)认为数学的研究对象是非经验的客体领域,感知觉无法把握这些对象,这种思想对数学思维的影响胜过了其他思想。柏拉图主义认为数学并不是建立在经验数据之上,它只能通过演绎推理得以发展。贝丝引用了弗雷格的观点,认为数学家就像地理学家一样,他不能主观地制造任何东西,他只能够发现和命名已存

的事实。例如,康托尔认为他有一种对无限宇宙中实体的直觉想象,如贝丝所认为的,这种直觉想象是现代数学的主要基础。但是,贝丝对这种想象的准确性也持怀疑态度。

贝丝发现,尽管柏拉图主义和演绎方法在数学思维的发展过程中扮演着重要角色,但它们并非全部。例如,在过去人们一直认为,直觉是产生新思想的有价值的思想源泉,而且直觉经常导出一些定律。贝丝认为尽管数学家在使用着启发法,但是他们却用证明的形式来表达发现的结果,同时还在努力消除或者隐藏发现过程中用到的直觉方法。因此,尽管数学推理中的逻辑分析方法给我们提供了重要信息,但是它本身却不能够反映数学思维的全貌。

另一方面,人们在讨论能否创建一种思维机器来代替逻辑学家和数学家。这种想法其实是试图把启发式的方法与证明的方法画上等号。这种想法认为数学是一种重言式的封闭系统,它并不是一个开放的能够产生新发现的系统。贝丝认为,不可能制造出能够代替数学家和逻辑学家的机器。因为,首先,我们不能对所有的逻辑和数学进行形式化,机器能够解决的问题类型也非常有限。第二,为了发现达到特定目的的有效方法,人类智慧的参与是必需的,而建构数学机器的人却忽略了这一点。

贝丝的解释的优点在于他详尽地研究了数学家的类型。他强调,做出重要发现时的数学家所经历的数学经验是多种多样的。他说,为了获得一种我们需要的数学思维的科学的拓扑形式,多种多样的数学经验是必需的,而要获得多种多样的数学经验,只有通过适当的心理学的方法。只有这样我们才能对数学家提供的内省材料给予连贯的解释。

贝丝进一步指出,由于亚里士多德的证明科学以及笛卡尔(Descartes)-康德(Kant)的直觉主义理论的式微,当代数学家已经很少用直觉的自明性作为界定概念的基础。贝丝同意伯奈斯(Bernays)的观点,他认为自明性在人类的智慧发展中并不是一个恒定的因素,有时候它可能会起误导的作用。在这样的思想背景下,贝丝发现,有些类型的自明性已经被人们抛弃了,如,欧几里得几何的自明性,而有些新的类型的自明性又被数学家所采用,如,笛卡尔的自我意识。

至少在这个意义上,伯奈斯和贝丝的观点吸引了维尔德(Wilder),维尔德相信数学受制于文化的变迁。维尔德指出,在回答诸如"数学是什么?"这样的问题时,我们可以说它现在是什么,它过去是什么,比如在公元前100年的希腊数学是什么。尽管大部分的希腊数学已经成为现代数学的一部分,但是他认为这并不意味着数学在时间上是无限的。例如,与现代几何学的公理形式相比较,希腊几何学拥有更多的绝对性特点。弗雷格和罗素(Russell)的数字概念与毕达哥拉斯(Pythagoreans)的数字概念又是不同的。维尔德认为,数学的未来并不取决于数学家发现的数学事实,而在于我们想让数学成为什么。

皮亚杰写作了本书的第二部分,由于他主要研究个体的发展,所以对逻辑数理思维的历史发展涉及的比较少。他把儿童的可观察的行为作为逻辑和数学分析的基础,而

不是把成人的内省作为分析的基础，所以他特别强调外显行为在思维概念机制形成中的作用。经验主义者，如，洛克认为不存在对世界的直觉理解，他们认为，对世界的理解源于对经验的抽象。皮亚杰指出，经验主义者认为思维先于行动，他们常用内省分析来解释人类如何获得抽象概念。皮亚杰认为，概念抽象的过程是儿童在较大年龄出现的动作高度形式化的结果，这种形式会应用到复杂的学习过程之中。

皮亚杰发现智慧行为包含的首先是简单的群集以及表示关系的一些动作，在这些基本的智慧行为中，儿童对他们周围的事物进行区分、排序、比较，并且以此为基础，衍生出儿童以后的逻辑、数学行为、命题或者形式运算。皮亚杰用“运算”这个概念来指代儿童的动作或者是身体运动系统，运算本身蕴涵在思维活动的形式之中。在皮亚杰看来，数学运算或者逻辑运算是真实的动作，它们有可能是儿童在算盘上移动一个算子，也可能是成人按照微积分的原则所进行的一个操作。

皮亚杰区分了四种运算形式。第一，感知运动：在语言出现之前儿童就表现出了感知运动的智慧特征；第二，前运算思维，在这个思维阶段，出现了语言、符号游戏以及发明；第三，具体运算：这个阶段的行为包括群集、排序和对物体数数；第四，命题运算阶段或者形式运算阶段，即，语言和形式逻辑数学推理阶段。在皮亚杰看来，由于哲学家们忽略了上述四个阶段的前三阶段，所以哲学家们把第四个阶段看作是人类智慧的独立的、标准的领域。

皮亚杰致力于说明如何利用逻辑来研究儿童的行为与思维活动。因此，他引入了“群集”(grouping)的概念，依据这个概念可以说明儿童基本的逻辑和数学行为中产生的群集结果或者表示相关性的系统，例如，儿童对物体进行分类、找出物体之间的关系或者数数等行为。皮亚杰发现，儿童在群集中所遵守的规则与数学家所遵守的规则相似，成人思维中更为复杂的运算结构则可以用命题逻辑来描述。

皮亚杰认为，在儿童思维中，逻辑与数字的关系是这样的，例如，有三个基本的成分A、B、C，儿童会根据它们性质的相似性群集，例如颜色、大小、形状等。为了使这些群集关系转化为数字关系，儿童会从这些性质中进行抽象，这样，在同一时间中两种成分就会被看作是等价的(即，把一个成分看作是一个类的成员)，同时两个成分之间又是相异的(即，在顺序关系中它们是不同的)。通过这种方式，儿童获得了单位的概念，而单位既是种类的一个成分，同时又是系列的一个成员。皮亚杰发现，数列概念恰好是在关系和类的逻辑出现后的智慧水平上形成的。在儿童身上，逻辑和数字的出现既不是派生的，也不是独立的，而是相互补充的。皮亚杰在这里展现了一种有趣的现象，那就是相似性与相异性，即儿童在思维中建构数字的方式与逻辑学家按照逻辑定义数字的方式之间存在相似性和相异性。

皮亚杰明白，他对儿童逻辑与数字发展的解释极有可能遭到柏拉图主义哲学家们的反对，因为他提供的解释与认识论的研究内容关系甚微。所以他仔细考查了柏拉图主义者观点中包含的一些假设。他发现，柏拉图主义者的问题在于忽略或者隐藏了创

造性建构这样一个困难的问题，也就是说，逻辑数学事实仅仅是我们的发现，而不是我们的创造。但是这一发现又遭到了另一个难题，因为在现实生活中，人们认为数学的作用就是对独立于人之外的、无限的静止的世界做出的相应的反应而已。正如他指出的那样，诉诸逻辑学的标准并不能帮助我们解决世界的存在这样的问题，也不能解决逻辑学领域之外的本体论问题。

柏拉图主义的另一个问题在于，它无法让我们理解这样一种现象，即，发明者或者发现者是通过什么方式来认识和了解观念世界的。回答这个问题时经常用到的是纯直觉（或者是构想）而不是感知觉。因此，直觉数据的自明性与感觉经验的偶然性形成了鲜明的对比。但是皮亚杰坚持认为，既然这些直觉数据没有什么特殊之处，那么我们体验这些直觉数据的方式只是一个事实问题而不是一个标准问题。

当然也许有人会说，现在没有人会提出像柏拉图主义的这种极端观点。不过正如皮亚杰所指出的，弱化版的柏拉图主义经常出现在人们的视野中。这种观点认为，存在一种独立的基本的标准系统，当然没有人明确承认它的存在，但是却暗示，这个标准系统是由非经验因素保证其真实性的。皮亚杰也对卡尔纳普（Carnap）的语言逻辑句法中所蕴涵的唯名论进行了批判。在这种理论中，逻辑与语言结构是内在一致的，它独立于我们。皮亚杰反对这种观点，因为，首先，语言是人类的一种行为动作；其次，语言交流是社会交际的一种特殊形式；第三，我们日常思维中的逻辑植根于我们每个人的行为。

皮亚杰当然不愿意混淆发生论问题和效度问题。他认为，逻辑是演绎推理的一种形式化理论，其与效度问题紧密相关，只要在逻辑系统本身之内，我们就可以放心地忽略逻辑之外的问题。但是只要我们把眼界放宽一点，放到认识论的层面，这个问题就变得与我们有关系了。这其中就有一个实用的问题，它涉及人如何利用这个系统。皮亚杰没有把认识论局限在知识的逻辑分析这样一个范围之内，即，共时性研究，他认为应该关注历时性研究。基于这样的原因，他认为历史的、心理发生的研究具有认识论方面的重要意义。

因此，皮亚杰表达了一种重要的观点，即，用历时性方法研究知识绝不会妨碍共时性研究。的确，与这个研究领域的大多数研究者不同，他坚持认为，对知识的共时性研究和历时性研究在哲学上都是重要的，并且是相关的，它们应该被看作是相互补充的。另一方面，那些认为认识论仅仅是对知识进行逻辑分析的人否认历时性问题与我们的研究有关。不过，他们有时候会在二级研究的名义下处理这些问题，在这些研究中关于历史和发生方面的问题可以得到研究分析。

我们有趣地发现，皮亚杰认为我们日常思维中所用到的标准与检验形式系统的有效性所用到的逻辑标准之间存在一致性。他同样指出，数字或者空间的形式化与前科学思维所建构出来的数字和空间存在对应关系。但是这并不意味着前者可以约简为后者。当然这里的约简是指严格意义上的逻辑术语。皮亚杰认为，它们之间的关系是一种历史的、发生的关系，但是这并不是说他认为一方是另一方的逻辑解释。

因此,在贝丝和皮亚杰的各自论述中,他们都提出了亚里士多德证明科学论的内在困难。证明科学所提出的公设远远不是不证自明的事实,它们充其量不过是假说或者准则。所以,就演绎性公设而言,与以往任何时候相比,我们都没有把握认为,逻辑和数学整个都可以放到证明科学中进行讨论。至于自明性原则,我们似乎没有理由相信,现在看起来清楚和确定的东西必须永远是这样。进一步讲,我们只能认为,与这些公设相关联的自明性是相互不矛盾的,假设它们有一种必然性,而这种必然性独立于偶然性的环境——这种必然性本身则需要证明。毫无疑问,接受实在性公设会简化我们的问题,但却很难让我们相信,逻辑数学领域的存在既不能被证实又不能被证伪。

我要向英年早逝的贝丝教授致以最深切的哀悼。他对于数学认识论的正式和非正式维度的理解,让他在这个领域做出了杰出的贡献,在他去世之前他通读了我的翻译本,并且给出了许多有价值的建议。我还要感谢皮亚杰教授,在整个翻译过程中他给了我许多鼓励并且热情地阅读了这个序言。另外我还要谢谢吉恩·克罗特(Jean Knott)小姐,她帮我准备了翻译的草稿。

梅斯(W. Mays)

前 言

这本《发生认识论研究》(*Etudes d'Epistemologie génétique*)的第十四卷与其他部分有所不同,首先是因为它的大小,其次是因为它并不是从发生认识论国际研究中心直接产出的作品,而与它有着间接的关系。这一卷的两位作者曾经一度对逻辑问题,尤其是形式逻辑与普通思维之间关系的问题存在分歧,他们在中心成立之后共同研究形式逻辑和普通思维之间的关系问题,他们对这一问题的兴趣超越了他们观点上的分歧。贝丝多次参加了中心的座谈会,两位作家的友情也逐渐增加,他们的合作也在增多,最终合作完成了这一作品。贝丝写了本书的第一部分,然后给皮亚杰看,皮亚杰写了第二部分给贝丝看。最后,贝丝提出了本书总结论的建议,俩人都同意,并由皮亚杰负责完成结论部分,按照格里兹(J. B. Grize)的建议,两人对书稿都进行了修改。格里兹是本书的第一位读者,两位作者都对他表示感谢。

在某种意义上,由于本书是研究中心外围工作的一个结晶,但是与中心关系密切,所以这本书在《发生认识论研究》中应该有它适当的位置,我们也感谢法兰西大学出版社同意将本书列为其中的一卷。

贝丝和皮亚杰(E. W. Beth and J. Piaget)

第一部分

E. W. 贝丝

序　言

为了说明以下章节中我的思路，我想通过序言方式向读者交代一下本人的学术思想的发展历程。

1932 年我在乌德勒支(Utrecht)大学学习数学和物理学，并在那里毕业。之后我又继续在大学学习了三年，第一年在乌德勒支，然后是在莱顿(Leyden)，最后是在布鲁塞尔(Brussels)。1933 年我非常幸运地加入了先锋哲学团队，在这个团队里我接触到了逻辑学家和数学家 P. G. J. Vredenduin，向他学习数学科学哲学。1930 年或 1931 年，我已经开始转向普通哲学，主要研究认识论以及数学的基础问题。1935 年我完成了博士论文答辩，论文题目是《数学的理性与直觉》。论文答辩是在乌德勒支的艺术学院而不是科学学院，因为我在当时博士入学考试时，通过了乌德勒支艺术学院的理论心理学入学考试，后来就在那里学习并获得博士学位。之后，我逐渐从哲学传统，特别是康德主义的影响中走了出来，但是我还是一直对传统哲学的历史保持着兴趣。

1935 年到 1945 年期间，我在一些中等教育机构教数学。因此，我有更多的机会思考数学思维心理学的问题。期间我对曼诺利(G. Mannoury)的心理语言学非常感兴趣。我在心理语言学研究方面关于形式系统、时间和空间的概念等成果获得了 1936，1937 和 1938 等几年在阿姆斯特丹颁发的数学学会(Wiskundig Genootschap)奖。1939 年我发表了一篇关于数学教学改革方面的心理学报告，这篇报告让我有机会与塞尔兹(O. Selz)一起讨论一些问题。同时我还在努力对布劳威尔(L. E. J. Brouwer)和赫廷(A. Heyting)的直觉主义进行研究。

然而，有些理论对我的学术思想也产生了相反的影响，特别是康托尔主义(Cantorism)和逻辑主义(logicism)。从 1933 年开始，我非常幸运地参加了乌德勒支大学弗伦克尔(A. Fraenkel)教授所做的系列数学基础讲座。后来接触到了卡尔纳普(R.

Carnap)的作品，然后与费斯(R. Feys)，谢尔兹(H. Scholz)以及塔斯基(A. Tarski)等取得了学术联系，是他们引导我走向了逻辑学而不是心理学。

对我来说，这种学术立场的转变可以归结为名副其实的"智慧的转换"(Intellectual Conversion)。这种变化完全是出于科学规则方面的思考。也许有人认为，这种变化仅仅是对个人兴趣的一种回归，即，个人兴趣在外部影响力压制一段时间后的最终释放。这些说法都不重要，重要的是我提交的作品的基础，不是因为对心理学或者是有限的逻辑主义或者是形式主义的偏见，而是出于对形式逻辑和思维心理学公正对待的真诚愿望，出于对两个学科领域的深入研究。

在后续章节中，我对不同问题的研究观点无须进一步辩护，这是因为我一直秉持这样的信念，那就是通过自己的持续努力，理解遇到的每一种观点的合理性。我坚决反对这样的观点，那就是责成我们拒绝别人的观点，认为别人的观点没有价值。同时我也认为，在目前的情况下，逻辑和数学的基础中的那些传统概念是不充分的。所以，我认为我们必须接受当代的各种学术思想，对它们进行学术综合，这会让各种思想趋势得到最大限度的发展和利用。

虽然我有这样的信心，而且目前，我的科学研究主要集中在数学逻辑、科学哲学以及这些领域的历史研究中，这是因为从 1946 年开始，我曾经一度在阿姆斯特丹大学教授这些课。但是，我也一直与普通哲学发生着联系，其主要原因是我经常参加协会(Genootschap)会议，这个会议让我与普通哲学密不可分。目前我与皮亚杰教授联系密切，非常感谢他，他帮助我发现了一个为自己重新定位的宝贵机会，让我发现了思维心理学中广袤而迷人的领域。

我对目前研究领域的兴趣还与皮亚杰在日内瓦设立的国际发生认识论中心有关，我有幸参加了 1956 年、1959 年和 1960 年的会议。在这些会议上，与会代表们真诚开放地讨论各种主题的问题，涉及认识论、逻辑学、数学及心理学。与会代表主要是受邀的各领域专家以及皮亚杰的合作者，在这些会议上所有的参与者都受益匪浅。

在日内瓦会议上我还荣幸地遇到了格里兹(Jean Blaise Grize)，他非常好心地阅读了我的手稿。格里兹不仅对手稿的写作形式，而且对于主题问题都给出了睿智的建议，他的这些建议使我对我的文稿有许多重要的改进。我想对他表达最真挚的谢意。①

---

① 这部分的参考文献以作者姓名和出版年份的形式出现在书末的参考文献中。

第一章 传统三段论不能分析数学思维

1. 笛卡尔(Descartes)

我们也许认为这是既成的实事,即,数学思维(mathematical reasoning),例如,现代版的欧几里得的《几何原本》(*Elements*),不能用亚里士多德的三段论(syllogism)来予以表述。

我们可以用下列两种说法中的一种来解释这个事实,它们是:

(1) 三段论理论不能为数学推理提供完整的分析,但是,如果亚里士多德的三段论理论被一种扩大版的逻辑理论所取代,并且它们之间有相同的特点,那么,在这种情况下,这个新逻辑理论就可以对数学推理进行分析。

(2) 数学推理所需要的推理形式与三段论的推理形式在本质上是不同的,所以即使我们能够得到一种扩大版的逻辑分析理论,用这种新理论去分析数学推理也是不可能的。

目前的学术界认为,第一种说法是正确的,然而,哲学家和数学家长期以来一直认为,我们必须接受第二种说法。没有可能也没有必要来寻找这种说法的起源,仅仅知道它是笛卡尔提出来的就足够了,笛卡尔提出之后对其进行了进一步简略的讨论。

在笛卡尔看来,三段论和数学推理之间的区别在于,三段论是从一般性的前提出发来直接导出一个结论,这个结论也是一般性的,而在数学推理中则存在一个中间相(intermediate phase),中间相就是对个别对象进行沉思。笛卡尔在《对第二异议的回复》中这样说①:

"……我们的思想源于自然,一般性命题的形成并不包含一些特殊的知识。"

这个中间相导致了数学思维与三段论之间的不同,同时,也正是中间相产生了直觉。让我来引用一段《规则四》的文字②:

"在比较的过程中,我们的注意力从一个客体转移到另一个客体。通过比较的方

① Descartes,1842, p. 114.(*The philosophical Works of Descartes*. Elizabeth S Haldane 和 G. R. T. Ross 翻译为英文版。Cambridge, 1911, Vol. Ⅱ, p. 38.)

② Descartes,1842, p. 502.(Haldane and Ross, Vol. Ⅰ, p. 55.)

法，我们可以发现正在关注的客体与特定的事实之间，在哪一方面相似或者是相同。所以从推理的任何一个方面来看，仅仅通过比较，我们就获得了关于事实的知识。这儿有一个例子，所有的A是B，所有的B是C，因此所有的A是C。在这里我们通过比较目标和事实，也就是A和C与B分别进行对比。但是，因为正如我们经常所宣称的，三段论对于获得事实并没有什么帮助，所以我们为了读者的利益而彻底抛弃了三段论，认为无论任何知识，除了那些包含在独立的客体中的简单的、未加掩饰的直觉，都是对两个或者更多事物的相互比较而获得的。"

根据《第五沉思》①，直觉应该集中到具体的、非物质的对象上：

"例如，当我想象一个三角形，尽管在我的思想之外，在现实世界里面并没有这样一个图形，不过这个图形有一些特定的性质、形式，或者是本质，它们是永恒的，它们并不是我所创造的，它们并不依赖于我的心理，就像我们能够从推证出这个三角形的各种特性这件事所表现的那样（譬如说，它的三个角与两个直角相等，最长边与最大角相对等等的性质。这些东西，尽管以前我第一次想到一个三角形时我绝对没有想到过它们），那么，现在我认识得非常清楚、非常明白，不管我愿不愿意，它们都是三角形之内的东西，因而并不能说这是我凭空捏造的。"

2. 洛克-贝克莱问题

这个想法导致了严重的困难，而笛卡尔并没有对这个问题给予清晰的说明。如果推理必须是关于具体事物的推理（例如，一个三角形），那么我们肯定能够对于任何事物进行推理，这样的话就可以证明一般化是合理的，进一步来说这就终结了证明。根据笛卡尔的观点，直觉的客体是三角形的本质而不是任何一个三角形。现在，洛克通过引入一般性三角形（general triangle）这一概念来对这个概念进行了重构，一般三角形既不是钝角，也不是直角，也不是等边，也不是等腰，也不是不等边。②

请注意洛克的立场与笛卡尔的立场有相当大的不同。笛卡尔的概念显然是柏拉图主义的，而洛克却拒绝内在的先天观念，他只接受概念论的（conceptualist）本体论。但是对于目前的问题而言，这种观念之间的差异却没有什么重要意义。

3. 贝克莱（Berkeley）、休谟（Hume）和康德（Kant）的解答

在这里有必要引用贝克莱的观点，他用非常清晰的语言对问题进行了陈述，并说明

---

① Descartes，1842，p. 84.（Haldane and Ross，Vol. Ⅰ，p. 180.）

② Locke，1690，Book Ⅳ，Ch. 7，Section 9.

了洛克解答①的不充分性。

"但是,在这里必须澄清一点,在我们没有证明一个三角形的抽象观念适用于所有的具体三角形之前,我们到底是如何知道,某一个命题对于所有的特殊的三角形来说是正确的。因为,通过论证来证明某一属性也许适用于某一个特定的三角形,但是这并不能表明它适用于所有的三角形,因为这个三角形并不一定与其他三角形相同。例如,已经证明,一个等腰三角形的三个角与两个直角的和是相等的,但是我不能得出结论认为,这个结果适用于所有的三角形,因为其他三角形不一定是直角三角形,也不一定是等腰三角形。因此,为了确认这个命题在一般意义上是正确的,我们要么通过个别的论证,最终证明这个结论适合于每一个特殊的三角形,而这种做法是不可能的。另一种选择是,通过论证三角形的抽象观念,这样,所有特殊的三角形都被包含了进去,我们的结论也就成立了。为了解决这个问题,我虽然尝试了各种类型的三角形,如等腰三角形,但是我无法确认这种结果是否可以适用于其他的边更长、面积更大的三角形……我即使论证了所有的我能够想象到的特殊三角形,这种结果仍然没有理由使我相信,它适用于所有的三角形。"

这一种解释本身是完全可接受的,但是它只是对我们涉及或者所提问题的部分回答。事实上,我们现在面临的是两个相互联系却不同的问题,它们是:

(1) 我们为什么要在论证一般数学命题的过程中引入中间相,中间相与特定的对象(例如,一个三角形)相联系。

(2) 一个引入中间相的论证是如何产生一个一般性的结论的?

在继续讨论之前,我必须强调一下,笛卡尔对于数学推理结构的观察是绝对正确的,但是,初看起来他对这种奇怪的结构的解释却是令人难以接受的。例如,如果我们想要证明任何一个三角形的内角和等于两个直角的和,我们可以用这样一个特殊的三角形开始,我们会说:"令 ABC 是任何一个三角形,"也许我们认为,这样一种表达方式只是用具体的示意图来说明我们的推理过程。然而这种解释并非令人满意,即使这种表达方式在科学论文,甚至是当代抽象数学领域的论文中可以找到,我们认为这样一种表达方式并不仅仅是为了通过图例来说明问题。

显然,笛卡尔的观点为我们的第一个问题提供了可以接受的答案。数学思维中的中间相是用来激活直觉,它只能与特定的客体相联系。

在笛卡尔的《第五沉思》中,假如笛卡尔通过把一个与直觉沉思有关的特殊三角形与三角形的本质(洛克称之为一般三角形)等同起来,那么他这样做的目的显然是为了回答第二个问题。不过,这个过程与回答第一个问题的过程几乎完全不同。我们总是很难把特殊三角形与三角形的本质等同起来,但是,如果我们接受了三角形这一概念,那么在特殊三角形的范围之内,三角形的本质就必须体现在要么是不等边的三角形中,

---

① Berkeley, 1710, Introduction, Section XVI.

要么在直角的三角形中，如此等等。因此，很难理解如何通过对这个(而不是另一个)特殊三角形的直觉沉思就可以证明一个普遍性结论的正确性。另一方面，如果我们反对三角形本质的概念存在于一个特殊的三角形之中，那么第一个问题就仍然没有回答。

同样的，贝克莱为第二个问题提供了一个令人信服的回答，但是他没有回答第一个问题，因为，如果特殊三角形的个别属性在论证中没有起到任何作用，那么在推理中引入这些个别属性就毫无道理可言。

后来，休谟做了非常睿智的观察，他写道①：

“就目前的情况来看，这是一个非常特殊的问题，在头脑中产生一个具体的想法之后，我们会依此去进行推理，然后一般性的或者抽象的术语会激活我们的思维习惯，这些思维习惯倾向于让我们联想到其他的一些个体，如果碰巧我们又进行了推理，推理的结果与我们联想的个体又不相符。所以，如果我们提到三角形这个词，并且依据这个观念在头脑中创造了相应的一个等边三角形，如果我们据此进一步断言，三角形的三个角是彼此相等的，而其他的具体的三角形，比如，不等边的，等腰的，刚刚还被我们忽视，现在则马上涌入我们的头脑，让我们确信刚才得出的命题是虚妄的……”

显然，休谟的观察属于心理学而不是逻辑学，但即使是这样，它在高级思维水平上还是非常有效的，这种思维可以用一个我不喜欢的词来称呼，那就是辩证思维。

休谟所描述的这种现象几乎不可能出现在原始的、前批判思维水平。它极有可能发生在论辩中。我们可以想象有两个辩论者，其中有一个人宣称，三角形的三个角是相等的；另一个通过建构一个直角三角形反对他的说法。在现在的数学界，数学家之间的非正式讨论就沿用这样一个模式。

然而，具备一定数学背景和专业训练的数学家在一定程度上会期待他的论辩对手运用反例。休谟的观察是期待运用反例的一个典型案例，这样做可以让数学家避免做出草率的结论。

应该看到，这种期待运用反例的思维结构正在从论辩的水平转化为形式推理。例如，我们用这样的方式来引入一个演绎推理：“令 ABC 是任意一个三角形”或者是“令 ABC 是某一个三角形，”用这种表达方式的原因是，我们在把到底选择哪种三角形的机会留给我们假象的论辩对手。

就目前的情况来看，我们也许注意到，休谟的观察回答了第一个问题，而对第二个问题的回答则不甚明朗，我们将在第三章第 23 部分讨论这个问题。

我将通过讨论康德的思想来结束这部分历史导言。我将引用康德的《纯粹理性批判》②中的一些有特色的话。问题依然是如何确定任意三角形内角和的问题。

---

① Hume, 1739-1740, Vol. Ⅰ, Book Ⅰ, Part Ⅰ, Section 7.

② Kant, 1781, A. 716, A. 734, A. 735, A. 713 et seq. (*Immanuel Kant's Critique of Pure Reason*. Norman Kemp Smith 翻译。London, 1933, p. 579, p. 590, p. 591, pp. 577-578.)

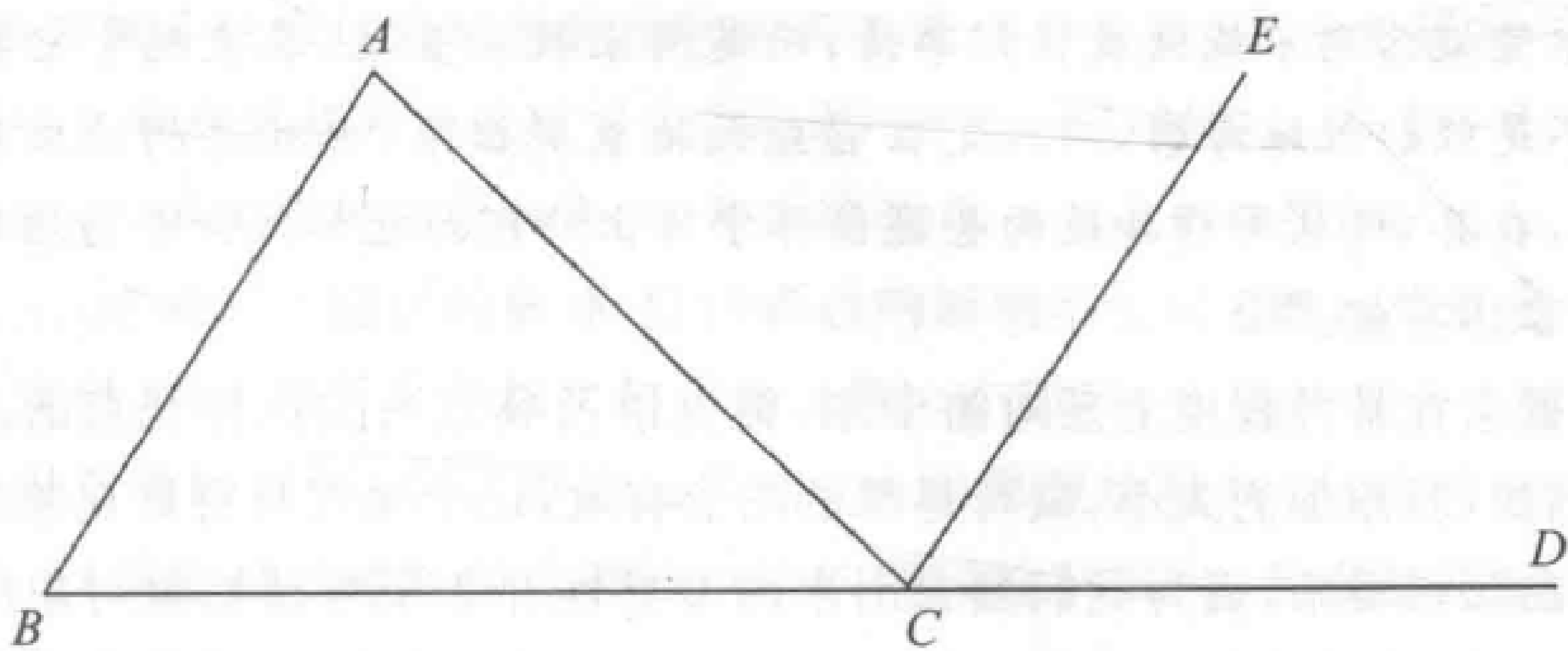


图 1

“然而让几何学家来处理这个问题，他马上就从构造一个三角形开始。因为他知道，两直角之和恰好与从直线上一点所能够引出的所有邻角之和有相等的结果，于是他就延长这三角形的一边而得到与两直角之和相等的两个邻角。现在他通过引一条与这个三角形的对边相平行的线，来分割这两个角中的外角，并且看到在这里产生了与一个内角相等的外邻角，以及与另一个内角相等的另一个外邻角，而这两个外邻角与它们的内邻角之和本来就等于两直角，所以三角形的三内角之和为两直角，此证。他就以这种方式通过一个推论链并始终由直观引导着而达到了对这个问题的完全清楚明白同时又普遍的解决。”①

“所以只有数学才包含有演证，因为它不是从概念中，而是从对概念的构造中，即从能够与这些概念相符合的被先天提供出来的直观中，引出自己的知识的。”②

“论证本身就这个术语而言它就表明它是在对客体的直觉中存在并进行的。”

“但构造一个概念就意味着：把与它相应的直观先验地展现出来。所以一个概念的构造要求一个非经验性的直观，因而后者作为直观是一个个别客体，但作为一个概念（即一个普遍的表象）的构造而仍然必须在表象中表达出对一切隶属于该概念之下的可能直观的普遍有效性。所以我构造一个三角形，是由于我把与这个概念相应的对象要么通过在纯粹直观中的单纯想象、要么按照这种想象也在纸上以经验性的直观描绘出来，但两次都是完全先天的描绘，并没有为此而从任何一个经验中借来范本。个别被画出的图形是经验性的，却仍然用于表达概念而无损于其普遍性，因为在这个经验性的直观中被注意的永远只是构造这个概念的行动，对该概念来说许多规定如大小、边和角都是完全无关紧要的，因而这些并不改变三角形概念的差异就都被抽象掉了。”③

① 本段文字参考了邓晓芒先生的译文，见康德著，邓晓芒译：《纯粹理性批判》，人民出版社，2004 年 2 月第一版，第 555 页。——译者注

② 本段文字参考了邓晓芒先生的译文，见康德著，邓晓芒译：《纯粹理性批判》，人民出版社，2004 年 2 月第一版，第 556 页。——译者注

③ 这里的译文采自邓晓芒先生的译本，见康德著，邓晓芒译：《纯粹理性批判》，人民出版社，2004 年 2 月第一版，第 555 页。——译者注

“数学单凭概念则不能做成任何事情，而是马上投向直观，在直观中它具体地考察概念，但却不是经验性地考察，而只是在它先天地表现出来、也就是构造出来这样一种直观中考察，在其中，从那种构造的普遍条件中得出的东西也必然会普遍地对这构造起来的概念的客体有效。”①

康德的概念在某种程度上是对笛卡尔、洛克以及贝克莱的三种观点的综合。决定性的因素，例如，三角形的大小，只对特殊的图形有效，这个属性只对贝克莱的特殊三角形有作用。在康德看来，因为我们抽象出来的差异性并非来自被抽象对象结构的普遍条件，所以一般性的结论与画在纸上的三角形没有关系。总之，这就是贝克莱的解答。

这些决定性因素并不是出于纯粹直觉的想象所建构出来的客体。正如康德所说②：

“那第一个演证出等边三角形的人（不管他是泰勒斯还是其他任何人），在他心中升起了一道光明；因为他发现，他不必死盯住他在这图形中所看见的东西，也不必死抠这个图形的单纯概念，仿佛必须从这里面学习三角形的属性似的，相反他必须凭借他自己根据概念先天的设想进去并（通过构造）加以体现的东西来产生出这些属性，并且为了先天可靠地知道什么，他必须不把任何东西、只把从他自己按照自己的概念放进事物里去的东西中所必然得出的结果加给事物。”③

在康德看来，在纯粹的直觉中通过想象建构出来的三角形与笛卡尔的三角形的本质以及洛克的一般三角形恰好相对应。这就导致了与后者同样的缺陷和问题。“康德的三角形”必然不包含来自于建构过程中的一般性条件的对个别三角形起决定作用的那些成分。如果这意味着这个三角形，例如，没有厚度，甚至是没有颜色的，那么这将极大地归功于想象，这样的结果在严格意义上是可以接受的。但是很明显，康德对我们想象的要求更高，他假设我们可以想象一种三角形，它既不是等边的也不是直角的，康德的三角形与我们基本的心理实事是不相容的。

4. 分析和综合的判断

康德的直觉主义不仅是对笛卡尔思想的延续，同时也为以后直觉主义的发展提供了一个开端。为了理解康德的直觉主义，在这儿有必要对分析和综合判断之间的区别加以说明。目前对这一区别说得比较清楚的是库蒂拉(Couturat)。他写道④：

---

① 这里的译文采自邓晓芒先生的译本，见康德著，邓晓芒译：《纯粹理性批判》，人民出版社，2004年2月第一版，第554页。——译者注

② Kant，1781，B. xi—xii.（Kemp Smith，p. 19.）

③ 这里的译文采自邓晓芒先生的译本，见康德著，邓晓芒译：《纯粹理性批判》，人民出版社，2004年2月第一版，第12页。——译者注

④ Couturat，1905，p. 246.

“为了尽可能多地保留康德思想的精神而不是他的字句，有必要说明一下，当一个判断来自于定义和逻辑规则的演绎时，这就是一个分析的判断。如果一个论证支持其他的一些数据，而不是逻辑规则和定义，那么这就是一个综合的判断。”

现在看来，这是一个错误的解释，这种观点的影响不仅对于理解康德的直觉主义认识论是一个障碍，对于理解其他相关的理论也是一个障碍。

为了获得正确的理解，有必要比较康德的《纯粹理性批判》与他的另一本较早的1764年的作品《关于自然神学和道德的原则的明确性研究》。我在这里要引用康德的两段话来加以说明。

《关于自然神学和道德的原则的明确性研究》①

可以通过两种途径来获得一般性的概念，要么是通过对概念的任意的结合，要么是通过对某一概念下定义，这种方法已经用分析的方法进行了说明。数学家只用第一种方法来下定义。显然定义来自于综合。但是对于哲学定义来说，情形则完全不同，物的概念已经确定，尽管它是模糊的、缺乏足够的确定性。需要对它加以分析。

我要求助于算术，求助于一般性的算术还有数字。在它们中我们首先用符号来代替物，我们创造了特殊的增加和减少的规则以及它们之间的关系，然后我们对这些符号按照一定的规则进行操纵，这一规则既简单又明确，所以那些被代替了的东西完全可以被忽略。

《纯粹理性批判》②

把哲学的定义仅仅作为对给予的概念的阐明来完成，而把数学的定义作为本源造成的概念之构造来完成，即前者只是通过分解（其完备性肯定不是无可置疑的）而分析地完成的，而后者则是综合地完成的，因而造成概念本身，前者反之则只是解释概念……③

甚至代数学借助于它的方程式，从中通过化简得出答案和证明来，这种处理方式虽然不是几何学式的构造方式，但也毕竟是很有特色的构造方式，在其中我们借符号而在直观中阐释概念，尤其是量的关系的概念，并且从来不是着眼于启发性的东西，而是通过把这些推论中的每一个都置于眼前来保证所有这些推论不犯错误。④

综合性判断在其基础和方法两个方面与分析判断相区别，以这一区别性为出发点而演绎出两种不同的判断。1764年的思想可以总结如下：综合性判断的基础由定义所组成，这些定义通过对特定的基本概念的任意组合而产生出新的概念（同样基于任意性

① Kant，1764，1. Betrachtung，Section 1-2.

② Kant，1781，A. 730，A. 734.（Kemp Smith，pp. 587-588，p. 590.）

③ 这里的译文采自邓晓芒先生的译本，见康德著，邓晓芒译：《纯粹理性批判》，人民出版社，2004年2月第一版，第564页。——译者注

④ 这里的译文采自邓晓芒先生的译本，见康德著，邓晓芒译：《纯粹理性批判》，人民出版社，2004年2月第一版，第566页。——译者注

公设，可以通过增加一个概念而不用过多地改变原来的理论）；基于这种定义（或者公设）的演绎是一个符号运算，它像一个几何运算。这种理论表达了一种激进的形式主义的思想，但是，只有康德的纯数学才能接受它。

5. 笛卡尔和康德的直觉主义

在批判阶段，综合性和分析性方法之间的区别受到了重视。但是后来一种方法用在了哲学中而另一种用在了纯数学和自然科学中。

现在，数学推理中不再包含纯粹的形式演绎，纯粹的任意的定义和公设也不能产生数学的推理，即使是在自然科学中这种推理方法也不能使用。根据康德的观点，在这些领域中只有包含一些数学，它们才具备了科学的特点。所以我们需要一个原则，以此来阻止任意定义（和公设）进入数学或者自然科学中。下边是康德所提出的这样一个原则：

“这种纯粹知识的使用的基础、即其使用的条件是：它可以应用于其上的对象是在直观中给予我们的。因为没有直观，我们的一切知识就缺乏客体，那么它就完全还是空洞的。”①

以下是更加清晰的表述：

“所以一切综合判断的至上原则就是：每个对象都服从在可能经验中直观杂多的综合统一的必要条件。”②

这一原则应用到纯数学特别是几何学中是非常有趣的。康德认为直觉的作用就是在几何公理中进行选择，这一说法广为流传。当几何公理被选定后，直觉的作用就变成了纯粹的启发式。通过完全的形式演绎从公理中导出定理，此时关于公理的直觉内容可以被忽略。

深入研究康德的直觉概念在数学中的作用，会得出一个令人惊奇的结论。更为细致的解释应该强调，表达方式“由直觉彻底引导”，“从概念的建构中引申出来”，“深入到客体的直觉中去”，“无论建构的一般性条件是什么，它们都必须对于客体的建构有普遍的效度”，“通过建构来产生概念所表达的必然的东西，而这概念让自己构成了一种先验”，这些表达方式与目前的解释直接矛盾。直觉的作用绝对不能局限于对公理的选择上，它仍然是直觉而不是形式逻辑，它引导着几何推理的整个过程。如果我们回归到康德提供给我们的理论中，那么这个理论的结果会马上变得很清晰。

---

① 这里的译文采自邓晓芒先生的译本，见康德著，邓晓芒译：《纯粹理性批判》，人民出版社，2004年2月第一版，第58页。——译者注

② 这里的译文采自邓晓芒先生的译本，见康德著，邓晓芒译：《纯粹理性批判》，人民出版社，2004年2月第一版，第151页。——译者注

如果我们使用当下的数学推理的概念，那么在康德看来，关于几何定理的论证必然要求助于欧几里得的第五公设，而这个公设则与其他著名的公理可谓相提并论。因此，如果这一个公理站不住脚，那么康德的论证也就站不住脚。

但是，这种观点与我们在这儿解释的康德的概念是不相一致的。在康德看来，建构一个三角形以及与三角形的某个边平行的一条直线不是一个纯粹的启发式步骤，而是构成了一个论证的一部分。这一个建构过程是必要的，因为"论证必须深入到客体的直觉中去"。现在，建构结果将不会取决于对某个特定公理的选择，相反，正如笛卡尔所说，"是由建构的一般性条件"以及"我是否愿意去建构"所决定。所以，即使我们反对所有的欧几里得的公理，我们也能够通过直觉本身的力量来获得欧几里得几何的所有定理。

根据目前的概念，从某些公理出发，通过形式演绎而产生了所有的几何定理，然后它们变成了绝对的错误观念。这种结论与笛卡尔的观点完全一致。下面我们引用《规则十》来证明这个观点。

"但是还需要多说几句。很显然，这种讨论对发现事实毫无价值。我们必须指出，辩证法不能发明任何三段论，并由此获得一个真正的结论。只有它首先能确保自己建构的结果是正确的，换言之，在三段论中得出的结论本身就是事实。显然，在任何时候通过这种方式永远也不能获得新的东西，因此，对于想获得事物事实的人而言，普通辩证法毫无价值。辩证法可能的价值就是有时候帮助我们向别人更加通俗地解释一下我们已经确认的事实。所以，应该从哲学中把辩证法请出来，让其委身于修辞学。"

因此，对于形式推理(formal reasoning)或者三段论推理(syllogistic reasoning)的态度，笛卡尔和康德是一致的。他们同意创立一种叫作直觉推理(intuitive reasoning)或者建构推理(constructive reasoning)的推理形式，康德已经对这种推理有过详细的描述，笛卡尔也对其做过总结性的陈述。但是需要注意的是，在笛卡尔的概念和康德的概念之间还存在差异。对于康德来说直觉推理仅仅可以应用于数学，而形式推理可以应用于整个哲学。但是对于笛卡尔来说形式推理是没有价值的。

为了把事情说得更清楚一点，有必要以一个建构推理的具体例子来说明笛卡尔和康德的想法。让我们以定理的论证为例：

任意三角形的中位线相交于某一个点。

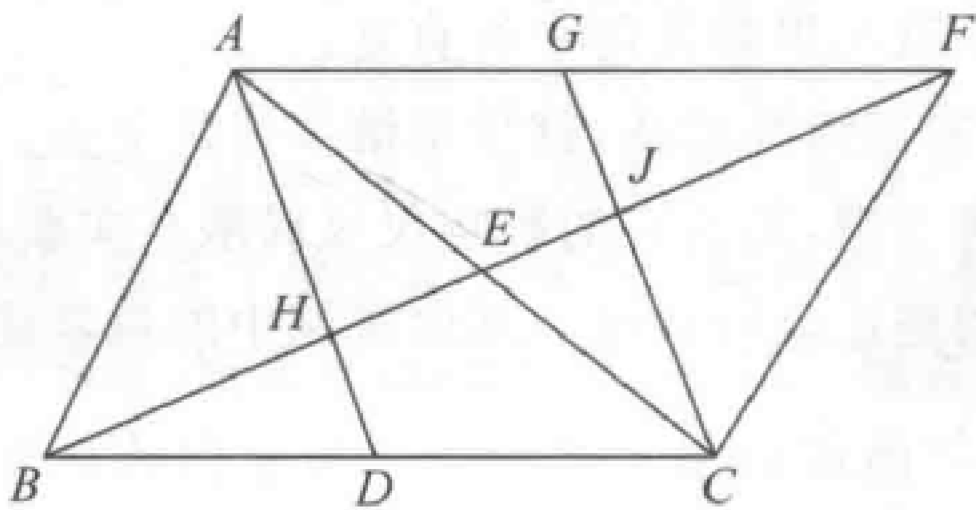


图 2

令 ABC 是任意三角形。为了找到第一个中线 BE，首先需要建构平行四边形 $ABCF$。AC 和 BF 的交点为 E；$BE=EF$，并且 $AF=BC$。

那么，如果 $BD=DC$ 并且 $AG=GF$，那么 $DC=AG$，因为 $DC/\!/AG$，$AGCD$ 也是一个平行四边形。因此，$GJ/\!/AH$，故根据泰勒斯定理，$FJ=JH$，同理，由于 $DH/\!/CJ$，$BH=HJ$。

$$BH=HJ=HE+EJ=HE+(EF-JF)=HE+(BE-BH)=2HE$$

结果是，如果 AD 是第二个中点，它与 BE 在 H 点相交，所以 $BH=2HE$。显然，通过延长 CH 我们就能够找到第三个中点。

6. 非欧几何（Non-Euclidean geometry）

毫无疑问，康德的概念与欧几里得几何在初级水平所研究的事实是相符的。在这个领域里，论证首先意味着建构，去寻找一个切线的过程，而不是创造一个冗长的形式推理链条。的确，通过空间直觉来进行论证不是一个正确的论证方法，但是，在空间直觉的引导下，我们可以获得一个恰当的切线，而这个步骤总是能让我们轻松地获得一个可行的论证。

1829 年非欧几何的发现（N. I. Lobačevsky）彻底改变了这种情况。欧几里得公理被各种不同的假设所取代并不是最重要的，最重要的是非欧几何的公理可以用来作为演绎推理的起点，进而产生出新的几何定理。

的确，人们很容易得出欧几里得的定理。考虑到欧几里得和非欧几何有许多共同的定理，在某些情况下，这确实没有什么不好。然而，在另外一些情况下，欧几里得几何所发现的一些定理与非欧几何的公理不相容，似乎这些非欧几何公理是荒谬和错误的。某种程度上这种现象与康德的概念是一致的。在康德看来，确定几何定理并不能源于对特定公理的选择，而是由“建构的一般条件”所决定的。但是，如果当数学家找到一些方法，这些方法可以帮助我们在论证过程中找到逻辑错误，这种方法可以取代错误的论证，而用正确的论证引导我们去获得非欧几何的正确的定理，那么这种解释就没有存在的价值了。

这类方法的存在似乎表明，可以有一些正确的数学论证方法，这些方法不需要直觉或者是至少不需要求助于欧几里得几何中的直觉。

但是，如果无视历史的连续性的话，就很难继续讨论下去。如果说非欧几何的发现从空间直觉中解放了几何推理，那么它的影响仅仅局限在实践层面，非欧几何的发现没有从整体上对数学推理的理论进行讨论。其他领域中的最新进展引发了这样一场讨论（参见第三章第 24 部分）。

7. 直觉主义的最新形式：兰格（F. A. Lange），布伦茨威格（L. Brunschvicg），戈布洛（E. Goblot），庞加莱（H. Poincaré），布劳威尔（L. E. J. Brouwre）

现在很有必要简略地讨论一下新近出现的直觉主义的一些新形式。有些形式出现在哲学家的作品中，而其他一些则出现在数学家的作品中。总体而言，我们认为，哲学家认为最基本的问题就是获得对数学推理新方法的解释，而对数学家来说，则关注于新理论需要改进的内容本身。

哲学的直觉主义起源于1860—1870年之间德国的康德复兴运动。例如，兰格（F. A. Lange）的思想，他是新康德运动的发起人之一。

在很长一段时间内，人们习惯于从传统的三段论出发，应用一些几何示意图来证明推论的推理（discursive deduction）。而兰格非常敏锐地发现，从康德的直觉主义观出发，这种论证并不是一种仅仅有点用处的启发式工具，它奠定了三段论与空间直觉的直接关系，这使得三段论推理得以复兴，并将推理方法改造成为数学科学的一种方法。

现在我们知道，数学与空间直觉的关系并不仅仅是因为传统三段论而确立的，也是为广大丰富的逻辑体系而确立的，这个体系为数学中的形式推理提供了充分的工具。其结果是，如果有必要，甚至是抽象的数学理论也会被融入笛卡尔和康德所提出的直觉数学之中。

如果我把数学的直觉主义概念归功于布伦茨威格（Brunschvicg），那倒不是因为他确立了一个有影响的数学推理理论，而是因为他有一种抨击数学和逻辑理论的倾向，直觉主义哲学家和数学家则拒绝这些数学和逻辑理论。我们很难期望这种喜欢争论的态度能够对解决目前的问题有所助益。

相反，戈布洛（Goblot）有一种数学推理的理论。在这里我引用一段他的总结：①

“经过十年的努力，解决方案突然出现在我的头脑中，那是1906年2月的一个早晨，这个想法是如此简单，我始终不明白它为什么花费了我十年的功夫：演绎，就是建构。只有假设性判断是可证实的，我们证明一件事情是另一件事情的结果。因此，我们用假设来建构结果。结论是必要的，尽管它产生新的内容，并不是因为它包含在假设中，而是因为它是通过固定的运算所获得的，也就是说它们不是随心所欲获得的。这些运算遵循哪些规则呢？是那些形式逻辑的规则吗？当然不是，它们是已经被接受的命题，要么是因为这些命题已经被论证，要么是因为它们被看作一个定义或者是一个假设。这些命题应用到建构性运算中恰恰是三段论在推理中的功能和作用。”

这是一个直觉主义的概念，它表现出康德哲学传统的强大影响力。但是，也可以清楚地看出这一概念对康德思想的发展。在康德那里建构的“一般条件”仍然是不清楚

① Goblot，1922，pp. 50-51.

的。这些条件是由直觉来支配的，以至于改变几何公理也没有什么作用。

对戈布洛而言，所谓的条件，就是可以自由选择的假设，这种对于康德直觉主义的革新有着非常重要的意义。

(1) 假设必须明确地陈述出来。

(2) 假设可以被其他假设所代替。

(3) 形式逻辑应该发挥适度的作用。

所以戈布洛成功地重新确立了实际发生的数学推理与这种推理的认识理论之间相互一致的原则。他没有赋予自己的理论任何一种形式去影响任何数学推理的具体分析过程。但是，我们会看到这些理论经过完善和修改之后，是完全可以进行这种数学分析的。

戈布洛对于数学结构的本质以及直觉的作用没有做清晰的表述，这不是一个特别大的瑕疵。当代直觉主义的一个显著的趋势是对直觉赋予中间物的含义。

在这里必须要提及庞加莱(Poincaré)，因为他批判了他那个时代的数学倾向，他还强调了数学中的某种直觉成分的重要性。依据他的观点，这种直觉成分首先体现在完成归纳推理的过程中对推理的应用，这种直觉成分并不允许回归到三段论中。在后边我们还要详细地讨论庞加莱的观点，因为他们与数学创新有关(第四章，第 26 部分)。①

稍后出现的布劳威尔(Brouwre)不仅对现代数学中的非建构主义倾向进行了类似的批评，他还试图通过纯粹的建构的方法以及在完全直觉的基础上建构数学。

这个努力是有结果的，但是布劳威尔及其学派所倡导的直觉主义数学的发展所遇到的困难必须在这里说明一下。

(1) 现代数学不能整体地通过建构的途径来重建。

(2) 对于形式逻辑的应用必须遵从某些限制。因此，这就意味着对于现代数学而言，形式逻辑的作用非常重要。

(3) 为了让我们在数学建构中获得尽可能多的自由，我们必须从极其原始的基础出发，这种基本的认识论结构的特点并不简单。

起初，布劳威尔反对空间直觉，但是他保留了时间直觉。后来，时间直觉被连续统(continuum)直觉取代。但是，最后他接受了赫廷(Heyting)在下文中表述的一个概念：②

"出于实用的目的，我们可以从直觉上清晰的水平来开始使用这一概念(自然数字)作为问题的开始，但是，也可以在更加基础的概念上来开始我们的讨论，例如，可以用下列方式……首先，我们发现讨论的基础是实体概念，也就是说是一个客体或者是一种感觉，我们认为它们是既存的，与世界的其余部分相分离。然后，第二步我们就可以区分

① 关于完全归纳法，见贝丝，1955。

② Heyting, 1955, p. 14.

这个实体与那个实体，最终我们能够在头脑中无限的重复第二步。但是这种分析本身是没有决定意义的。”

对于本书的特殊目的而言，讨论数学推理中的各种不同的直觉主义概念是重要的。人们把直觉主义定义为，尽可能地去调整推理，使之符合实际的思维过程，而不是去迎合从直觉的形式逻辑中所借用来的格式结构。它倾向于内省，但同时也重视从“技术”层面提供一些多少有些形式化的推理以及更为直觉性的解释。我们会希望，对直觉主义的研究应该为数学思维，甚至是一般性的推论理性的实际运行机制，提供一些重要的、有价值的信息。

尽管这种期望自然、合理，但是似乎很难实现。在我们的印象中，康德所关注的是数学家头脑中到底发生了什么。特别是，他引导我们去研究空间时间直觉的那些成分，而这些成分是纯粹的综合或者建构思维的基本材料。

对戈布洛的概念，特别是对于布劳威尔的那些概念而言，这样的解释是一种错觉。根据赫廷的观点，在严格的意义上来说，“实体”不是一种基本的事实，它被看作或者被假定是建构的一种要素。

这样的话，“建构”这一概念就不再像以前那样清晰。要使得“建构”概念清晰的方法只有一个，那就是利用特定数学背景中的一些约定俗成的习惯，禁止人们去分析实体的起源。对于认识论分析或者心理学分析而言，这种约定俗成的习惯则不具有约束力。但是，考虑到数学推理必须尊重约定俗成的习俗，所以这种分析显然必须要超越强加给数学思维的那些传统的限制。

也许还需要对第一种解释增加下列一些想法。在数学思维中，也就是在最终得出数学问题的理性解决方案的复杂的心理活动中，我们必须区分至少两三个连贯的阶段：

(1) 调查阶段。在这个阶段，对思维不加任何限制，所有方法都是有价值的，它们都有可能让我们离目标更近。这个阶段是主动的、原发性的、数学的、真正有发现的，甚至是创造性的思维。

(2) 组织阶段。这个阶段呈现通过正确形式讨论所得到的答案。这个阶段也许会用到一定的创造性，但是它并不是真正的发明。

(3) 证明阶段。这一阶段主要是对论证进行重新思考。第一，确认它是否正确，第二，确认它是否真正给为我们提供一个解决问题的答案。

现在的数学出版物一般只重视重现第三阶段。这个阶段对读者来说就足够了，它能让读者按顺序重新思考论证过程，能让读者判断解决方案的科学价值。人们对第二阶段则往往没有兴趣。组织阶段不成功，其原因是答案不正确、不完整或者混乱，所以我们必须要回到第一阶段。总体而言，第一阶段无规可循，它几乎不能用人类可以理解的方式重复。在特定的时刻，我们惊喜地发现，目标已经达成。但是，要追溯我们刚刚成功的路径却是一件非常困难的事。

基于这些考虑，即使从直觉主义的数学推理分析出发，对于数学推理的简单分析也

不可能为我们提供重构有创造力的数学思维的材料。然而，这并不意味着，这种分析方法与其他不同方法相结合也不能为我们提供有价值的信息。

在这一章得出结论之前，我想还有必要对卡瓦耶斯(J. Cavaillès)和劳特曼(A. Lautman)的思想做一介绍。

在我看来，一种过于排他的柏拉图主义的导向加之对于科学发展的低估，引发了对于希尔伯特(Hilbert)的形式主义、布劳威尔的直觉主义以及维也纳学派的逻辑主义的批评。而正是科学的发展为以上那些被批评的不同流派创造了发展的起点。

我认为卡瓦耶斯对于当代数学的发展持一种更加开放的态度，尽管他的哲学观点无法让他对不同观点做出准确的判断。但是，让人遗憾的是悲惨的命运使得这两位思想家未能完成他们的思想。

但是，我不想在这儿继续这些题外话，因为本章的目的是要说明传统三段论在数学推理的分析中所表现出的不足。我引用的那些作者尽管在研究方向上各有不同，但是得出的结论却非常一致。

第二章 对于数学推理的心理学解释

8. 密尔(J. Stuart Mill)

为了说明密尔的激进的经验主义,我首先来引用一段他讨论矛盾率原则的话,这段话是说明他的方法的好例子。①

“肯定判断和它的否定判断不是两个独立的判断,它们相互联系却互不相容。如果否定判断是真,那么肯定判断肯定是假的,这只是一个恒等的命题。因为,否定命题要说明的仅仅是肯定命题的假,除此之外它再没有表达其他的意义。矛盾原则应该去掉那些模糊的表达方式,因为这种表达方式造成了自然界充满基本对立的氛围。矛盾原理应该用比较简单的形式给出确切的说明,同一个命题在同一时间不能既是真又是假。对于唯名论,我不想多说,因为我不想把它仅仅当作一种口头命题。我认为它像其他公理一样,是我们从经验中概括出来的重要的、最熟悉的公理之一。我认为它的最基本的观点是,相信和不相信是两种心理状态,没有第三种状态。这一点是我们通过对自己心理的最简单的观察所发现的。”

令人奇怪的是,在这个表述里面缺乏逻辑思维。首先,这个观点似乎认为,相信和不相信是一种特定的心理状态,它们是相互独立的心理现象,所以很自然,我们可以把否定判断和肯定判断分别解释为它们表达的是相信和不信。但是这种解释意味着相信和不信是由事实所联系起来的两个独立的判断(所谓的事实是通过对内省数据进行概括所获得的一些材料),这些材料是相互排斥的。密尔反对这种解释。

因此,我们只能认为,在密尔看来,相信是一种心理状态,它是一种现象,不相信只是缺乏相信而已。但是这种解释产生了否定的概念,否定这个概念意味着我们不再需要借助于观察来解释相信与不信之间的相互排斥性。

我们也许会反对这样的观点,即证明这种不相容的内省思想恰好为心理学的不完整性提供了佐证。为了观察到排斥性,我们应该同时经验两个方面,而在密尔看来,这是不可能的。但在我看来,密尔的概念与事实是相矛盾的。也许我们恰好能够经验到两个方面,毫无疑问,在这种情况下我们经验到了一种内在的冲突。也许正是这种冲突

① Mill, 1843, Book Ⅱ, Ch. Ⅶ, Section 5.

的必然性，才是密尔想要表达的思想，他说相信和不相信是相互排斥的，但是相信和不相信的相互排斥性与肯定与否定的相互排斥性并不是相对应的。

在他的三段论概念中，尤其是在他的每一个推理都来自于从个别到个别这种思想，密尔都沿用了正如我们在第一章中所讨论的笛卡尔的立场。我们也许会认为，在某种程度上密尔的思想是通过逻辑推理分析来证明的，这些我们将在第23部分予以说明。但是密尔误解了概括化的作用，这种误解尤其表现在他试图把所有一般性原则，甚至是那些纯数学中的一般性原则简化为对经验事实的概括。

9. 杰文斯(W. Stanley Jevons)的批判

杰文斯告诉我们，他研究密尔的著作断断续续有二十年了，并且他在大学里教与密尔的著作有关的课程也有十四年。只是在最后的十年中他发现密尔著作中有根本性的错误，他把这些错误描述为“作品中严重不符逻辑的内容”。

因此，杰文斯决定对密尔的思想进行系统的审视。①

“但是，对我来说我将不再满足于默默无闻的生活，生活在密尔的作品强加于我们的糟糕的逻辑与糟糕的哲学的噩梦之中……对我而言，如果能证明密尔的哲学是复杂和错误的，那么就对真理做了必不可少的工作。我感觉到我必须从事这一项重要的工作。”

英年早逝的杰文斯无法完成自己的计划。在1877到1879年仍然可以见到出版的他对密尔哲学不同方面的四篇批判文章，这些文章在他的遗作《纯粹逻辑》中重印。而其他的一些想法，他只留下了一些未完成的手稿。

在他的《几何推理》②这篇文章中，杰文斯认为密尔持有下述观点。

(1) 并不存在真正的完美直线。

(2) 我们是在头脑中通过想象直线来进行实验。

(3) 这些想象的直线与真正的直线恰好完全一致。

(4) 如果这些想象的直线不是真正的完美的直线，它们将不能使我们来证明几何中的事实。

(5) 如果它们是完美的直线，那么真正的直线与它们是完全相似的，这些真正的直线必然是完美的直线，因此完全直的直线并不存在。

这个说法本身很奇怪，但它对我们却很重要，因为在杰文斯的《论相似性》那篇文章中，它为杰文斯提供了一个起点，认为密尔是一个违背了他的愿望的心理学家。对外部经验概括的结果能够证明几何公理，但是他发现，在外部世界缺乏恰当的客体来进行实

---

① Jevons, 1890, p. 201.

② Jevons, 1890, p. 205.

验，所以，他不得不借用想象的事物来进行心理实验。后来，密尔不得不把这些想象的物体与外部世界的真实物体进行同化，实际上：

(1) 为了证明把这些外部的客体应用到心理实验中的正确性，这个过程是必需的。

(2) 通过心理的自主活动，密尔的经验主义阻止了他接受想象客体的创造性。心理只能复制外部世界存在的客体。

最后，我们也许会认为，在密尔看来，几何公理只是对纯粹想象实验的一种概括，更一般地讲，他的心理主义是以想象的、非实验的心理学为基础的。

10. 马赫（E. Mach），齐亨（Th. Ziehen），斯特林（G. Störring）和海曼斯（G. Heymans）

读者也许会惊讶地发现，对于逻辑和心理学的关系的不同观点的讨论总是要回到几何学的基础和方法问题上。这种现象尽管初看起来非常奇怪，但是也不难解释。因为柏拉图和亚里士多德的几何推理几乎是所有逻辑推理中无可争议的典型的例子。

后来，笛卡尔和康德对于几何推理表现出了特别的兴趣，他们对几何推理中的逻辑特点予以否认，他们把几何逻辑解释为一系列与直觉建构有关的观察。因为对这种观点的讨论耗费了很长时间，所以关于几何逻辑原则的各种问题最终不可避免地被卷了进来。请注意密尔的观点与笛卡尔的观点很难区分开来，只不过密尔的心理经验替代了笛卡尔的直觉建构而已。

可以说马赫的想法是对康德和密尔的观点的一种综合。①

“密尔曾经强调，通过三段论我们不能够得到我们以前没有的概念，因为只要我们对特殊事件没有把握，我们就以一般形式确认大前提的正确性，这种做法是不合理的。康德在很久以前就已经清楚地认识到，像代数和几何这样的科学不能够通过纯粹的逻辑演绎而得以发展，它们需要其他的知识来源。(……)逻辑不能够产生新知识，那么知识来自哪里呢？它来自于观察，既可以是“外部”的感觉的观察，也可以是“内部”的与表征有关的观察。”

马赫与康德的观点也许有所不同，因为他认同逻辑推理的存在价值，他甚至给逻辑推理赋予了特殊而又非常适宜的任务。②

“不过，逻辑运算并不是一无是处。它可以帮助我们解释知识之间的相互联系；当一个定理包含在另外一个定理中时，逻辑运算还可以帮助我们去发现这个定理的特殊的基础。”

然而，马赫并不是对逻辑推理的实际结构毫无兴趣，这一点可以解释他为什么没有

---

① Mach, 1906, pp. 304-305.

② Mach, 1906, p. 307.

致力于用心理分析来替代逻辑推理。一般而言，我认为马赫在他的科学思维的分析中表现出了极强的心理敏感性，在第 11 部分我们将给出一个很好的例子。

我发现齐亨是又一个对思辨心理学感兴趣的人，恰如我刚才谈到的密尔。①

"在实际的思维活动中，经常出现的情形是，我们在推理中经常以一种含糊不清的、快速的方式来思考一个甚至是几个预定理，结果没有对这些预定理用完整地命题予以表述。(……)然而，实际的情况是心理逻辑事实通常被简化为某种格式(推理的)，不过，在正式表述中被忽视的那些预定理也会发挥一点作用。与许多心理观察一样，我们必须把意识表征也包括进去。意识表征是那些被描述为无意识或者是潜在的东西，也就是说是那些与精神的过程不匹配的脑皮层的活动。我们以同样的方式认识到联想过程的存在，在精神过程的意义来看，联想过程与判断并不是相伴而生的，但是联想过程与判断却同等重要，并且参与到形成结论的过程之中。"

观察这一概念产生了荒谬性。最近我们发现，欧几里得几何所采用的那些公理系统是不完备的，所以欧几里得所提供的大部分论证是不完全的。所以，在齐亨看来，我们必须接受在欧几里得几何中，联想过程与几何命题是同等重要的思想，应该把它们添加到欧几里得几何的公理中，这样就组成了一个完整的公理系统。

[尽管初看起来让人感到不安，我还是必须要打断对齐亨和他的同辈人的思想的讨论，他们试图解释上述那些有缺陷论证的产生以及被接受的现象。在我看来，正是人们的好奇心让他们接受了这些缺乏坚实基础的论断并为他们辩护，正是由于科学精神和方法引导人们从神话阶段跨越到了哲学阶段。我们现在不接受欧几里得及其同辈认为至关重要的决定性判断，那是因为在某些方面我们比以前变得更加严格。总之，我们可以说，现在在同辈集体批评的约束下，当代逻辑学家和数学家只提出和接受那些符合一般标准的论断。如果这些标准提高，他将不得不调整自己使之符合那些标准。]

显然，如果持续地使用齐亨的方法，我们将会对思维心理学的无用性开展实验研究。事实上，齐亨假设真实思维与形式逻辑的要求是一致的，并且齐亨也准备通过引入适当的无意识过程来消除各种分歧。显然，到了最后思维心理学只会沦为披着心理学术语的形式逻辑。

另一方面，斯特林(Storring)做了实际的实验。② 他对被试以这样的方式呈现了前提，然后被试自己得出结论。例如：

b 比 a 小

c 比 b 小

所以……

或者：

① Ziehen, 1920, pp. 393-394.

② Störring, 1916, pp. 194ff.

所有的 i 属于 o 类
所有的 z 属于 i 类
所以……

然后，他会问被试他们得出结论的方法是什么。

然而，很自然的是被试在两种情况下的反应几乎是相同的，我们应该注意到，依据当代的逻辑理论，这两种情况并不完全相同。在第一种情况下，如果我们再添加一个第三前提，c 比 a 小这一结论就得到了证明。例如：

对于所有的 x，y 和 z：如果 y 比 x 小，
并且 z 比 y 小，
那么 z 比 x 小。

在第二种情况下，添加第三个前提是多余的。两种情况的差异可以通过下面的事实解释，即个体与它所属的类之间的关系通常被看作是逻辑学的恰当概念，所以，在逻辑推理中，经常用到这种关系而无须提及。但是小于这种关系却是一个超出逻辑的概念，所以，这种关系在使用前必须在前提中予以明确表述。尽管在使用具有主观成分的划分标准之前，逻辑和超越逻辑的界限很难确定，但是两种概念之间的区别仍然对各自具有一定的约束力。

为了结束对心理学主义不同版本之间差异的分析，我想讨论一下荷兰哲学家和心理学家海曼斯①的思想。海曼斯提出了一种分析方法，这种方法与洛克②以来的英国传统的发生方法以及康德及其追随者的批判方法唱反调。

他通过观察发现，科学的发展并不仅仅取决于科学观察的数据，还与一般性的原则和公理有关系。我们相信科学结果是正确的，其原因在于我们认可这些原则或公理的自明性。为了证明我们的认同是正确的，有必要来解释和论证这种自明性。

基于以上认识，产生了以下认识论方案：其最重要的内容就是通过对科学思维的分析检视，来提升一般原则和公理的精确性，之后，我们就可以解释和论证这些原则或公理的自明性。

我们也许会问，是否可以通过实施这一方案来把那些所谓的心理学的方法真正应用到我们的研究工作中，例如，在实验室开展研究。海曼斯留给我们的印象是，他在头脑中对科学思维的结果进行分析，在这种情况下，我们常常考虑可以在这种分析中运用从心理学中借用来的一些概念。总之，这就是海曼斯在他的第一个研究阶段所从事的工作。

至于第二个阶段，目前尚不清楚是否需要一种不同的方法来开展独立的研究。海

① Heymans，1923.

② 尽管海曼斯所反对的发生方法与皮亚杰所提出的方法非常不同，但是必须强调的是海曼斯的思想也并没有预知发生认识论。

曼斯常常给人的印象是，一旦那些一般性原则或公理的精确内容被确定，那么对他们的自明性的测量也就确定了，在此之后的任何论证都是无用的。

11. 胡塞尔(E. Husserl)的假想的反心理主义(supposed anti-psychologism)

通过对十九世纪心理主义的一些不同形式的检视，我们并没有发现它们的共同倾向。其中有些思想倾向于以思辨心理学为基础，然后经过一些批判性的思考，就成了改头换面的逻辑学，而有些思想则与所谓正宗的形式逻辑水火不容。不过总体来看，这些心理主义的不同版本对于人们的思想从数学逻辑研究中转变过来产生了有害的影响。

根据当代一些学者的观点，他们的主要观点是正确的。通过引用法伯(M. Farber)的《现象学基础》的一些材料，我要对各种心理主义的观点进行总结。法伯对精确科学及各种心理主义哲学的研究成果极大地影响了胡塞尔(Husserl)的学术发展。在柏林，胡塞尔作为现代分析的奠基人之一——维尔斯特拉斯(Karl Weierstrass)的学生，从他那里接受了数学教育。胡塞尔通过他的论文《论数的概念：心理学的分析》("beiträge zur variationsrechnung")获得了博士学位，但不幸的是，他的论文并没有出版。后来他在导师布伦塔诺(F. Brentano)那里继续研究哲学和心理学。1887 年，他以论文"Über den Begriff der zahl"获得了教授资格，这篇论文也没有出版，但是它被收录在《算术哲学》(*Philosophie der Arithmetik*)(1891)中。对于逻辑学家施罗德(E. Schröder)(1891)的批评与福格特(A. Viogt)(1891－1894)论辩的文章以及另一篇文章《对于基本的逻辑心理学研究》("psychologische studien zur elementaren logik")(1894)都是同一时期的作品。1894 年弗雷格(Frege)出版了他的批判集《算术哲学》(*Philosophie der Arithmetik*)，这导致了胡塞尔反心理主义的发展，这种新的倾向体现在《绪论》(*prolegomena*)(1900)中，在这本书中也体现出了莱布尼茨和布伦塔诺对他的影响。

然而，法伯是正确的，他告诫我们要当心对于胡塞尔思想的连续性的低估。这种连续性还表现在其他一些方面，《逻辑分析》(*Logische Untersuchungen*)中的某些段落在他的心理主义阶段就已经写成，另一本重要的著作《*Bericht über deutsche Schriften zur Logik aus dem Jahre* 1894》胡塞尔在 1897 年才出版。法伯还提到了对马赫的论文《物理学中的比较原则》("Über das Prinzip der Vergleichung in der Physik")的讨论，胡塞尔把这篇报告称之为"辉煌的"，但是，他显然忽略了其中最重要的意义。假如在这里我发现了胡塞尔现象学哲学起源假设的重要证据，而我在其他地方除非捎带提及而没有正式表述的话，我要引用一段马赫的文字，因为对目前的讨论而言它非常必要。[①]

"我们对成对的同源概念的不同性有清楚的认识，我们对两个同源概念的逻辑联系的相似性也认识得非常清楚，这两个概念系统之间的关系现在被称之为类比。这个方

---

① Mach，1897，pp. 272-273.

法对于在统一的概念异构领域的事实的组织是非常有效的，它显然为发展一种一般的现象学来涵盖物理学的所有领域打开了一扇门。

只有我刚才描述的这个程序可以让我们对许多领域所描述的事实进行抽象，也就是说一般性的抽象概念是必不可少的。——在这样一个背景下，我要问一个看起来有点迂腐但是不可避免的问题，那就是什么是概念？它是一个模糊的表征，但仍然是直觉吗？不是！只有在最简单的情况下直觉才能作为一种次要的现象。例如，我们可以想象"自感应系数"这个概念，然后设法找出这个概念的直觉表征。也许，这个概念只是一个词吗？接受这些最著名的数学家最近提出的毫无希望的思想将会把我们带回到一千年以前的经院哲学的那种最糟糕的形式中去……"

这段引文必须放在当时的历史背景中才可以更好地理解对马赫思想和胡塞尔思想解释之间的关系。19世纪物理学理论的发展主要是现象学与机械论之间的斗争。机械论方法的支持者们试图通过构造机械模型来解释物理现象，所以他们把热现象解释为气体的运动，所运用的是原子原则，而把光学现象解释为波动理论，这样就产生了一种可以流动的以太这样一种概念。

现在机械论的原则经常表现出这样一些缺点：(1)它们与被解释对象的真正特点之间缺乏直接的联系，例如，热现象，据我们现在所知，热现象不是原子运动；(2)更具体地讲，它们非常随意，所以，以至于与以太流动性相关的各种矛盾假设都可以与我们观察到的事实相符；(3)同时，它们不是非常灵活，所有的关于以太流动性的假设与我们所知道的可以测量的物体的流动性是不相符的。

所以物理学家和化学家，诸如杜海姆(Duhem)、马赫、奥斯特瓦尔德(Ostwald)和福伊特(A. Voigt)建议用更加适宜的理论来更加严格地描述那些必要的假设，热力学就是这样一个现象学或者说描述理论的经典例子。

毫不奇怪胡塞尔对马赫的著作这样感兴趣并且心怀敬佩。

在《算术哲学》中①，胡塞尔曾经提到了马赫可能对他产生的影响，在同一本书中②，他也谈到了"对现象的描述"。所以，我们不能说，胡塞尔阅读了马赫的书就改变了自己的态度、倾向或者是研究方法。阅读马赫的书，至多让胡塞尔明白了马赫的方法和目的方面的特点。其实，他的反心理主义既不是对心理学的背叛，也不是反对心理学在不同领域产生的影响，这只是反对将某些方法运用到心理学中。这具体表现在他试图要建立一种描述的或者是现象的心理学，这个现象心理学与现象物理学或者是现象化学相类似，所谓现象物理学和现象化学是由杜海姆、马赫、奥斯特瓦尔德和福伊特等人所提出来的。后来出于对其他科学领域的领导权的需要，胡塞尔把这种已经被改造了的心理学又变成了一种真正的哲学。

---

① Husserl, 1891, p. 237.

② Husserl, 1891, p. 28.

就现象学的内容而言,胡塞尔的心理学是一种思辨的心理学,它与密尔和齐亨的心理学系统是不同的,因为他们所认可的原则是不同的。

12. 恩里克斯(F. Enriques)和曼诺利(G. Mannoury)

恩里克斯和曼诺利与早期的研究者非常不同,因为他们一生都是职业的数学家,尽管他俩的兴趣和研究活动时不时地表现出非常大的差异。

恩里克斯的思想对于海曼斯的思想有很大的影响。①

"让我们比较一下语法逻辑,或者更一般地讲,符号逻辑的传统概念,也就是心理逻辑的概念——这种概念在结构和符号方面不太关注作为规矩或者标准的书面形式,这些世俗的规矩或者标准并没有明文的规定——它们令人费解,但是可以用于心理思考——但是,心理逻辑却主宰着我们思维联结。

所以,在可理解的范围内,逻辑不再是一种演绎的理论,而是作为科学发展的一种辅助工具。逻辑是一门观察和比较的科学,它有自己的特殊的观察对象,以及评判思维基本过程的标准,这些都体现在思维的基本原则中。正是因为这些思维的基本过程,逻辑才试图被解释成一种心理实体……

根据我们的观点(严格形式),非常有必要改正这一观念,那就是逻辑标准对于事实来说,它拥有一种先天的价值。对这个观点的讨论,读者可以参考本章的第二部分。

在任何情况下我们都承认,逻辑学也许被看作是规则的集合,如果我们想要思维连贯的话,我们就应该去遵守。但是这种想法也可以这样来表述,在各种不同的思维过程中,我们可以区分出来一些能够主动满足思维连贯性的一些条件,这些思维模式我们就称作逻辑过程。

在这个意义上来说,逻辑学也可以被看作是心理学的一部分。"

总之,对于恩里克斯来说,他的目的就是在形式逻辑和思维的某些形式之间确立一种和谐的关系,因为只有通过形式逻辑才能确立这种和谐的条件。

对于曼诺利而言,他发展了一种完全概念化的心理结构,他倾向于揭示形式逻辑与人们日常语言的实际思维间的不一致。他所发现的对两种否定形式的解释就是他的研究方法的一个好例子。②

"……当我们在日常语言中使用否定词时,情感成分首先表现了出来。我们想通过解释"反面"和"否定"这两个否定词的区别来说明这个问题。

在一个"反面"中(不大,不允许,不脏等等)可以发现两个意义成分(在语言中由连接词连接),它们或多或少决定并且主要是说明特点(大或者是小,允许或者禁止,干净

① Enriques, 1909, p. 158.

② Mannoury, 1947, pp. 48-53.

或者脏);否定形式交流的动作的情感价值(意志)与肯定形式交流的相应动作的情感价值几乎很难区分开,因为在两种情况下分离的第二个词(小,禁止,干净)占据了人们注意的中心位置。另一方面,非正式的"否定"(这是不可能的,这不存在,这没有发生等等),在这种情况下既没有决定性的分离,我们的注意力也很难被相反的思想所吸引。它来自于容易辨别的动机成分,这种成分有阻碍或者是否定的特点:即,我们阻止自己去接受一个决定性的概念……我们认为,后面一种否定是"排他性的否定",而前面一种否定是"选择性的否定"……

我们必须强调,说话者并没有意识到这些形式上的差异,并且很少以一种一致的形式来使用。这种差异对于心理语言的分析是非常重要的,因为在现代文明语言中,排他性否定产生了整个的表达系列和表达模式,我们可以把它称之为一般性的语言,我们熟练地运用"一个或没有一个=全部"这种句式(排中原则)以及"一个和没有一个=一个也没有"(矛盾原则)与排他性否定联系起来。属于这个语言的其他的一些概念("无限","永远","从不","必须","实体","死亡","问题","我","空"等)把我们或多或少直接地带回到了这两个概念中。……

……数学中的重要部分都经不起这种检验。任何涉及无穷集(infinite sets)和空集(empty sets)的对象,换言之,所有不能够用排他性否定方法定义的对象,在自然界中都没有其对应物,其简单的原因在于通过其情感价值(禁止)使得排他性否定区别于选择性否定……紧接着,无穷集在数学中有其纯粹的形式含义,而在日常生活语言中则有一个纯粹的情感价值(意志的)。因此,"排中原则"在物理学中找不到应用的地方。不区分两个意义已经造成了相当大的混淆,所以我们经常疑惑的问题,如真正的无限的存在问题,就是这种混淆的结果。"

尽管在细节方面有许多反对的声音,但是我确信曼诺利的心理语言学方法(或者是符号学方法)对于解开形式逻辑和心理学之间的关系是一个有价值的方法。在一定程度上而言,柏格森(Bergson)和冯特(Wundt)早已预知曼诺利对否定的双重特点的分析,但是这两位对这个问题却没有更深入的研究。

第三章 逻辑学家的传统

13. 亚里士多德的观点:与希腊数学实践的一致性

我在其他地方已经出版了更加详细的对于亚里士多德科学理论的研究,这可以让我很清楚地界定在目前的背景下哪些内容对于我的表述是重要的。

根据亚里士多德的观点,论证或者推理科学方法论的特点在于三个假设,也就是(1)演绎性假设,(2)自明性假设,(3)现实性假设。

(1) 根据演绎性假设,论证科学 S 总是以一定数量的原则为基础。在这些原则中,我们可以区分出初始概念和初始事实(或者公理),每一个属于 S 的非初始观念必须通过初始概念来定义,并且每一个属于 S 的非初始事实必须从公理出发通过推理的逻辑过程来加以论证。

(2) 根据自明性假设,S 的基本概念必须具备一定程度的清晰性,它对我们来说无须定义而明白其含义。同样的,对于 S 的公理来说,它必须具备一定程度的清晰性,我们无须论证就可以接受它们的真实性。

(3) 根据现实性假设,S 的概念和现实性必须与某些领域内真实的对象相联系,它们构成科学 S 的特殊的主体。

我们发现,构成希腊数学的不同领域在相当大的程度上都满足了这些假设。当代数学理论也满足了演绎性假设。我们现在也很容易理解为什么亚里士多德认为无须证实这个假设,亚里士多德只是从当时的数学中引用了几个例子就说明了这个问题。

自明性假设的情况更为复杂一点。亚里士多德首先论证了这个问题,并且他的论证已经成为经典。后来,在帕斯卡(Pascal)(参见第 14 部分)的作品中也讨论了这个问题,其结论是,不可能定义每一个概念或者论证每一个事实。然后,他通过自己的直觉理论解释了我们直接了解初始概念和真相的事实。通过直觉,我们可以进行归纳,这种认识能力包含在直觉材料中的那些可以辨别的规则(毋宁说是借助于它们)中。

第三个假设遇到了相当大的困难。这是因为在我们的日常经验中,我们几乎没有机会碰到像数学家的公理所描述的那样的客体:没有维度的点,无限长的线段,完美的圆,等等。所以,亚里士多德很自然地问道,构成数学领域真实的实体的那些客体的标准究竟是什么。逻辑学也提出了关于客体的类似问题,这就是著名的普遍性问题。

柏拉图对这个问题的解释是,普遍性属于先验实体,而数学客体则处于普遍世界与知觉世界中间的位置。亚里士多德拒绝了他的老师柏拉图的这个解释,他依据自己的抽象理论给出了新的解释(后来这个抽象理论与直觉理论结合了起来)。根据亚里士多德的观点,如果我们把数学客体看作实体而与知觉信息区分开来,这只是一个类比。在实际生活中,数学家们研究可以知觉的客体,而不考虑这些知觉客体的一些属性,诸如温度、重量、颜色等等。这种理论所带来的困难将在以后讨论。

亚里士多德的方法论尽管有一些积极的特点,但是它也带来了一些问题,对这些问题的讨论导致了具有明显思辨性质的两种理论的发展,那就是直觉理论和抽象理论。其中的每一种理论都涉及本体论方面的问题和认识论方面的问题。

本体论的问题必须讨论,但是显然我们首先要讨论的是认识论方面的问题。在亚里士多德看来,证明科学(demonstrative science)涉及人心理的两个相当不同的功能,即直觉和推理,直觉让我们直接了解规则,而推理则让我们得出它们的结论。亚里士多德认为,抽象不需要特殊的心理能力。

的确,数学抽象(数学抽象以极为逼真的抽象方式为我们提供普遍性的知识)意味着一些运算(理想化),亚里士多德对这个问题并没有加以思考。所以,可以理解的是,在后来的研究中人们把归因于直觉作为归纳推理的数学运算,让我们的认识超越了知觉材料本身。

与这些传统概念相联系,笛卡尔与康德的直觉主义代表了一种倾向性,即把数学知识归结于一个来源——直觉。在笛卡尔看来,直觉包含了理论活动的所有领域,这使得他把推理归结为直觉,把直觉等同于推理。

但是,在康德看来直觉主义仅仅涉及了数学,所以,推理在数学中没有价值,但是在哲学领域它仍然保持其重要价值。作为数学的基础,纯直觉尽管比知觉重要,但是它的位置仍然要比理解[论辩功能(discursive faculty)]和推理(抽象原则的基础)的位置低。

14. 帕斯卡(Pascal)

在这里提到帕斯卡是非常适宜的,有三个理由。首先,是帕斯卡[而不是马洛里克(Maurolico)]发现了完全归纳推理原则。

第二,是他提出了一个正式标准,这个标准让我们把名称定义与定义的其他形式区分开来——这个标准规定,定义可以允许我们"在被定义的东西的位置上替换定义"。

第三,是帕斯卡针对亚里士多德阐述的演绎科学方法论的核心要点给出了一种特别清晰的说明。①

"我回归到了对真正秩序的解释上,正如我所说的,它存在于对每件事物的定义以

① Pascal, 1658.

及证明之中。

这确实是一个完美的方法，但它是绝对不可能的。因为，很显然一个人想要定义一个术语，他就要解释他在定义过程中用到的这些术语，同样的一个人想要证明一个定理，那么他就要证明能够证明这个定理的定理，所以很显然我们永远不能到达第一个定理。”

[在这里，帕斯卡再现了在13部分我们提到的亚里士多德的讨论。]

“那么，这并不是说我们应该放弃任何形式的秩序。因为，有这样一种东西，那就是几何学(亚里士多德也同样用几何学作为证明科学的例子)，就其事实性而言，几何学的位置比较低，其原因在于它缺乏说服力，而不是缺乏肯定性。几何学并不定义每件事情，也不证明每件事情，这就是它为什么地位比较低的原因。但是，几何学只研究在自然状态中清楚和恒定的对象(自明性假设)，这正是它为什么是绝对真实的原因(现实性假设)，自然支持几何学，无须任何论证。在所有人中间，这种秩序是最完美的，它包含的不是去定义每件事物，也不是去论证每件事物，证实每件事物，当然，它也并不定义不存在的事物，或者是论证不存在的事物。几何学把自身限定在一个中间过程中，即不定义人们都清楚的、已经理解的对象，而是定义这些之外的其他对象；不证明人们已知的东西，而是证明这些之外的其他东西(演绎假设)。”

15. 莱布尼茨：对公理的论证

在亚里士多德和帕斯卡那儿，我们已经发现了演绎推理科学的一些传统概念。这个科学有一个双重结构。它一方面由规则——初始概念和事实——组成，另一方面是从这些规则出发的可以被定义的概念以及可以被论证的事实。帕斯卡认为这种秩序是“人类的最完美的秩序”，但是，它也只能作为人类最后可资利用的手段。

可以认为，笛卡尔和康德的直觉主义是在努力为演绎科学提供一个单一的结构。事实上，只要可被定义的概念和可被论证的事实直接依赖于直觉，而不需要中间的推论过程，那么这些概念和事实的位置就等同于规则的位置。

同样地，莱布尼茨的逻辑主义也倾向于给演绎科学一个独立的单一的结构，但是为了达到这个目标，它却使用了非常不同的方法。

在莱布尼茨的《人类理解新论》①中，他讨论了泰勒斯(Thales)、阿波罗尼奥斯(Apollonius)、普罗克鲁斯(Proclus)和阿诺德(Arnauld)等人努力论证某些由欧几里得作为公理提出来的几何事实的情况。亚里士多德和帕斯卡的论证表明，这种努力绝不会完全排除每一个公理性假设。所以在一般意义上来讲，它只是一个获得更加简单的公理的问题。因此，这种努力的唯一结果就是对公理基础进行约简。

---

① Leibniz, 1715, Book Ⅳ, Ch. Ⅶ, Sects. 1ff.

但是，莱布尼茨指出，我们只有在接受同一性公理(identical axioms)的意义上才可以要求绝对的约简。

“而且，很久以前我在公开场合和私下里就已经说过，证明我们平常所用到的所有的二级公理是重要的，把它们还原成初始的或无法直接证明的公理，最近，我在其他地方将这些公理称为同一性。”

我们现在将这些称为逻辑同一性或者是恒真命题。

“推论的初始事实即我在一般意义上所讲的同一性，因为它的出现只是对同样事情的重复，它并没有告诉我们任何东西。”

然而，莱布尼茨强调这类科学事实的重要性。

“有些人也许很耐心地听了我上面所说的话，他们终于失去了耐心，他们认为我们在说一些毫无意义的话来娱乐自己，所有的同一性事实都是无用的。他做出这样的判断只是因为对这些问题缺乏长时间的、充分的思考。逻辑的结论需要同一性原则来进行论证，而且几何学家在他们的论证中也需要矛盾原则，而这样的论证会减少谬误……这清楚地表明，那些看起来最无用的、最纯粹的同一性命题，在抽象和概括的过程中是非常有用的，并且这让我们明白一个道理，那就是人不应该鄙视任何事实。”

最后，他用一个大家熟知的例子来说明，如何通过运用同一性公理来论证一个数学事实，而这个同一性公理本身并不蕴涵任何特殊的数学概念。①

“假设四意味着三加一的时候，二加二等于四并不是一个完全明显的事实，但是可以通过这种方式来加以论证：

定义：1) 2＝1＋1

2) 3＝2＋1

3) 4＝3＋1

公理：等式与等式相加仍然保持相等。

论证：2＋2＝2＋1＋1(根据定义1)

2＋1＋1＝3＋1(根据定义2)

3＋1＝4(根据定义3)

所以(根据公理)2＋2＝4

这样就论证了这个事实。”

注意，弗雷格(Frege)已经指出，莱布尼茨的论证并不是确凿的。② 事实上，我们可以这样论证：

2＋2＝2＋[1＋1](根据定义1)

[2＋1]＋1＝3＋1(根据定义2)

① Leibniz, 1715, Book Ⅳ, Ch. Ⅶ, Sect. 10.

② Cf. Frege, 1884, p. 7.

所以莱布尼茨假设：

$$2+[1+1]=[2+1]+1$$

根据他所陈述的原则，这个事实并没有得到证明。博尔扎诺(Bolzano)也做了同样的推理，他清楚地表述了自己的假设：$a+(b+c)=(a+b)+c$

16. 弗雷格：对胡塞尔和海曼斯(Heymans)的影响

我们刚才引用的莱布尼茨的思想形成了逻辑主义的程序，之后，在弗雷格和胡塞尔那里得以发展。莱布尼茨历尽千辛万苦想要实施这个程序，但事实证明，他的辛劳只有一些历史价值，例如，上文中提到的莱布尼茨的论证被后来的博尔扎诺和弗雷格明智地否决了。

另一方面，莱布尼茨精确预测了实施这些程序所需要的不同的步骤，它们是：

1. 一个理论的结构(我们称之为纯逻辑)包含所有的逻辑实体：在这个结论中，严格意义上的亚里士多德的方法论原则必须被严格遵守；

2. 通过纯逻辑的概念对特定的数学概念进行定义；

3. 从一系列逻辑实体以及从各种特殊的数学概念的定义出发，对特定的数学公理进行论证；

能够必然获得一种特殊的高标准的严格性与明晰性意味着莱布尼茨所预测的另外一种预备的步骤，也就是：

4. 用来表达纯粹逻辑的形式化语言的建构。

在这里既不可能也没有必要来重提源于弗雷格和他的学派的逻辑程序的实现情况。但是，我们必须承认，尽管莱布尼茨的思想缺乏直接的影响力，我们对他的思想的关注依然是值得的。我们还要讨论弗雷格对胡塞尔和海曼斯的影响。

如果我们在这里只讨论弗雷格和他的学派的逻辑主义，读者就会认为，这一方法来自于当代研究领域的一个特殊方面的偶然问题，所以，它只代表了数学思维发展中的一个短暂的阶段。

逻辑主义的整个程序已经被莱布尼茨所发现，仅仅这样一个事实就确凿地表明，逻辑主义本身至少体现了数学思维的某些重要方面。无论如何，逻辑主义的一些成分可以追溯到古来的思想。如果亚里士多德强调把代数和几何发展为独立的领域，如果他把自己的三段论作为第三个自治的领域，那么他这样做的原因是柏拉图，与柏拉图的做法相反，在他自己的理念数字理论中已经试图为辩证法和数学找到一个共同的基础。在亚里士多德对普遍数学的评论中，可以发现类似的思想的痕迹。

为了认识弗雷格对胡塞尔和海曼斯的影响，我们必须考虑海曼斯的心理主义的奇怪特征以及胡塞尔的反心理主义。在逻辑分析中，他声明在莱布尼茨、博尔扎诺和弗雷格的影响下，他已经摈弃了他的算术哲学中的心理主义，所以，接着他开始攻击海曼斯

的心理主义。现在,必须注意到算术哲学和逻辑分析的差异仅仅是用词方面的差异,"心理学"被"现象学"这一个术语所取代,但是在一般意义上来说,它表达的是同一种内省研究。

另一方面,海曼斯并不是一个真正意义上的"心理学家",因为他想把逻辑原则置于与心理运算有关的实验数据之上。海曼斯接受逻辑原则的可论证特点,这使得他在算术的基础上——而非依赖于弗雷格的逻辑主义——发展出一种构想。只有当海曼斯需要在心理学视角解释这些原则的自明性时,他才求助于心理主义的实验数据。

17. 罗素(Russell):对基础的批判

当罗素采用逻辑程序进行研究时,他还不了解弗雷格的著作。罗素对逻辑中的悖论的发现打断了逻辑主义的发展。罗素所发现的悖论表明,弗雷格的纯逻辑系统是互相矛盾的。

在这里我们不需要过多地讨论历史细节,我只是想描述一下当代逻辑学的状况。在弗雷格看来,一个人不可能在纯逻辑中区分两种不同的水平。

纯逻辑中的低水平(基础逻辑或者是定量理论)代表的是命题运算理论:—[非],∨[或者],&[和],→[如果……那么],以及数量词:(x)[所有 x],(Ex)[一些 x],……还有一个高级水平,它代表的是某种类(class)理论或者是集(set)理论。

弗雷格(Frege)的结构是建立在较高的水平上的,也就是内涵公理(axiom of comprehension),可以用以下形式进行表述:

1. 有某种属性的个体构成一类,在这一类中,它们是其中的成分,并且它们是由这些特有的属性以单一的方式来确定的;
2. 一个类是一个客体,所以,这个类又可以作为另一个类的成分;
3. 两个拥有相同成分的类是相同的。

可以采用最富于变化的科学领域的一些例子来轻松地证明这个公理的重要性。生物学中的所有的类就是运用这个公理的一个典型例子。同样,每一个几何位置是点这个类的成分。现在,如果把一条直线看作是它的所有点的类,这条直线也许还可以作为某个圆周上的所有切线的类的成分。

在对内涵公理的这些"标准"应用中,我们假定了一个特定的决定成分的领域:生物,空间中的点,自然数等。这样我们才引入了这些成分的类,这些类的类,等等。

但是,我们也可以建构一些类,我们无须假定这些类的基本成分的存在。例如,我们经常引进所有客体不属于任何一个类的类,这个不包含任何成分的类,记为 Ø。然后我们引入一个所有客体与 Ø 相同的类,这个类只包含成分 Ø,记为{Ø}。然后我们可以引入一个类,这个类的客体要么与 Ø 相同,要么与{Ø}相同,这个类记为{Ø,{Ø}},等等。

正是通过利用这样一种可能性，弗雷格能够把数学建构在基本逻辑和内涵公理之上。

现在，这个基础是矛盾的。事实上，我们可以引入所有类的类，这个类并不出现在它们自己的成分中，这个类被称作 R。我们的问题是，这个 R 是否出现在它自己的成分中。

(1) 让我们假定 R 出现在自己的成分中，那么 R 并不具备它的成分的特殊性质，所以 R 并不是 R 的一个成分。

(2) 但是，假如 R 不是 R 的一个成分，那么，它就不会出现在它自己的成分之中。因此，R 具备 R 成分的一些特殊性质，所以 R 必须是 R 的一个成分。我们又回到了假设(1)，但是假设(1)已经被否决。

这个悖论的结果是，无法接受弗雷格结构的最初形式。既然说了这么多，我们可以整体上拒绝逻辑程序，或者是在另一个不同的方向上对它加以发展。

罗素(Russell)不想放弃逻辑主义，所以他不得不寻找避开悖论的路径。在这儿回顾一下弗雷格的纯粹逻辑是非常有必要的。现在从各个方面来看，并不是基本逻辑而是内涵公理应该对罗素的悖论负责。对这个内涵公理的应用必须加以限制，这样就可以防止形成类别 R。同时内涵公理必须保持足够的强大，这样可以保证我们在重构弗雷格的结果时所需种类的存在。

在 1903 年及以后，由罗素本人和其他逻辑学家所提出的逻辑种类理论是这个问题的一个解决方案，所以我们看到，逻辑主义从它的基础的危机中走了出来。

18. 集理论学家：康托尔(Cantor)和策梅洛(Zermelo)

尽管康托尔的集理论的源起概念与弗雷格的逻辑主义相比具有很大的差别，但是它自身的发展也带来了相同的问题。早在 1895 年，康托尔发现了悖论，后来由 C. 布拉里-福蒂(C. Burali-Forti)重新独立发现，并于 1897 年出版。稍后，策梅洛发现了罗素悖论的一种变式。

逻辑主义和康托尔主义的这种并行发展绝不是一种纯粹的巧合。事实上，康托尔的"单纯的"理论产生了内涵公理(axioms of comprehension)，这个公理可以这样表述：

(1) 有某些共同属性的数学实体构成了一个集合，它们是这个集合的成分，并且它们是由这个特殊的性质以单一的方式决定的。

(2) 一个集是一个数学实体，所以，它可以作为一个集的成分出现。

(3) 两个包含相同成分的集是相同的。

而且，集理论中的推理也是按照基本逻辑的规则进行的。从本质上讲，悖论的发现给逻辑主义和康托尔主义带来了完全相似的问题。

首先，对于二者面临问题的相似性，罗素立即有所觉察，而集理论的学者并没有认

识到这一点，并且是罗素最早尝试把集理论的贡献纳入逻辑主义。所以，策梅洛的集理论(1908)的公理化与罗素的种类理论非常不同。但是，逐渐地，人们发现这两种理论拥有一些共同的基础。简而言之，两种理论面临的问题都是对内涵公理建构一种新的形式，这样可以避免悖论，但同时，这种新形式在建构过程中要允许对康托尔和弗雷格的核心思想进行重构。总之，这个公理应该具有下列形式：

(1) 拥有某些共同性质的客体组成一个类，这些客体是这个类里的成分，并且这些客体的特征由这种特殊性质以一种单一的方式所决定。

(2) 满足某些条件 C 的一个类可以被压缩到一个集里面，一个集就是一个客体，所以这个客体又可以作为成分出现在一个类中。

(3) 包含同样成分的两个类是相同的。

所以，我们必须承认除了压缩的类或集，真正的类(或者非集)只能是作为一种纯粹的多样性的存在。这就是说，悖论的发现迫使我们以一种改良了的柏拉图主义，甚至是一种概念论或者是一种唯名论来替换康托尔和弗雷格的激进柏拉图主义。

罗素的逻辑种类理论与策梅洛的公理化的特点都是对条件 C 的一定程度的选择。我们可以说它们分别是对逻辑学传统与康托尔传统的决裂。但是，作为一个渐进的同化的结果，我们再也无法明显地区分两种传统的差异，现在存在的是一种整体处于中间状态的结构。我们要提到一些逻辑主义的代表人物：奎因(W. V. Quine)的《数学逻辑》(修订版，1951)，贝克莱·罗瑟(J. Barkley. Rosser)的《数学家的逻辑》(1953)以及康托尔主义的一些代表：布尔巴基(N. Bourbaki)的《数学元素》(*Elements ed mathematiques*)(1939 年起)以及伯奈斯(P. Bernays)的《公理的集理论》(1959)。这些论著中的每一种都或多或少地代表了整个纯数学的一种结构，这种结构要么来自纯逻辑，要么来自集理论，这些结构都明显能够阻止悖论的出现。

从数学家“技术的”观点来看，以上这些结果是非常令人满意的，但是这些结果并没有对最初的问题给予最终的解决。弗雷格比康托尔更清楚，解决问题的最初目标是建构一种与亚里士多德的方法论概念相一致纯粹的数学。康托尔和弗雷格愿意将基本逻辑的原则以及内涵公理的最初版本作为这种数学的基础，因为它们具有高度的理性自明性。

由于理性自明性所表现出的虚幻性，所以对内涵公理必须加以限制。我们不能说，与其最初的版本相比较，内涵公理的新的不同版本表现出了一定程度的自明性。这个版本仍需要通过对不同的悖论进行深入的分析来进行不懈的修正，仍需要通过进一步的研究，使得我们确信它们的基础是牢靠的。

19. 其他的反应：布劳威尔(Brouwer)的直觉主义，曼诺利(Mannoury)和恩里克斯(Enriques)的心理主义，希尔伯特(Hilbert)的激进形式主义

在亚里士多德方法论的影响下，以及逻辑主义和康托尔主义的努力归于失败的情

况下，很自然地，人们又设法通过不同的路径去建构一种纯粹的数学，这种纯粹的数学与亚里士多德方法论的要求是一致的。

如前所述，直觉主义是由笛卡尔和康德的思想所引发的一种思想。直觉主义在今天有两种明显不同的形式：巴黎学派的准直觉主义(Semi-intuitionism)以及布劳威尔学派的激进直觉主义。

准直觉主义是由相当一大群数学家所认可的，他们中的每个人都对准直觉主义做出了贡献：贝利(R. Baire)，波莱尔(E. Borel)，阿达玛(J. Hadamard)，勒贝格(H. Lebesgue)，庞加莱(H. Poincaré)。但是，他们从来没有尝试着去建立一种以明确原则为基础的统一的纯数学结构，这个学派的代表人物也经常把他们限定在对逻辑主义、康托尔主义或者是形式主义倾向的某些论证的批判范围之内。

相反，布劳威尔的激进直觉主义则从更加深入研究分析经典数学的整体入手，这种分析导致了一种惊人的发现：在基础的水平上，经典数学已经在利用某些程序，而这些程序与建构主义态度所能接受的东西是不一致的。

事实上，我们在第一章的第三部分已经看到：康德认为，数学论证包含了一系列的推论，数学论证是一系列结构的组成部分，这些结构是先验的，它们在纯直觉中通过想象而产生。现在，在经典数学中经常发生的情况是：在论证过程中，通过引入一个无穷系列的数学运算而出现一个结构，同时这种论证包含了某一种特定的推论，这种推论又依赖于这种结构的结果，无穷系列的计算完成之前其结果是无法判断的。

在这种情况下，通常的做法是，以下列方式引入排中律。假设运算系列已经完成，所以我们能够判断它的结果。现在，这个结果要么是 R，要么是非 R。如果是 R，那么我们可以通过方法(A)来完成我们的论证；如果它是非 R，那么我们可以通过方法(B)来完成对它的论证。如果在两种情况下我们都获得了结论 T，那么这个结论将会被最终确定。

从严格的结构主义观点来看，这种推论方式是不可接受的。这种观点不容许使用结构的结果，除非这个结构是有效的。现在看来，完成这样一个包含无穷系列运算结构的操作是不可能的。

布劳威尔和他的学生已经发现，在经典数学中，非结构化的论证要比我们能够想象的还要多。在有些情况下，有可能对数学论证加以调整，使其符合激进直觉主义的要求；但是我们也经常发现，建构主义的论证是不可能的，所以采用严格的直觉主义的观点就意味着要放弃和牺牲大量的经典定理，尤其是在高等数学中。

显然，如果我们放弃了建构主义的观点，那么直觉主义对经典数学的批评将站不住脚。但是，这又产生了一个新的障碍，它阻止我们努力去达成与亚里士多德方法论戒律的一致。逻辑主义与康托尔主义不再鼓吹一种完全的激进的自明性。对建构主义观点的放弃将剥夺我们利用直觉自明性的机会，这样，就很难有某种形式的自明性来充当纯数学的基础。

在这种情况下，恩里克斯和曼诺利倡导的心理主义复兴正当其时。我们应该注意到，这两位的思想发展是相互独立的。对他们来说，复兴米尔(J. Stuart. Mill)，埃德曼(B. Erdmann)以及其他一些心理学家的工作是没有问题的，因为这些人的工作将纯粹的数学置于心理学的一些原则之上。相反，恩里克斯和曼诺利认为，任何将纯数学建立在绝对自明性上的努力都是徒劳，并且他们想要揭开这种努力的心理机制。这种意图在曼诺利那里表达得非常清楚。①

“但是，现在整个数学被打扮得看起来好像具有绝对的特点，并且完美的准确，它有一般性和自治性。简言之，它是事实，具有永恒性。用不客气的话说，所有这些都是纯粹的迷信!”

在这儿，没有必要去深究曼诺利和恩里克斯的思想。为了解释把绝对的自明性作为纯数学的基础，我们没有必要用到心理分析，假设这种解释是由我们已经讨论过的历史事实作为基础的话。对于绝对自明性的进一步的研究深受亚里士多德方法论的影响，这种影响不仅仅局限在对亚里士多德方法论的含蓄认同水平。毫无疑问，对亚里士多德方法论的优先考虑在一定程度上是出于一种情感诉求；但是，它内在的理性主义也在起作用，这种方法论内在的理性主义已经被亚里士多德以及他的追随者进行了辩护，最为重要的是，在引导演绎科学发展方面，它提供了最有价值的帮助。另一方面，假如当代科学不再符合亚里士多德方法论的戒律，把它称作“纯粹的迷信”也不合乎理性。

在任何地方，真正的智慧都包含在坚守让我们感到快乐的中庸原则中。如果在演绎理论的原则中，自明性不是一个优点，那么这决不表明自明性缺乏这一优点。另一方面，伯奈斯让我们注意到一个事实，那就是，缺乏自明性并不必然就是一个无可救药的缺点。在第四章第 40 节，我们将讨论获得自明性的可能性。

但是，只要我们认可不具有自明性的原则，将会产生更加严重的方法论层面的问题。只要是引入一个自明性的原则或者是有这样的想法，我们就会冒引入一个悖论的风险。引入一个缺乏自明性的原则，将增加这种风险。

因此，如果我们放弃对作为纯粹数学的终极基础的绝对自明性的寻找，也就意味着我们同时在寻找一种方法，它可以保证基于非自明性原则之上的推理理论的非矛盾性。

因为非欧几何和 n 维几何的建构，在发现逻辑悖论和集理论之前就出现了一些问题。让我们简要回顾一下那些在论证四维几何的不矛盾性时所用的方法。假设点、直线、平面和超平面以及距离这些概念已经被选为初始概念，我们忽略了对公理的陈述。

然后我们引入下列定义：

定义 1：一个点是任何实数 x, y, z, w 的四维坐标 $P=\langle x, y, z, w\rangle$。

定义 2：两个点的距离 $P=\langle x, y, z, w\rangle$ 和 $P'=\langle x', y', z', w'\rangle$ 是：

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2+(w-w')^2}$$

---

① Mannoury, 1947.

定义 3：一条直线是一组点的集，它包含两个点 P 和 P'，它们之间有正的距离，进一步讲，它们只包含点 $P''=\langle x'',y'',z'',w''\rangle$，其中对于任何一个实数 s：

$$x''=s\cdot x+(1-s)\cdot x'$$
$$y''=s\cdot y+(1-s)\cdot y'$$
$$z''=s\cdot z+(1-s)\cdot z'$$
$$w''=s\cdot w+(1-s)\cdot w'$$

定义 4：一个平面是一组点的集合，它包含三个点 P,P',P''，这三个点不在同一直线上，并且，只包含点 $P'''=\langle x''',y''',z''',w'''\rangle$，其中对于任何实数 s 和 t：

$$x'''=s\cdot x+t\cdot x'+(1-s-t)\cdot x''$$
$$y'''=s\cdot y+t\cdot y'+(1-s-t)\cdot y''$$
$$z'''=s\cdot z+t\cdot z'+(1-s-t)\cdot z''$$
$$w'''=s\cdot w+t\cdot w'+(1-s-t)\cdot w''$$

定义 5：一个超平面是一组点的集合，它包含四个点 P,P',P'',P'''，它们不属于同一个平面，并且只包含点 $P''''=\langle x'''',y'''',z'''',w''''\rangle$，其中对于任何实数 s,t 和 u：

$$x''''=s\cdot x+t\cdot x'+u\cdot x''+(1-s-t-u)\cdot x'''$$
$$y''''=s\cdot y+t\cdot y'+u\cdot y''+(1-s-t-u)\cdot y'''$$
$$z''''=s\cdot z+t\cdot z'+u\cdot z''+(1-s-t-u)\cdot z'''$$
$$w''''=s\cdot w+t\cdot w'+u\cdot w''+(1-s-t-u)\cdot w'''$$

然后，令 X 是任何一个断言，按照四维几何来表达。定义 1—5 容许我们在 X 中替换每一个初始概念，定义词(definien)与它们相对应；然后 X 将被转换为论断 X^*，它被称作对 X 的约简。X^* 的约简按照实数理论来表达；否定断言(非 X)的约简(非 X)* 将是对 X 的约简 X^* 的否定非(X^*)；对一个假设的断言(如果 X，那么 Y)的约简(如果 X，那么 Y)* 将仍然是一个假设的断言(如果 X^*，那么 Y^*)，这其中包含了(如果 X，那么 Y)中的成分 X 和 Y 的约简 X^* 和 Y^*，等等。

现在，必须做如下两个观察：

(A) 如果 X 是四维几何的一个公理，那么 X^* 将会是实数理论的一个定理。

由于我们忽略了对第一个问题的讨论中公理的陈述，所以显然对我们而言不可能证明这个观察。

(B) 让我们假设系列论断 $X_1,X_2,\cdots,X_K,Y$ 是一个结论性的论断，那么系列约简 $X_1^*,X_2^*,\cdots,X_K^*,Y^*$ 仍将会是一个结论性的论断。

事实上，假如 X_K 是(如果 X_2，那么 Y)，所以 Y 是通过演绎推理来自于 X_2 和 X_K；那么 X_K^*，或者(如果 X_2，那么 Y)*，将会是如果 X_2^*，那么 Y^*，因此 Y^* 同样是通过演绎推理来自于 X_2^* 和 X_K^*。所以，约简系列中的每一个相似的步骤都与第一系列的每一个推理步骤相对应。

从这两个观察出发：

(C) 如果 Y 是四维几何的一个定理，那么 Y^* 将是实数理论的一个定理。

如果 Y 是四维几何的一个定理，那么存在一系列的断言 $X_1, X_2, \cdots, X_K, Y$(1)包含一个结论性的论断，并且(2)从四维几何的公理出发，得出结论 Y。从这点出发，其后是一系列约简 $X_1^*, X_2^*, \cdots, X_K^*$，因为(B)，$Y^*$ 包含(1)一个结论性的论断，从实数理论的某些定理出发，(2)得出结论 Y^*。那么，Y^* 也是后一理论的一个定理。

(D) 如果四维几何包含两个相互矛盾的定理 Y 和(非 Y)，那么实数理论本身将包含两个矛盾的定理 Y^* 和非(Y^*)。

如果 Y 和(非 Y)是四维几何的定理，那么 Y^* 和(非 Y)* 是实数理论的定理；但是(非 Y)* 是与非(Y^*)相同的论断。

(E) 如果实数理论是非矛盾的，那么四维理论也是非矛盾的。

刚才我们用具体的例子来解释的方法就是大家所熟知的解释方法，这种方法是把理论 T 的定理 X 约简为理论 T° 的定理 X^*，所采用的做法是依据 T° 对 T 的初始概念进行定义。在这种解释中，如果对 T 的初始概念的“解释”是可能的，那么 T° 的非矛盾蕴涵着 T 的非矛盾。所以，只要 T° 的非矛盾已经被证明或仅仅被假定，那么结果是 T 是非矛盾的。

在我们的例子中(如许多类比中的情形一样)，T° 是实数理论。现在我们知道，这个理论可以约简为理论 $T^{\circ\circ}$，也就是自然数理论。通过逻辑学家和集理论学家的努力，这种 $T^{\circ\circ}$ 理论已经被约简为一个 $T^{\circ\circ\circ}$ 理论，它既是纯逻辑系统，与弗雷格的理论相似，也是一个集理论，与康托尔的理论相似。$T^{\circ\circ\circ}$ 理论为所有的数学理论提供了一个基础，它经常被称作大逻辑(grand logic)。所以，在一般意义上，如果大逻辑 $T^{\circ\circ\circ}$ 的非逻辑性可以保证或者是假定，那么一个特定数学理论的非矛盾性便可以被论证。然而，运用这个程序还有难以克服的障碍。

(1) 大逻辑的非矛盾性是无法假定的，因为即使是大逻辑的早期版本就表现出了矛盾性，而经过修正的较新的版本也无法得到强大的理性自明性的支持。

(2) 如果大逻辑不包含初始概念，那么无法通过解释法来论证一个大逻辑 $T^{\circ\circ\circ}$ 的非矛盾性。

(3) 如果在整体上这个理论假定纯逻辑或者集理论的所有功能都准确地包含在 $T^{\circ\circ\circ}$ 之中，那么运用这个方法的变式将 $T^{\circ\circ\circ}$ 约简为特殊的数学理论 T^* 也是不可能的。

(4) 我们要再次讨论，把理论 $T^{\circ\circ\circ}$ 替换为一个更加基础的理论 T^* 的可能性。但是这样一个理论目前还不存在。

希尔伯特提出了元数学的概念，他想逃出那个怪圈，这个怪圈威胁着任何想独立地回答理性自明性问题的努力。所以他像布劳威尔一样，但是用不同的含义推荐回到直觉自明性。

运用元数学的方法可以假定数学理论 T 已经被完全地形式化，数学理论 T 的非矛盾性已经被论证，运用这种方法还可以假定发生在形式化理论 T 中的术语结构的符号

的含义已经抽象出来了。那么，对于 T 的定理 X 的论证就可以约简为一系列的运算(关于运算的概念下文将详细讨论)。这个运算在后来会成为一个理论的课题，这个理论从陈述运算的规则出发，然后讨论这些规则可能的结果。在最终的结果中我们可能特别感兴趣其中一个结果，那就是论证矛盾的定理 X 和 Y 的可能性。从希尔伯特的元数学的形式的观点来看，运用计算的规则本身是否可以导出两个有某种特殊的"印刷"结构的公式 X 和 Y 还是一个悬而未决的问题。

对于刚才讨论的问题的系统化可以导出一个演绎理论 MT，这个 MT 要求有一套特殊的逻辑结构。

然而，这个逻辑功能必须尽可能简单，特别是它必须能够描述每一个约简的步骤，而这个步骤是无法通过直觉自明性来证明的。将演绎推理调整为直觉自明性的可能性归功于布劳威尔的直觉主义的部分成功。

在结束这部分之前，我想简要地讨论一下错误自明性现象。我们知道有许多错误直觉自明性导致的几何学错误，纯逻辑和集理论的第一个版本所造成的戏剧性的错误是一个让人印象深刻的有教育意义的错误理性自明性的案例。我们也许假定，对这种错误自明性表象之后心理机制的分析在引导我们寻找和使用一种新的自明性。在我看来这种分析毫无疑问会引导我们得出有趣的结果，但却几乎不能带给我们想要的结果。事实上：

(1) 这种分析带给我们的可能信息将是纯粹否定的，而我们需要的却是具有积极指导意义信息，例如这样的信息可以提示我们来替换内涵公理(axiom of comprehension)。

(2) 常识和大量经验告诉我们，在具体的特殊的事物之外，自明性几乎是不可信的。这个观察与理性自明性以及直觉自明性有关，例如，理性自明性鼓励我们引入所有偶数的类这一概念，自从罗素(Russell)悖论被发现以来，它还鼓励我们不要引入罗素的种类 R。概括起来看，无条件地相信它们是不明智的。

20. 哥德尔危机

让我引用经典数学中的两个典型例子：

(Ⅰ) $7+5=12$

(Ⅱ) 对任何自然数 n 进行因式分解，除了基本因子的相对顺序外，都有唯一的结果。

这两个结果都是从相同的算术公理出发，并且运用了相同的逻辑规则，通过严格的推理过程而得来的。但是我们习惯把第一种推理过程称作运算，而把第二个过程称作论证。

二者之间的唯一区别是，第一种情况只与个别的自然数有关，而第二种论证在大部

分情况下与任何可以用变量或者中介的形式来表征的数字有关，并且可以进行归纳。

对于可以与形式化理论 T 相对应的元数学 MT 的结果而言，可以做出一个类比性的区分。MT 可以产生两种不同形式的结果，下面是两种典型的例子：

（Ⅰ）公式 F 是 T 的一个定理。

（Ⅱ）T 的每一个定理 X 有特性 P。

其中"F"是 T 的一个严格定义的公式，"X"代表"任何"公式，"P"代表的是一系列公式——与 19 部分(B)之下描述的一系列断言相类似——的存在。

哥德尔曾经发现，算术和元数学之间的类比要比我们当初想象的还要紧密。为了说明这种类比关系，我们必须把 T 的每一个公式 X 与某一个特定的自然数 $g(X)$——哥德尔配数(Gödel number)——联系起来。我们假定，对于两个不同的公式 X 和 Y，我们总是有 $g(X)\neq g(Y)$。

T 的特定公式 X 的每一个元数学特性 P 将对应一个它们的哥德尔配数的特定算术特性 P^*，对于 T 的两个公式 X 和 Y 的每一个相关 R 也将对应一个它们的哥德尔配数之间的特定相关 R^*。简言之，我们可以从元数学 MT 约简为算术，这一点与我们在 19 部分讨论的将四维几何约简为实数理论一样。尤其是，每一个数学论证为了确立种类(Ⅰ)的结果，而被约简为只与特殊的公式相联系的哥德尔配数有关的数字运算。总之，由于希尔伯特只承认在元数学论证中有一种强烈的直觉自明性，所以它们的算术相关物也拥有一种非常基本的特点。

接着，我们对构成元数学理论 MT 的目标形式化理论 T 的选择进行限制。首先，我们假定，事实上 T 是非矛盾的。然后我们假定，T 至少包含了算术的基本部分，它包含了在直觉的元数学中被认可的一些论证的相关性。

例如，对于每一个自然数 n，T 允许有一个特定的记号 n°；同样，T 为任何数字运算提供一个基础。最后，如果一个元数学论断 K 的约简 K^* 在 T 中可以被论证，那么 K 为真。[在重新开始之前，让我们强调一下，一个元数学论断的约简过程有两个步骤。第一，哥德尔配数的引入使得某一个数学论断 K' 与 K 相对应，而 K 与 T 的公式相联系，与这些公式的元数学特性相联系，与它们之间的元数学关系相联系，等等，K' 将与这些公式的哥德尔配数相联系，与这些数字的算术特性相联系，与它们之间的算术关系相联系，等等。那么，如果 T 包含算术的一个恰当的部分，在 T 中将存在一个从 K' 转化而来的特定公式 K^*。]

我们首先来考察元数学论断(设为真)，它表达的是 T 的非矛盾性。对于这个论断，将对应 T 的一个特定公式 NC。

T 的术语系统必须接受公式 $K(x)$，它允许对不确定的自然数 x 进行限制的条件进行公式化。

我们现在想要考察自然数 n，它满足特定的条件 Q_T，如下：

n 是一个公式 $K(x)$ 的哥德尔配数，如下：

(1) $K(x)$是我们刚才描述的种类的一个公式。

(2) 如果 T 是非矛盾的,并且如果 $K(n^{\circ})$在 T 中是可以论证的,那么$\overline{K(n)}$在 T 中也是可以论证的。

首先,我们可以用纯粹的算术术语表达一个相同条件 Q'代替 Q_T。然后,我们可以建构一个 T 的公式 $Q(x)$,它是分句"自然数 x 满足条件 Q'"的表达方式。令 q 是公式 $Q(x)$的哥德尔配数,我们想要研究 T 的公式 $Q(q^{\circ})$。

首先我们发现,由于 $Q(x)$是我们刚才描述的类型的一个公式,q 必须满足分句(1)。

因此,我们必须研究那个分句:

(2^q)如果 T 是非矛盾的,并且如果 $Q(q^{\circ})$在 T 中是可论证的,那么$\overline{Q(q^{\circ})}$在 T 中也是可以论证的。

通过公式 NC 将分句"T 是非矛盾的"转化成 T。通过公式 A 和 B 可以把分句"$Q(q^{\circ})$在 T 中可以被论证"和"$\overline{Q(q^{\circ})}$在 T 中可以被论证"进行转化。如果 T 是非矛盾的,并且如果 $Q(q^{\circ})$在 T 中可以被论证,那么$\overline{Q(q^{\circ})}$在 T 中将不能被论证;这个事实可以通过公式来表达:

(a) $$NC\rightarrow(A\rightarrow\overline{B})$$

在任何情况下,在 T 中都可以被论证。请注意分句(2^q)可以通过公式转化:

(b) $$NC\rightarrow(A\rightarrow B)$$

它很明显蕴涵在公式 $Q(q^{\circ})$中。

(Ⅰ) 首先假设公式 NC 和 $Q(q^{\circ})$两个都可以在 T 中被论证。由于 $Q(q^{\circ})$在 T 中可以被论证,通过简单的计算可以证实 A,结果是:

(c) $$A$$

能够在 T 中被论证。但是,如果公式 NC,(a),(b)和(c)都能在 T 中被论证,那么 T 是矛盾的,它被我们排除在最初的假设之外。因此,如果 NC 在 T 中可以被论证,那么 $Q(q^{\circ})$在 T 中不可以被论证。

(Ⅱ) 令(nc)是"NC 在 T 中可以被论证"的转化结果。那么,在转化论证(Ⅰ)中,在 T 中我们将得到那个公式的论证:

(d) $$(nc)\rightarrow\overline{A}$$

(Ⅲ) 现在,假设 NC 在 T 中可以被论证,那么可以通过简单的计算来证实(nc),所以,在 T 中这个公式也可以被论证。

但是,如果(d)和(nc)已经被论证,那么通过大逻辑在这些公式中可以得到公式$\overline{A}$。另一方面,$\overline{A}$蕴涵了公式(b);所以,如果 NC 在 T 中可以被论证,那么(b)和 $Q(q^{\circ})$同样可以被论证。现在,从(1)出发,NC 或者 $Q(q^{\circ})$都是不可论证的。因此,NC 在 T 中是不可能被论证的。

(Ⅳ) 假设$\overline{Q(q^{\circ})}$在 T 中是可论证的,那么公式(b)的否定式在 T 中可以被论证,因

此，NC 在 T 中可以被论证，这一结果与(Ⅲ)得出的结果相矛盾。所以，公式$\overline{Q(q^{\circ})}$在 T 中不能被论证。

(V) 最后假定，$Q(q^{\circ})$在 T 中可以被论证，那么，可以通过简单的运算来证明公式 A，并且还可以在 T 中被论证。由于在(Ⅱ)之下的结论，所以公式$(\overline{nc})$在 T 中可以被论证。

现在，众所周知，在一个矛盾的理论里，每一件事情都可以被论证。相反，在 T 中任何公式的不可论证性意味着 T 的非矛盾性。特别是，在 MT 中我们可以论证："如果 NC 在 T 中是不可以论证的，那么 T 是非矛盾的。"通过把这个论证转化为 T，我们能够获得在 T 中的一个论证公式：

$$(\overline{nc})\rightarrow NC$$

因此，如果$(\overline{nc})$在 T 中可论证，那么 NC 也可以在 T 中被论证。这将与在(Ⅲ)之下所得的结论相矛盾，由此可知，$Q(q^{\circ})$在 T 中是不可论证的。

所以，我们已经论证了哥德尔的不完备性定理(1931)。

Ⅰ. 如果一个形式系统 T 是非矛盾的，并且它包含自己的元数学 MT 的算术相关，那么存在一个公式 $Q(q^{\circ})$，在这个公式中 T 既不允许论证也不允许拒绝。

Ⅱ. 对于元数学 MT 这样一个系统 T 而言，只要是它允许在 T 中的进行算术化，它就不容许对 T 的非矛盾性进行论证。

注释 1. 数字 Q 满足条件 Q_T，事实上，按照定义来说，q 是 T 的某个公式 $Q(x)$的哥德尔配数。

$ad(1^{q})$：这个分句是真的，因为公式 $Q(x)$是正在讨论的种类的公式。

$ad(2^{q})$：公式 $Q(q^{\circ})$在 T 中是不可论证的，那么分句(2^{q})显而易见是真的。如果它需要一个假设，那就是："$Q(q^{\circ})$在 T 中是可论证的"为假。

由于 q 满足 Q_T，q 还满足同样的条件 Q'。现在，由于 T 的公式 $Q(x)$是分句"自然数 X 满足条件 Q'"的转化形式，结果是公式 $Q(q^{\circ})$为真。

注释 2. 刚才给出的关于哥德尔的不完备性定义的论证是不完整的。首先，公式 $Q(q^{\circ})$的实际结构是缺乏的。为了使这个结构生效，首先要对恰当的形式系统 T 进行精确描述，这个描述可以为 T 中的每个公式 X 确定一个哥德尔配数 $g(X)$。然后，可以对 MT 进行算术化，从而实现对公式 $Q(q^{\circ})$的结构化。

而且，我们已经断言，在无须论证的情况下，在(Ⅰ)和(Ⅴ)中的某些论证也可以被"转化"成 T。

注释 3. 我们的条件 Q_T与出于同样目的被哥德尔及其他人所引入的类似的条件有所不同，这种特别的选择可以让论证更加清晰一点。

注释 4. 也许有人认为，哥德尔的结果是对演绎理论形式化的质疑，现在看来这种想法是没有根据的。总体来看，哥德尔定理考虑到了所有无论是形式化的还是非形式化的演绎理论 T，它们都满足某些非常一般的条件。如果形式化理论受到更大的影响，

那是因为对于它们的定理的论证更加严格。

注释 5. 从(V)的推理中可以发现，公式 $Q(q^{\circ})$ 在 T 中不能被论证，因此，命题“自然数 q 满足条件 Q_T”在 MT 中不能被论证。但是，我们在注释 1 中已经提到，q 必须满足条件 Q_T。

现在，不再存在悖论。注释 1 中的推理需要下列步骤：

$Q(q^{\circ})$在 T 中是不可论证的；

∴命题：“$Q(q^{\circ})$在 T 中是可论证的”为假。

这个步骤与希尔伯特形式主义的方法论原则相左。事实上，这个结论引入了命题“$Q(q^{\circ})$在 T 中是可以被论证”的某些特性，由于这个命题与其意义有关，所以它不具备纯粹的形式特点。因此，这个结论超出了元数学 MT 所许可的研究框架，即在 T 中进行算术化过程时不具备纯粹的形式特点。

在这里引入事实的概念以及记号(symbol)的意义是必要的。在其他情况下，由于对 MT 的排除，所以无法阻止这个系统去论证 T 的非矛盾性；另一方面，如果我们以这种方式扩大了 MT，允许它的非形式化的步骤，那么利用 T 本身来对 MT 算术化是不可能的。

哥德尔发现所产生的消极意义在于导致了基础的新危机。

逻辑主义和康托尔主义对于第一个不完备性定理感到特别棘手。对于他们而言，大逻辑 $T^{\circ\circ\circ}$可以保证数学的整体性和发展的统一性，所以必须支持 $T^{\circ\circ\circ}$。现在所有的系统 $T^{\circ\circ\circ}$都满足第一不完备性定理的适用条件规定，我们愿意接受它们的非矛盾性。其结果是，对于每一个系统 $T^{\circ\circ\circ}$，我们可以建构一个公式 $Q(q^{\circ})$，承认数学解释的真实性——$T^{\circ\circ\circ}$既不容许论证也不容许拒绝。

第二个不完备性定理涉及的是希尔伯特的激进形式主义。希尔伯特的数学程序需要通过非矛盾性论证来证明接受特定系统 F 是合理的。为了避免陷入被怀疑的怪圈，这种论证只能引入包含直觉自明性的论据，而这些论据不需要通过大逻辑来进行证明。现在我们已经发现，为了论证大逻辑 $T^{\circ\circ\circ}$的非矛盾性，我们必须使用一些超越了 $T^{\circ\circ\circ}$框架的原则。

为了重构平衡，我想简单提一下能够揭示哥德尔不完备性定理正面意义的结果。假设我们有两个形式系统 T'和 T''，并且 T''允许我们确立 T'的非矛盾性，那么我们可以得出结论，T''的资源要比 T'的资源大或者是 T''比 T'“更强大”。通过这种方法，凯梅尼(J. G. Kemeny，1949)发现，策梅洛(Zermelo)的集理论要比罗素的逻辑种类理论强大，贝克莱·罗瑟(Barkley Rosser，1954)认为奎因(Quine)的新基础系统要比策梅洛的集理论更加强大，所以哥德尔的发现可以让我们评估不同“大逻辑”的相对强度。

21. 自然演绎：根岑(Gentzen)，库里(Curry)，洛伦岑(Lorenzen)

以上结果已经超越了希尔伯特的元数学的最初框架。现在看来，这种框架显然太严格。为了论证基础算术的非矛盾特点，有必要超越一些限制。另一方面，如果我们运用一些资源——譬如，集理论——这个问题就会变得微不足道。

但是，我们可以尝试用尽可能"弱"的方法来论证基础算术的非矛盾性。在这个方面，根岑的工作是必须要提到的，特别是他形式化逻辑的新方法，或者叫作描述性演绎推理。

假设我们想要确立基础算术的公理 A 的某个系统的非矛盾性。我们知道，这个系统 A 允许我们在推理出其他的公式之外，能够推理出公式 $1=1$。那么，为了使 A 具有非矛盾性，其充分必要条件是 A 不允许推导出公式 $1\neq1$。所以，我们要从 A 出发来证明，推导出公式 $1\neq1$ 是不可能的。

如果一个公式，如，X，可以从公理 A 中推导出来，那么在一般意义上而言就存在大量的可能的演绎推理。所以，很明显，如果要证明某一个公式 X 具有非演绎性，那么我们事先必须限制演绎的可能性；很明显，公式 X 在引入限制之前它具有可演绎性，那么在被引入之后必然保持演绎性。在这样的基础上，海尔勃朗(Herbrand)为演绎推理引入了标准型(canonical form)的思想。沿用这一思路，根岑又提出了直接演绎(straightforward deduction)的思想。显然，理想的状态应该是允许可演绎的公式 X 只有一种推理。那么，假设有一个特定的公式，如，$1\neq1$ 是可论证的，我们可以把这个公式的推理称之为一个先验。

以下观点对于我们进一步讨论根岑的方法非常有用。

(1°) 假设问题是，从某些前提 K 出发推导出 $U\to V$，为了解决这个问题，很自然要把公式 U 添加到前提 K 上，从(K,U)出发，设法导出结论 V。

(2°) 为了推理出某个结论 L，假设我们可以使用一个前提 $U\to V$(除了某些其他的前提 K 之外)。为了利用前提 $U\to V$，很自然要尝试以下：

(1) 从前提 K 和 $U\to V$ 出发，推导出结论 U；

(2) 从前提 K，$U\to V$ 和 V 出发，推导出结论 L。

(3°) 在 2°的情况下，在(1)中，在设法推理 U 的时候，也许会偶然遇到最初的结论 L 的一个演绎推理，在这种情况下，我们已经解决了最初的问题。所以我们可以在以下意义上重新表述命题(1)，进一步尝试如下：

(1) 从前提 K 和 $U\to V$ 出发，推导出要么是结论 L，要么是结论 U。

(4°) 在我们刚才讨论的两种情况下，被确立为问题的最初推理简化为一或两个更简单的推理。事实上这些二级推理与最初推理是有区别的，体现在要么添加了新的前提[(1°)和(2°)在(2)中]，要么是因为提供一种备选，它提出了新的可用结论[(1°)和

(2°)在(1)中]。

(5°) 对被讨论的推理的约简能够导出一些二级推理,它们提供几个可选结论,这一事实说明为什么根岑一般只接纳那些需要直接引进的推理,这些推理的前提和结论的数量可以不同。

依照惯例,前提的使用具有同时性,在每一个二级推理层面,这些前提都在我们可控范围之内,相反,从最初推理的逐次简化中获得的二级推理的结论则是可选的,从各个结论中选择确立唯一的公式就足够了。

(6°) 最后,让我们强调一下,对所讨论推理的约简而产生的新公式,它们作为前提或者补充结论而出现,然而它们总是所呈现公式的二级公式(或者是部分公式),在最初推理中,它们要么作为前提,要么作为结论。就陈述逻辑(logic of statements)而言,从这一观点出发,系列逐次简化总有一个终止。

通过这些启发性的评论,我想给出一个根岑的演绎方法的简化版本,它可以运用到陈述逻辑、经典逻辑或二值逻辑的严格版本中,这个版本只引入否定—和蕴涵→。我把这个系统称为 F。

一个有着前提 $U_1, U_2, \cdots, U_m$ 以及结论 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 的被讨论的推理(或者推理问题)可以写成:

前提	结论
U_1	V_1
U_2	V_2
…	…
U_m	V_n

或者

前提	结论
K	L

这样一个图表可以称作序列(sequence)。整体而言,前提构成了前件(antecedent),结论构成了序列的后件(consequent)。前件和后件——整体或者是部分——通常分别被写作 $K, K', K'', \cdots$ 和 $L, L', L'', \cdots$。在前件或者是后件中,公式的相对位置并没有重要意义。

在进一步完善这个表示法之前,我们可以轻松地对序列的约简格(schemas of reduction)进行公式化说明①:

① 对于这些约简格以及语义表,我们保持了作者在已经出版的文章中的原始标记(小罗马数字:i,ij,iij,iv,…):参见 *Etudes epist. genet.*, Vol. 1, Etude Ⅳ, 第 131－134 页。——编者注

(i^a)

前提	结论
K	L
$\overline{U}$	
	U

(i^b)

前提	结论
K	L
	$\overline{U}$
U	

(ij^a)

前提		结论	
K		L	
$U \to V$			
(i)	(ij)	(i)	(ij)
	V	U	

(ij^b)

前提	结论
K	L
	$U \to V$
U	V

(iij)

前提	结论
K	L
U	U

在这些格中，从推理得出的序列被写为初始序列的增加物，后者被写在水平线上的前件和后件不能被重复。在水平线之下只有公式可以添加到前件或者后件上。我们将用简短的语言来解释不同的格。

ad(i^a)：如果在前件中有一个公式$\overline{U}$，那么公式 U 被添加到后件中。如果在某个二级约简中，我们得到了一个结论 U，那么包含前提$\overline{U}$的前件将会被约简为归谬论证，这将证明任何结论，尤其是在 L 中的每一个结论。

ad(i^b)：如果在后件中有一个公式$\overline{U}$，我们把公式 U 添加到前件中。在这里我们要提到排中原则：我们要么有一个 U，它会证明把公式 U 添加到前件中是正确的，要么有一个$\overline{U}$，它会证明结论$\overline{U}$是正确的，它是后件的一部分。

ad(ij^a)：这是刚刚提到的情况(2°)。

ad(ij^b)：这是上面已经讨论的情况(1°)。

ad(iij)：如果同一个公式 U 同时出现在前件和后件中，那么显然可以进行这一推理，这种情况下任何简化都是多余的，这种“终止”用双水平线来表示。

与根岑的思想相一致，约简的格一般允许把一个序列约简为更加简单的序列[参见(4°)]。显然，这些新的序列可以被进一步简化。从某个最初序列出发，通过逐次简化可以产生一系列的序列，这些序列可以通过一个推理表(deductive tableau)来表达(参考 p. 64)。

依据评论(6°)，在目前情况下，这样一个系列的逐次简化必须而且总是能得出一个结果。那么，如果每一个最终序列(final sequence)可以被运用到格(iij)，那么我们可以

发现最初推理是可能的。通过具体的例子来说明问题是非常有用的。

我们想要论证，从前提 $A, \overline{C} \to (A \to B)$ 和 $A \to (B \to C)$，推导出结论 C 是可能的。我们得到了 64 页的表。

在继续讨论之前，我要通过分析系列阶段来解释一下这个推理表的结构。首先，我们运用简化格(ij[a])，把前提(3)当作公式 $U \to V$。那么被讨论的推理被简化为两个二级推理，具体如下。

前提		结论	
(1) A (2) $\overline{C} \to (A \to B)$ (3) $A \to (B \to C)$		(4) C	
(i)	(ij) (6) $B \to C$	(i) (5) A	(ij)
(iij) (v) (9) C	(iv) (8) $A \to B$	(iij) (7) $\overline{C}$ (v)	(iv)
(vi)	(vij) (11) B	(vi) (10) A	(vij)
(viij)	(ix) (13) C	(viij) (12) B	(ix)

(i) 从前提(1)—(3)出发推理，得到的要么是相邻的结论(5)，要么是最初的结论(4)；通过运用终止格(iij)，这个问题马上可以解决。

(ij) 从前提(1)—(3)以及相邻的前提(6)出发，推理出结论(4)。只有通过几次逐次简化才可以解决这个问题。

ad(ij)现在如果把前提(2)作为格(ij[a])中的公式 $U \to V$，那么这个推理就会简化出两个二级推理，它们是：

(iij) 从前提(1)—(3)和(6)出发，推理出要么是相邻的结论(7)，要么是最初的结论(4)；

(iv) 从前提(1)—(3)和(6)以及相邻的前提(8)出发，推理出结论(4)。

ad(iij) 可以在两个结论(7)和(4)中进行选择，我们聚焦于结论 $\overline{C}$。以假设 C 为基础，我们需要一个间接的论证。这个间接的论证是一个推理(v)，它从属于推理(iij)；这个推理有一个不可预知的结果；我们没有确立一个预期的结论(7)，而是立即得到结论(4)。在我们解释简化(i[b])的格时，我们顺便运用到从推理(iij)到推理(v)中，我们发现

结论不符合我们的预期，这使得我们进一步认为是由于使用了排中原则而使得推理(v)被完成；我们要么得到 C，这将证明增加前提 C 是正确的，其结果是接受结论(4)，要么得到 $\overline{C}$，这将证明我们接受结论(7)是正确的，这也是我们最初想看到的。如果二级推理(v)能够完成，那么推理(iij)也将能够完成。

ad(iv)：我们再一次使用格(ij[a])，这一次是作为公式 $U \rightarrow V$ 的前提(8)，我们得到两个二级推理(vi)和(vij)。推理(vi)直接得到结论(10)。

ad(vij)：最后一次在格(ij[a])中运用前提(6)作为公式 $U \rightarrow V$ 导出两个二级推理(viij)和(ix)，分别得出两个结论(12)和(4)。

现在，推理(viij)和(ix)的成功就意味着推理(vij)的成功；推理(vi)和(vij)的成功就意味着推理(iv)的成功；推理(iij)和(iv)的成功意味着推理(ij)的成功。最终，推理(i)和(ij)的成功意味着最初推理的成功。

这种推理表并不是最初意义上的推理本身，但它却是对最初推理的可能性分析。在我们的例子中，当每一个与最终序列相对应的推理因为运用终止格(iij)而被终止时，事实上，这种分析表明，被建议使用的推理会受到任何推理方法的影响，只要这种方法允许以格(i)—(iij)所呈现方式进行简化以及终止推理。

现在有许多的推理方法可以满足这个条件。事实上我们现在不需要再去寻找其他的方法，只要我们接受任何与其最初序列相对应的封闭的推理表作为影响被建议的推理的一种形式，我们就可以获得一种非常适当的推理方式：形式系统 F。通过定义，依据格(i)—(iij)，系统 F 容许简化和终止。

[如果我们想要与已经确立的用法相一致，我们必须反演格(i)和(ij)，这样简化的格就变为推理的格。此刻，我们的序列是：

$$U_1, U_2, \cdots, U_m \vdash V_1, V_2, \cdots, V_n \quad \text{或者} \quad K \vdash L$$

从序列中再次发现，在前件和后件中，公式的相对顺序并不重要。如果是以系统 F 为基础，我们可以得到下面的推理格和公理格：

(i[a]) $\dfrac{K, \overline{U} \vdash L, U}{K, \overline{U} \vdash L}$　　(i[b]) $\dfrac{K, U \vdash L, \overline{U}}{K \vdash L, \overline{U}}$

(ij[a]) $\dfrac{K, U \rightarrow V \vdash L, U \text{ 和 } K, U \rightarrow V, V \vdash L}{K, U \rightarrow V \vdash L}$

(ij[b]) $\dfrac{K, U \vdash L, U \rightarrow V, V}{K \vdash L, U \rightarrow V}$　　(iij) $K, U \vdash L, U$

但是，在系统 F 中我们会发现根岑的 LK 系统所有版本的缺点：它容许非直接推理。由于在推理之初对格(iij)的不恰当选择，才产生了这些推理，在系统 F 的最初形式中并不允许这样的选择。

系统 F 最初形式的另一优点是，它容许在系统 F 与根岑系统 NK 之间确立非常紧密的关系。

下文我们将说明系统 F 是完整的。]

我们的系统 F 是对根岑系统 LK 和 NK 的一种综合，它有额外的一些优点。特别是，任何推理简化为典型形式（canonical form）或者直接推理（straightforward deduction），这样的问题不会发生；只有标准形式或者是海尔勃朗（Herbrand）或者根岑认为的直接推理，才容许出现在系统 F 中。

只要为被提议的推理提供一个最初序列，就可以用准统一的方式来描述推理表（tableau）的建构过程。其中的每一个公式，只能“处理”一个格。只有不同公式的“处理”的相对顺序是可以选择的。如果这种顺序已经定下来了，那么只有一条路可走。特别是，对于终止格（iij）运用的选择是由问题数据所决定的。

从哲学观点看，让人感兴趣的是（参见 23 部分），影响推理表建构的是基于语义考虑的因素，它以一种简单和完整的形式决定着推理表的建构，在目前的情况下，它是由符号“—”和“→”的意义所决定的。

也许，这种情况可以解释为什么有些作者，特别是库里①（Curry）［我们在卡尔纳普（Carnap）和洛伦岑（Lorenzen）的作品中也发现了类似的概念］认为，原则上而言，“概念的含义是由在讨论中引入这个概念的条件所决定的”。在我看来，由希尔伯特（Hilbertian）的形式主义所引发的这个概念是不正确的。由于特殊的历史原因，形式主义的观点已经被人们接受，其历史原因在于发现了逻辑悖论，人们希望通过非矛盾的方式来论证经典数学的正确性，人们也期望非矛盾的论证能够带给我们最基本的论证方式。现在看来这种期望并没有实现，其原因在于哥德尔的发现。在这种历史背景下，形式主义通常被当作是一种有用的方法，但是它很难作为一种完整的逻辑哲学和数学哲学被人们所接受。

另一方面，在现代逻辑中，否定式和蕴涵已经被人们赋予了一定的技术含义，特别是，斯多葛学派（Stoics）对这些概念已经给出了清晰的界定，并完全理解这些概念对逻辑基础的重要性。斯多葛学派对形式逻辑的建构与否定式、蕴涵及其他一些逻辑常量的技术价值是完全一致的。但是斯多葛学派所秉持的严格标准很难让我们确定——依据库里的程序——逻辑常量的意义，它们是在这些条件的基础上被引入讨论的。有时候，如果它们代表的是在纯粹公理形式上的形式逻辑的原理和规则，那么，它们就能够借助于逻辑常量——其本身总是预设的——的意义来证明这个公理化是正确的。

在现代逻辑的开始阶段，逻辑常量的技术意义是一个事实而非一个问题。弗雷格（Frege）最早通过解释逻辑常量的意义（也就是，它们的本义、字面意思以及它们的含义）来对逻辑进行了充分的形式化。抽象形式化的建构——也就是说，容许我们解读事件之后所使用的那些符号——只是逻辑的最近发展的事情。毫无疑问，这样一个结构是非常有趣的，但是从实际思维的观点来看，它又具有非常强的人为性。

① Curry, 1957, p. 25.

22. 句法与语义

现在,我们想通过演示的方法来考察两个数学命题,如下:

(1) 通过在前提中运用肯定前件式

$$7>2\rightarrow 7+1>2 \text{ 并且 } 7>2$$

结论是:

$$7+1>2$$

(2)公式$(x)(Ey)[x<y]$为真。

第一个命题具有纯粹的形式特点,为了证明这个命题,解释这个问题中的三个公式的"字面"形式就足够了。第二个命题并不具有纯粹的形式特点,为了证明它,我们必须认识到变量"x"和"y"与自然数领域有关,通过关系符号"<",它们的顺序关系是,对于任何一个自然数,总有另外一个自然数比它大。

在希尔伯特形式主义的影响下,许多数学家都倾向于否认这两种情况的差别。他们会说:如果讨论的公式为真,那是因为它是从自然数理论——对自然数概念的一个"内在的定义"——的公理中推导出来的。现在,为了确认公式是否允许这样一个推理,考察构成推理的成分的公式的"字面"形式就足够了,所以第二个命题与第一个命题一样有着纯粹的形式特点。

尽管如此,这个概念在当时非常流行,但是它现在却站不住脚了,这种结果源于哥德尔的工作与发现。对于一个推理理论 T,我们已经确认它至少包含一部分的形式算术,我们总是可以建构一个公式 $Q(q^{\circ})$——表达了某一个自然数 q 拥有某一算术特性 Q_T——这在 T 中是无法论证的,但是在 q 绝对拥有特性 Q_T 这个意义上来说它却是真的。所以为了确定 $Q(q^{\circ})$为真,有时候就变成了不仅仅是确定在 T 中 $Q(q^{\circ})$是否可论证的问题。

我们可以这样来回答这个问题,这种令人惊奇的情况可以用下列事实来进行解释,正在被讨论的推理系统 T 本身就表明了它的不完整性。那么在各种情况下,算术形式 U 的事实可以简化为在某个更加充分的推理系统 T°中的可论证性。现在,我们无法获得这个答案,因为哥德尔的结果影响到每个拥有一定合理特性的推理系统 T°,所以要确立一个推理系统 T°——拥有合理特性并包含算术的所有真的公式——是不可能的。

塔斯基于 1929 年独立于哥德尔而确立了对事实概念——尤其指它运用于算术命题中,运用于某一恰当的推理系统 T°中的论证可能性的概念之中——进行简化的不可能性。显然,在塔斯基和哥德尔的两组结果中存在着紧密的关系,但是,目前我们不讨论它们。

纵观这些结果,在元数学的这两个领域之间存在着明显的不同,它们通常被称作句法和语义。

1934 年，卡尔纳普对句法进行了系统化，它保留了希尔伯特的元数学的严格的形式特点。但是，他放弃了希尔伯特的有限论所带来的严格限制。从 1929 年起，塔斯基发展了语义论，他放弃了形式主义和有限论。

所以，句法是对希尔伯特元数学的第一次拓展。例如，它允许引入公式的任意集和系列（有限的或者无限的），进一步通过哥德尔配数能够引入自然数的集或系列。现在，对于集和系列的研究已经超越了基本算术的领域，它已经属于整个解析领域。

语义也允许引入公式的任意集和系列，但是它进一步引入了概念装置，它允许对某些符号的意义以及某些公式的真伪进行研究。这个步骤导致了激烈的反对，因为它与目前已经广为流传的一些概念不相容，特别是：

（1）意义、真、伪的概念包含心理成分，它是分析的障碍，阻碍了数学精确性标准的实现。

（2）上述概念被运用到数学符号和命题中会引发算术对象的现实主义概念。

例如，分析数字 3 的意义，根据构想（1）我们应该首先指向使用或理解这个数字的环境的心理调查，并且依据构想（2）为这个数字赋予特定的含义，我们必须假设某一个柏拉图式的实体的存在，而数字 3 是这个实体的名字。

在塔斯基看来，建构一个准确的、推理语义系统所面临的困难的来源在别处。令 T 是一个形式化的理论（第 20 部分已经进行了描述），再令 MT 是扩大意义上的元数学，它与 T 相对应，所以 MT 必然包含希尔伯特元数学及它之外的句法和语义系统 T。通过运用哥德尔配数，MT 的某一个部分 MT° 可以在 T 中被算术化。特别是，我们假设 MT° 可以容许我们对下列条件进行公式表达："自然数 x 是 T 的真公式的哥德尔配数。"那么 T 包含某一个特定的公式 $V(x)$，它是这一短语的转化形式。

我们还可以像第 20 部分那样建构某一个公式 $Q(q^{\circ})$，让它拥有第一个不完备性定理所描述的那些特性。令 p 是这个公式的哥德尔配数，我们要研究的是公式 $V(p^{\circ})$ 和 $V(p^{\circ})\rightarrow Q(q^{\circ})$。

（Ⅰ）在 20 部分，注释 1，我们已经发现公式 $Q(q^{\circ})$ 为真。那么（1）公式 $V(p^{\circ})$ 和（2）公式 $V(p^{\circ})\rightarrow Q(q^{\circ})$ 为真。

$ad(1)$：如果 p 是真公式 $Q(q^{\circ})$ 的哥德尔配数，p 满足条件 $V(x)$，所以 $V(p^{\circ})$ 为真。

$ad(2)$：由于 $V(p^{\circ})$ 和 $Q(q^{\circ})$ 都为真，那么蕴涵 $V(p^{\circ})\rightarrow Q(q^{\circ})$ 也为真。

（Ⅱ）但是，公式 $V(p^{\circ})$ 和 $V(p^{\circ})\rightarrow Q(q^{\circ})$ 都在 T 中可被论证是不可能的；事实上，如果它们能够被论证，$Q(q^{\circ})$ 也应该被论证，这样就与第一个不完备性定理相矛盾。

现在，这个结论已经指出作为一个语义装置，MT 有其不完整性的特点。如果在 T 中 $N(p^{\circ})$ 是不可论证的，那是因为在 MT 中我们不能论证："如果 $Q(q^{\circ})$ 为真，那么 $Q(q^{\circ})$。"

这种情况并非无药可救：如果 MT° 是不充分的，那么并不能得出结论 MT 也是不充分的。但是塔斯基的推论表明，为了建构一个充分的语义系统，MT——可以被"转

化”为 T——必须比它的子系统 MT° 在“本质上更丰富”。有效建构一个充分的系统 MT 将表明必须在 MT 中引入哪些额外的装备。

23. 语义表方法

如果读者忘记了我们在上文中讨论的逻辑推理的那些情况，他在这儿马上会感觉到用目前形式呈现的内容更容易理解。现在我们必须用一种全新的方法来讨论那个系统，我们将把这个方法与目前的讨论结合起来。

假如我们想证明下列命题的论证力：

（Ⅰ）	（Ⅱ）
没有猛犸是一个孔雀	有些孔雀不是猛犸
每一个海豹是一个猛犸	有些猛犸不是海豹
∴ 没有孔雀是一个海豹	∴ 有些孔雀不是海豹

现在我们要考察的是除了上面两个例子中涉及的动物，这些论证中的动物都可以被其他动物来代替

替换猛犸：老鼠，山魈，貂，猴子，喜鹊，猫鼬……

替换孔雀：黑豹，石鸡，熊猫，猪，美洲狮，蟒蛇……

替换海豹：鲨鱼，沙丁鱼，三文鱼，蛇，比目鱼，绵羊……

从这些众多的替换出发，我只举两个例子：

（Ⅰ′）	（Ⅱ′）
没有老鼠是一个猪	有些蟒蛇不是猴子
每个比目鱼是一个老鼠	有些猴子不是蛇
∴ 没有猪是一个比目鱼	∴ 有些蟒蛇不是蛇

现在，结论（Ⅱ′）很奇怪，它的两个前提是真，但是它的结论是假。因此，我们否定了所有的论证力，不仅仅是推论（Ⅱ′）的，还有推论（Ⅱ）以及具有相同形式的所有推论。

注释Ⅰ。如果两个论证过程中可以通过相互替换我们讨论的那些术语从而得到一个结构，那么可以认为这两个论证是相同的形式。

另一方面，在替换论证（Ⅰ）的术语得到的所有论证中，没有一个拥有真的前提和一个假的结论。出于这个原因，我们认为论证（Ⅰ）以及其他具有相同形式的任何论证是有论证力的。

(1) 我们认为，用术语猴子，蟒蛇，蛇替换最初的术语猛犸象，孔雀，海豹为我们提供了一个反例，可以让我们质疑论证（Ⅱ）的论证力。所以，通过反例这一概念，我们可以提出论证力的基本标准：

如果一个论证不接纳反例，那么这个论证具有论证力。

由于人们总是努力运用逻辑的方式来推理，这个标准已经被使用并且被认可，这个

标准也被柏拉图和亚里士多德所使用。也许有人会说，我们已经学会了避免非决定性的(non-conclusive)论证，因为人们已经学会运用恰当的反论点来挑战这类论证。但是，直到最近这个标准的基本特点才日趋明朗。我们将马上看到，直接通过这个标准我们可以推导出推理方法——非常明确、简单的形式——的原则。

(2) 显然，在所有的推理中都有一些成分是可以被替换的：它们是术语，在我们的例子中是：猛犸，孔雀，海豹。而且，有些成分被其他术语替换之后它们并不受到影响。第一个成分决定了论证的内容，第二个成分决定了它的形式。在我们的例子中，两个论证的形式可以用下面的格来表示：

(Ⅰ°)	(Ⅱ°)
没有 M 是一个 P	有些 P 不是 M
所有的 S 是 M	有些 M 不是 S
∴ 没有 P 是 S	∴ 有些 P 不是 S

一个论证的论证力只依赖于它的形式。换句话说，如果一个论证的特定形式决定了它有决定性结论，那么每一个拥有同样形式的论证也将有决定性结论；如果一个论证的特定形式没有决定性结论，那么每一个拥有同样形式的论证也将没有决定性结论。特别是形式(Ⅰ°)的每一个论证，传统三段论的CELARENT模式，有决定性结论，而形式(Ⅱ°)的每一种论证都没有有决定性结论。在这里，我们要对作为推理理论的逻辑的形式特点进行完整的表述。

(3) 在刚才的论证过程中，我们感到不太满意的是寻找反例完全是随机的。现在，如果我们偶然遇到了反例，那么显然，所讨论的论证不具有决定性。但是，如果经过了长时间的认真努力，我们仍然没有发现一个适当的反例，这也不能证明这个推断过程有论证力。

为了避免以上问题的出现，非常有必要寻找一种并非偶然而是系统的发现反例的方法。如果能够证明通过这种方法搜寻反例未果，那么，我们可以确保并不存在适当的反例，进而确认论证过程的论证力。

(4) 如果我们通过公式来表达论证过程，放大过程的描述——或者语义表方法——将会被适当的简化。我们将用到下列符号：

(1) 不定术语 $A,B,C,\cdots,M,P,S$；

(2) 个别的不确定的名称 $a,b,c,\cdots$；

(3) 个别变量 $x,y,z,\cdots$；

(4) 否定 $-$，析取 $\vee$，结合 & 和蕴涵 $\rightarrow$；

(5) 一般性的数量化 (x)，(y) 和 (z)，…以及实际存在的数量化 (Ex)，(Ey)，(Ez)，…

从这些符号着手，我们首先建构原子公式(atomic formulae)：

(6) $A(a),A(b),A(c),\cdots,A(x),A(y),\cdots,B(a),B(b),\cdots,$

$B(x),\cdots,C(a),\cdots,M(a),M(b),\cdots,M(x),\cdots,P(a),\cdots$。

然后，我们根据下列规则建构公式：

(7) 如果U是一个公式，那么$\overline{U}$，$(x)U$，$(y)U$，…，$(Ex)U$，$(Ey)U$，…也是公式；

(8) 如果U和V是公式，那么$U\vee V$，$U\&V$和$U\rightarrow V$也是公式。

注释1。为了避免"对自由变量和限制变量的混淆"。我们对规则(7)和(8)的使用必须加以一定的限制。如果公式U包含了一部分$(x)W$或者$(Ex)W$，以至于x出现在W中，那么我们说x在(本部分)U中受到限制；如果x出现在U中而没有受到限制，那么我们说x在U中是自由的。如果x出现在U中是自由的，那么公式$(x)U$和$(Ex)U$可以建构；同理对于y，z，…也一样。

而且，如果在U中没有自由的变量，在V中没有限定的变量，或者相反的情况，那么，公式$U\vee V$，$U\&V$，$U\rightarrow V$才能够被建构。

通过U，V，W，…我们一般指代的是一种封闭的公式，也就是说它们不包含自由的变量；如果$U(x)$，$U(y)$，…，$V(x)$，…中的变量是自由的，它们也是公式；同样的，x和y在$U(x,y)$中也将是自由的；等等。

注释2。通常，接受非决定性的关系术语R，T，…也是适当的，那么这些术语就会出现在原子公式中：

$R(a,a)$，$R(a,b)$，$R(a,c)$，…，$R(a,x)$，$R(a,y)$，…，$R(b,a)$，

$R(b,b)$，…，$R(b,x)$，…，$R(c,a)$，…，$R(x,a)$，$R(x,b)$，

$R(x,x)$，…，$R(x,y)$，…，$R(y,a)$，…，$R(y,x)$，…。

符号A，B，…有时候被用作非决定性的非分析论断。

(5) 在解释公式的时候，我们经常提到个别客体的某一个领域**D**。那么术语A，B，C，…将表示谓词**A**，**B**，**C**，…可以运用到**D**的客体中。非确定性名称a，b，c，…将指代**D**中的客体**a**，**b**，**c**，而变量x，y，z，…将适用于**D**中的所有客体。

那么$A(a)$表达的意思是谓词**A**是**D**中的客体**a**；$A(x)$表达的假设(或者是条件)——**D**中的客体x属于谓词**A**；$\overline{U}$表达的是U的否定；$(x)U$表达的是事实(或者是假设)——**D**中的每一个客体满足相同的条件U；$(Ex)U$表达事实——**D**中至少有一个客体满足相同的条件U；$U\vee V$表达事实——我们要么有U，要么有V；$U\&V$表达是我们同时肯定U和V；最后，$U\rightarrow V$表达的意思是在条件U的情况下，我们肯定V。

(6) 我们再回到论证(Ⅰ)和(Ⅱ)的论证力的问题上。我们首先讨论论证(Ⅰ)的情况，前提和结论用下列公式表示：

(1) $\overline{(Ex)[M(x)\&P(x)]}$

(2) $(y)[S(y)\rightarrow M(y)]$

(3) $\overline{(Ez)[P(z)\&S(z)]}$

下表是我们寻找反例来质疑论证(Ⅰ)的一个描述。搜寻结果的失败表明没有恰当的反例，所以论证是有结果的。

真		假	
(1) $(Ex)[M(x)\&P(x)]$		(3) $(Ez)[P(z)\&S(z)]$	
(2) $(y)[S(y)\rightarrow M(y)]$		(4) $(Ex)[M(x)\&P(x)]$	
(5) $(Ez)[P(z)\&S(z)]$		(10) $S(a)$	
(6) $P(a)\&S(a)$			
(7) $P(a)$		(12) $M(a)\&P(a)$	
(8) $S(a)$		(13) $M(a)$	(14) $P(a)$
(9) $S(a)\rightarrow M(a)$			
	(11) $M(a)$		

(7) 这个表的结构是由下列因素决定的，同时它也被我们刚才对那些公式的解释所证明，这也是“语义表”这个名称的由来。

公式(1)—(3)：通过它们在表中的位置，这些公式取消加于每个恰当的反例上的条件；

公式(4)：如果公式(1)必须为真，那么公式(4)必须为假。

公式(5)：如果公式(3)必须为假，那么公式(5)必须为真。

公式(6)：如果公式(5)必须为真，那么 **D** 必须包含至少一个满足 $P(z)\&S(z)$ 的条件；如果我们把这个个体命名为 a，那么公式(6)必须为真。

公式(7)—(8)：如果公式(6)必须为真，那么这两个公式必须为真。

公式(9)：如果公式(2)必须为真，那么 **D** 中的每一个客体，尤其是我们刚才提到的 a，必须满足条件 $S(y)\rightarrow M(y)$：那么公式(9)必须为真。

公式(10)—(11)：现在，我们只考虑公式(9)；现在，蕴涵项 $S(a)$ 要么为假要么为真；我们把表分为两部分；第一种可能性通过公式(10)来表达；至于第二种可能性，如果公式 $S(a)\rightarrow M(a)$ 和 $S(a)$ 均为真，那么公式 $M(a)$ 也必须为真；来自于公式(11)。

然后，我们看到公式(8)$S(a)$已经必须为真。所以，“第一种可能性”已经被排除，这种可能性被相应的子表的终止所表达。

公式(12)：如果公式(4)必须为假，那么在 **D** 中没有客体可以满足条件 $M(x)\&P(x)$；这一点对于客体 a 来说尤其有效，所以公式(12)必须为假。

公式(13)—(14)：现在我们只考虑公式(12)；如果这个公式必须为假，那么要么(13)要么公式(14)必须为假，所以表又一次被分割。

然后，我们注意到，通过公式(13)和(14)的位置所分别表达的两种可能性被公式(11)和公式(7)表达的条件所排除。两个相应的子表被闭合，显然将找不到反例。

(8)对于论证(Ⅱ)我们有下表：

真	假
(1) $(Ex)[P(x) \& \overline{M(x)}]$	(3) $(Ez)[P(z) \& \overline{S(z)}]$
(2) $(Ey)[M(y) \& \overline{S(y)}]$	(7) $M(a)$
(4) $P(a) \& \overline{M(a)}$	(11) $S(b)$
(5) $P(a)$	(12) $P(a) \& \overline{S(a)}$
(6) $\overline{M(a)}$	(13) $P(a)$ ‖ (14) $\overline{S(a)}$
(8) $M(b) \& \overline{S(b)}$	(16) $P(b) \& \overline{S(b)}$
(9) $M(b)$	(17) $P(b)$ ‖ (18) $\overline{S(b)}$
(10) $\overline{S(b)}$	
(15) $S(a)$	
(19) $S(b)$	

简单的解释就足够了。表(1)和(2)中的每一个表只需要满足某一条件的一个客体的存在。我们没有理由相信这两个客体将是(或者能够)相同。所以,我们给它们不同的名称 a 和 b,由此形成了公式(4)和(8)。两个客体 **a** 和 **b** 中的任何一个也不满足条件 $P(z) \& \overline{S(z)}$,由此形成公式(12)和(16)。

所有的公式被拆分,表的结构在终结时并不是所有的子表被终止。公式 $P(a)$, $S(a)$, $M(b)$ 必须为真,而公式 $M(a)$, $P(b)$, $S(b)$ 必须为假。领域 **D** 必须包含两个客体 **a** 和 **b**,所以谓词 **P** 和 **S** 属于 **a** 而不是 **b**,而谓词 **M** 属于 **b** 而不属于 **a**。例如,我们以"普遍的"**D** 为例,它是由一个蟒蛇 **a** 和一个猴子 **b** 所组成的,那么我们就有了一个反模型 **<D,M,P,S>**,我们可以用这样一个模型来质疑论证(Ⅱ)。

(9) 在某种意义上,对这两种情况的讨论具有示范的特点。我们是否必须认为一个论证——从特定的前提 $U_1, U_2, \cdots, U_m$ 出发,导出某个特定的结论 V——具有论证力。为了回答这个问题,我们通常需要利用一个类似的语义表。语义表的结构必须一定能产出下列两个结果之一:

(Ⅰ) 表是"闭合的"。这就意味着寻找反例的系统尝试(并且,因此,任何尝试)必须是失败的。所以没有适当的反例,因此结论 V 的确是前提 $U_1, U_2, \cdots, U_m$ 的符合逻辑的结论。

(Ⅱ) 表是非闭合的。所以我们可以从表单中发现一个反例,这就让我们有理由去质疑从前提 $U_1, U_2, \cdots, U_m$ 得出的结论 V。

(10) 现在,我们可以对第一章中讨论的洛克-贝克莱问题提供一个确定性的解决方案。假设通过运用 $X, Y, Z, \cdots$ 作为任何点的值的变量,初等几何已经被形式化。如果 $Tr(X, Y, Z)$ 表达的是在这样一个条件下点 X, Y, Z 组成一个三角形,并且,如果

$U(X,Y,Z)$表达的是在这样一个条件下，角 ZXY，XYZ，YZX 的总和与两个直角相等，那么由康德所讨论的定理可以用下列公式来表达：

(1)　　$(X)(Y)(Z)[Tr(X,Y,Z)\to U(X,Y,Z)]$

令 K 为几何的公理集（我们最终将对它加入上述的定义和定理）。然后我们可以建构与论证——从 K 中的前提出发并导出公式(1)作为结论——相对应的语义表。以下是建构的第一个阶段：

真	假
K	(1) $(X)(Y)(Z)[Tr(X,Y,Z)\to U(X,Y,Z)]$
(5) $Tr(A,B,C)$	(2) $(Y)(Z)[Tr(A,Y,Z)\to U(A,Y,Z)]$
……	(3) $(Z)[Tr(A,B,Z)\to U(A,B,Z)]$
	(4) $Tr(A,B,C)\to U(A,B,C)$
	(6) $U(A,B,C)$
	……

假如公式(1)是 K 中前提的逻辑结果，显然表将是闭合的。但是，反过来，表提示从 K 出发对(1)的一个论证主要有下列结构。

K

(5) $Tr(A,B,C)$

……

(6) $U(A,B,C)$

(4) $Tr(A,B,C)\to U(A,B,C)$

(3) $(Z)[Tr(A,B,Z)\to U(A,B,Z)]$

(2) $(Y)(Z)[Tr(A,Y,Z)\to U(A,Y,Z)]$

(1) $(X)(Y)(Z)[Tr(X,Y,Z)\to U(X,Y,Z)]$

现在，这是对产生洛克-贝克莱问题的类型的一种论证。首先，我们对前提性公式(5)添加："令 ABC 是任意三角形"等等。然后我们论证公式(6)："在三角形 ABC 中，内角和与两个直角相等。"以假设形式通过陈述结论解决了补充前提的问题："如果 ABC 是一个三角形，那么……。"最后，我们概括出结论。

在我看来，我们可以得出结论认为，论证过程中奇怪的结构与直觉没有联系，而是由结论的结构决定的。

(11) 对语义表方法的基本原则进行精确的界定非常有用的。为了简化说明，我只考察从不定非解析（或者原子的）论断 $A,B,C,\cdots$ 出发，通过否定一和蕴涵→的方法建构的公式。那么我们将拥有下列的语义规则：

(S1) 如果 U 为真，那么$\overline{U}$为假，反之亦如此；

(S2) 如果 U 为假或者 V 为真，那么 $U\to V$ 为真；

如果 U 为真并且 V 为假，那么 $U \to V$ 为假。

如果一旦选择了每一个原子 $A, B, C, \cdots$ 的真值（真或者假），那么每一个复合公式的真值将由规则（S1）和（S2）以单一的方式确定。

假如我们选择了原子 $A, B, C, \cdots$ 的真值，这样在 K 集中的所有公式将为真，而在 L 集中的所有公式将为假。这个赋值问题（valuation problem）可以这样来表达：

真	假
K	L

为了解决这个问题，我们可以采用下列的简化格：

	真	假
(i[a])	K $\overline{U}$	L
		U

	真	假
(i[b])	K	L $\overline{U}$
	U	

	真		假	
(ij[a])	K $U \to V$		L	
	(i)	(ij) V	(i) U	(ij)

	真	假
(ij[b])	K	L $U \to V$
	U	V

	真	假
(iij)	K U	L U

（12）假设我们要判断一个论证——从特定前提 K 出发得出结论 Z——的论证力，那么，我们会努力去建构一个语义表——把前提 K 插入左侧的列中而把结论 Z 插入右侧的列中——来发现一个适当的反例。换句话说，我们要通过约简格（i）—（iij）来解决值问题，也就是说，这些格立即变成了建构规则，同时也是语义表闭合与否的规则。

真	假
K	Z

推论过程有可能产生两种不同的结果：

（Ⅰ）表是“闭合的”。没有发现反例，所以推论是有结论的。

（Ⅱ）表“没有闭合”。然后，我们可以从表中“读出”必须为原子选择的真值，这样 K 中的所有前提为真而结论 Z 为假。

假设我们的表是闭合的，那么我们应该看到，真值问题的简化格与推理问题的简化格是相同的，并且后者的格与根岑系统 LK 特定变量 F 的简化格相对应，因此，可以把闭合的语义表进行重组导出系统 F 的一个推理。反之，如果表单是不闭合的，那么在系统 F 中就没有相应的推理。很显然，我们讨论的系统 F 是从已经讨论过的第 21 部分那个系统发展来的一个版本。

这些评论只与特殊类型的公式有关，但是，对于一般的情况而言它们仍然有效。例如，论证（Ⅰ）的闭合表在系统 F 中会导出下列的推论。

$$(1),\ (5)-(6),P(a)\vdash(3)-(4),M(a)\&P(a),P(a)$$

$$(1)-(2),(9),M(a)\vdash(4),M(a)\&P(a),M(a)$$

$$\overbrace{(1)-(2),(5)-(7),(9),(11)\vdash(3),(Ex)[M(x)\&P(x)],M(a)\&P(a)}$$

$$(1)-(2),(5)-(7),S(a)\rightarrow M(a),M(a)\vdash(3),(Ex)[M(x)\&P(x)]$$

$$(2),(5),S(a),S(a)\rightarrow M(a)\vdash(3),(S)a$$

$$\overbrace{(1),(y)[S(y)\rightarrow M(y)],(5)-(8),S(a)\rightarrow M(a)\vdash(3)-(4)}$$

$$(1)-(2),(5),P(a)\&S(a),P(a),S(a)\vdash(3)-(4)$$

$$(1)-(2),(Ez)[P(z)\&S(z)],P(a)\&S(a)\vdash(3)-(4)$$

$$(1)-(2),(Ez)[P(z)\&S(z)]\vdash\overline{(Ez)[P(z)\&S(z)]},(4)$$

$$\overline{(Ex)[M(x)\&P(x)]},(2)\vdash(3),(Ex)[M(x)\&P(x)]$$

$$(1)-(2)\vdash(3)$$

24. 代数和拓扑学概念

在建构语义表的过程中，最基本的问题仅仅是发现一个反例以及发现一个适宜的真值的过程。现在我们想提出一个概念系统，它可以让我们来描述所有的模型、描述恰当的真值、考察所有从原子 $A(.)$，$(.)$和 $R(.,.)$出发，通过否定、联合、蕴涵以及普遍性的数量化所获得的公式。

我们假设所有的个别的不定名称 $a,b,c,\cdots,p,q,\cdots$ 现在代表客体 **a**，**b**，**c**，…，**p**，**q**，…并且 **D** 恰好是由所有的被指代的客体所组成的。我们现在只考察模型 **M**＝＜**D**，**A**，**B**，**R**＞，这个模型是通过选择运用于 **D** 的客体的谓词 **A**，**B** 和 **R** 所获得的。所以，公式的真值与模型 **M** 的选择相关。引入补充的语义规则是必要的。

（S3）如果 U 和 V 为真，那么 $U\&V$ 为真；如果 U 或者 V 为假，那么 $U\&V$ 为假。

（S4）如果所有的公式 $U(a),U(b),U(c),\cdots,U(p),U(q),\cdots$ 为真，那么公式

$(x)U(x)$为真；如果公式$U(a)$，$U(b)$，$U(c)$，…，$U(p)$，$U(q)$中的一个为假，那么公式$(x)U(x)$为假；同样的，$(y)U(y)$，$(z)U(z)$，…。

(S5) 如果谓词**A**属于客体**p**，如果谓词**B**属于客体**p**，而且如果谓词**R**属于客体**p**和**q**，那么公式$A(p)$，$B(p)$，$R(p, q)$分别为真；如果不是这样，那么这些公式都为假。

(Ⅰ) 现在看来，最好引入不同的术语。我们不再说一个公式U是真是假，我们将分别这样来描述，$w(U)=2$或者$w(U)=0$。那么值w就是一个函数，它与每一个公式U相联系，值$w(U)=2$或者$w(U)=0$与下列规则相一致：

(S′1) 如果$w(U)=2$，那么$w(\overline{U})=0$，反之亦然；

(S′2) 如果$w(U)=0$或者$w(V)=2$，那么$w(U\rightarrow V)=2$；如果$w(U)=2$并且$w(V)=0$，那么$w(U\rightarrow V)=0$；

(S′3) 如果$w(U)=w(V)=2$，那么$w(U\&V)=2$；如果$w(U)=0$或者$w(V)=0$，那么$w(U\&V)=0$；

(S′4) 如果$w[U(a)]=w[U(b)]=w[U(c)]=\cdots=w[U(p)]=\cdots=2$，那么$w[(x)U(x)]=w[(y)U(y)]=w[(z)U(z)]=\cdots=2$；反之，$w[(x)U(x)]=w[(z)U(z)]=\cdots=0$

值w是通过对值$w[A(p)]$，$w[B(p)]$，$w[R(p,q)]$——与原子公式相联系——的选择以一种单一方式来决定的。很容易证明在值w和模型**M**之间存在双向的对应关系。

(2)对于任何公式U，令$H(U)$是所有值w的集，以致$w(U)=2$；那么，所有值w的集写作1。那么，规则(S′1－4)产生下列规则

(S″1) $H(\overline{U})=1-H(U)$

(S″2) $H(U\rightarrow V)=[1-H(U)]+H(V)$

(S″3) $H(U\&V)=H(U)\cdot H(V)$

(S″4) $H[(x)U(x)]=\bigcup_{p\varepsilon D}H[U(p)]$

(3) 值问题：

真	假
U_1	V_1
U_2	V_2
…	…
U_m	V_n

将由对集的评估组成：

$$H(U_1)\cdot H(U_2)\cdots H(U_m)-H(V_1)-H(V_2)-\cdots-H(V_n)$$

将被写为$H(K)-H(L)$，这个问题允许下列简化：

$(i^a)\ H(K)\cdot H(\overline{U})-H(L)=H(K)\cdot H(\overline{U})-H(L)-H(U)$

$(i^b)\ H(K)-H(L)-H(\overline{U})=H(K)\cdot H(U)-H(L)-H(\overline{U})$

$(ij^a)\ H(K)\cdot H(U\rightarrow V)-H(L)=[H(K)\cdot H(U\rightarrow V)-H(L)-H(U)]$
$+[H(K)\cdot H(U\rightarrow V)\cdot H(V)-H(L)]$

$(ij^b)\ H(K)-H(L)-H(U\rightarrow V)=H(K)\cdot H(U)-H(L)-H(U\rightarrow V)-H(V)$

$(iij^a)\ H(K)\cdot H(U\&V)-H(L)=H(K)\cdot H(U\&V)\cdot H(U)\cdot H(V)-H(L)$

$(iij^b)\ H(K)-H(L)-H(U\&V)=[H(K)-H(L)-H(U\&V)-H(U)]$
$+[H(K)-H(L)-H(U\&V)-H(V)]$

$(iv^a)\ H(K)\cdot H[(x)U(x)]-H(L)=H(K)\cdot H[(x)U(x)]\cdot H[U(a)]\cdot H[U(b)]\cdot$
$\cdots-H(L)$

$(iv^b)\ H(K)-H(L)-H[(x)U(x)]=\bigcup_{p\in D}\{H(K)-H(L)-H[(x)U(x)]-H[U(p)]\}$

$(v)\ H(K)\cdot H(U)-H(L)-H(U)=\varnothing$

论证(1)的语义表的现在被下列计算过程所代替(数字1,2,3,…指表中的公式):

$H(1)\cdot H(2)-H(3)=H\overline{[(Ex)[\cdots]]}\cdot H(2)-H(3)=$

$=H\overline{[(Ex)[\cdots]]}\cdot H(2)-H\overline{[(Ez)[\cdots]]}-H[(Ex)[\cdots]]=$

$=H(1)\cdot H(2)\cdot H[(Ez)[\cdots]]-H(3)-H(4)=$

$=H(1)\cdot H(2)\cdot H(5)\cdot H[P(a)\&S(a)]-H(3)-H(4)=$

$=H(1)\cdot H(2)\cdot H[(y)[\cdots]]\cdot H(6)\cdot H[P(a)]\cdot H[S(a)]-H(3)-H(4)=$

$=H(1)\cdot H(2)\cdot H[(y)[\cdots]]\cdot H(6)\cdot H(7)\cdot H(8)\cdot H[S(a)\rightarrow M(a)]$
$-H(3)-H(4)=$

$=H(1)\cdot H(2)\cdot H(5)\cdot H(6)\cdot H(7)\cdot H[S(a)]\cdot H(9)-H(3)-H(4)$
$-H[S(a)]+H(1)\cdot H(2)\cdot H(5)\cdot H(6)\cdot H(7)\cdot H(8)\cdot H(9)\cdot H[M(a)]$
$-H(3)-H[(Ex)[\cdots]]=$

$=\varnothing+H(1)\cdot H(2)\cdot H(5)\cdot H(6)\cdot H(7)\cdot H(8)\cdot H(9)\cdot H(11)$
$-H(3)-H(4)-H[M(a)\&P(a)]=$

$=H(1)\cdot H(2)\cdot H(5)\cdot H(6)\cdot H(7)\cdot H(8)\cdot H(9)\cdot H[M(a)]-H(3)$
$-H(4)-H(12)-H[M(a)]+H(1)\cdot H(2)\cdot H(5)\cdot H(6)\cdot H[P(a)]$
$\cdot H(8)\cdot H(9)\cdot H(11)-H(3)-H(4)-H(12)-H[P(a)]$

$=\varnothing+\varnothing=\varnothing$

逻辑问题简化为代数问题可以让我们充分利用现代抽象代数所发展的概念和方法。对于逻辑推理的实际运用,我们不应高估逻辑中代数方法的作用。

(4)我们以一种更加自然的方式引入拓扑方法的运用。我们还没有讨论领域**D**的扩展问题。现在,我们发现语义表的建构过程在经过有限数量的步骤后并不必然终止。如果我们所举的两个例子是这种情况的话,那是因为它们是被有意选择的。

例如,假定我们必须确定下列论证:

$$\frac{(x)(Ey)[A(x,y)\to A(x,y)]}{\therefore (z)A(z,z)}$$

这是建构相应语义表的第一步。

真	假
(1) $(x)(Ey)[A(x,y)\to A(x,x)]$	(2) $(z)A(z,z)$
(4) $(Ey)[A(a,y)\to A(a,a)]$	(3) $A(a,a)$
(5) $A(a,b)\to A(a,a)$	(6) $A(a,\ b)$
(7) $A(a,a)$	(10) $A(b,c)$
(8) $(Ey)[A(b,y)\to A(b,b)]$	
(9) $A(b,c)\to A(b,b)$	
(11) $A(b,b)$	

显然,进一步的建构过程充满了不确定性。公式(1)必须运用到客体 **c**,因为公式(8),这个引入过程是必要的。然后我们得到公式(12),它与公式(8)相类似,这就要求我们引入客体 **d**,接着我们必须把它运用到公式(1)中,等等。与公式(9)类似的公式导致了表的分割。

显然,在相对复杂的情况下,我们必须考虑一部分二级表的闭合问题,这使得表的建构过程非常不对称。

如果在一个语义表中存在一个无穷系列的二级表的重叠,那么我们很容易说明这样一个序列提供了一个恰当的反例。

所以我们不得不去证明,在每个语义表 T 中——包含无穷多的公式——存在这样一个无穷系列的重叠的二级表。我们用下列方式来进行推理。

在一个语义表 T 中,每一个公式 X 都决定特定的二级表 $T^{(x)}$,这一过程源于在公式 X 出现之前 T 被分割的方式。如果 $T^{(x)}$ 包含无穷多的公式,那么我们会说 X 是 T 中第一类的一个公式;如果在 $T^{(x)}$ 中的公式数量是无穷的,我们会说 X 是第二类的一个公式。

现在我们假设在 T 中所有的公式都是第一类,从这个操作中我们得到的结果是 T^0 将是那个表单:

(Ⅰ)假设 T^0 不再包含任何公式。那么,T 中的第一个公式就是第一类。因此,T 只包含公式的一个有限数字,这与我们最初的假设是相矛盾的。

(Ⅱ)假设 T^0 包含至少一个公式。那么,T 完全是由过度重叠的子表单的无限序列所组成的。事实上第二类的一个公式 X 绝对不可能是一个子表单中的最后一个公式。

非闭合意义表单的结构将以不确定的方式继续,先决条件是它不会因为领域 D 的耗尽而提前结束。因此我们需要进一步假设领域 D 是无穷的。通常情况下把领域 D

看成是自然数的集。

如果我们把过度重叠的子表单中的序列看作是某一个空间 M 的点，而在这个空间 M 中子表单构成了框架，那么这个空间 M 将会是一个零纬度的拓扑空间，这个空间被压缩并且可以被分割。那么有一些逻辑定理就可以被看作是拓扑空间中某些特性的一种表现。这一种解释是所谓的欧拉圆的传统讨论的一种现代类比(参考第一章第 7 部分)①。

① Mostowski，1949；Beth，1955.

第四章 严格证明与启发式过程

25. 数学家的类型学

我们在第 26 部分将会看到，关于数学思维的知识，特别是关于创造性思维的知识是非常有限的。对于这些知识——大部分来自内省——的解释和使用必须格外小心，其原因不仅仅在于它们是由数学家——他们不一定是心理学家而且他们都不一定是公正的观察者——提供的，而且因为那些少数真正有创造力的数学家——想要对自己内心最深处的经验给出比较详细的解释——没有表现出思维活动的统一风格。

通过一个简单的先验（*apriori*）思考，加之来自不同方面的数据已经向我们表明，我们必须重视——除了通常的分类原则之外的——对一些具体特点的看法，它们是：

(1) 心理运算具备的或多或少的自觉特点最终为手头问题提供了解决方案；

(2) 这些心理运算的内在特点：对词汇、符号、空间或时间表象、视觉表征、听觉表征、动作表征的运算，等等；

(3) 对精确性的要求；

(4) 兴趣领域的宽与窄；

(5) 对独立工作或者是团队工作的偏好。

关于这一点，让我们回顾一下庞加莱（Poincaré）对“逻辑学家”——“通过分析方法”来解决问题——和“直觉型的人”——“通过几何学”来研究问题——的区分。毫无疑问，他们的态度方面存在深刻的差别；有时候，“逻辑学家”——他可能不去阅读“直觉型的人”的某一个主题的出版物，尽管自己感兴趣——会努力用他自己的方式把那些工作重新做一遍，对“直觉型的人”来说，情况刚好相反。针对数学思维的心理学研究——研究对象不是以上两类人——面临的危险是把发现的某一类人的特点当作是数学思维的特点。我们应该注意到，在某一个特定的阶段或者是某一个国家，人们也许会以贬低一类数学家的思维为代价而去“抬高”另一类数学家的思维方式；也许正是在这样的氛围中，所谓的主流数学思维为我们提供了一边倒的结论。

对数学家的分类问题一直没有受到心理学家的重视。詹斯奇（Jaensch）和奥尔索夫（Althoff）对这一问题的研究表现出了纳粹思想的灾难性影响。不过，他们的书包含了一些有价值的观察，特别是他们用令人信服的方法表明，庞加莱的简单二分法并没有

给我们提供一个满意的分类，这一点在庞加莱对埃尔米特(Hermite)进行分类的时候所遇到的困难中就已经体现出来。①

“埃尔米特……我已经提到过他了，他不能被划分为那种使用直觉的几何学家，但是把他划分为逻辑学家也不是很恰当。他毫不掩饰自己对于纯粹演绎过程的厌恶，也就是从一般到特殊的推理形式。”

对于这些困难我们将在区分外部和内部直觉的时候进行解释，我们在第 30 部分将再次讨论这一问题。

26. 庞加莱(Poincaré)，阿达玛(Hadamard)，波利亚(Polya)的观点

我在这里要讨论的观点主要来自于著名的《数学家数学思维方法调查研究》(*enquête de “l'Enseignement Mathêmatique” sur la mêthode de travail des mathêmaticiens*)，并受它的影响得以发展，该书由费尔(H. Fehr)与弗卢努瓦(Flournoy)和克拉帕雷德(Claparède)于 1908 年合作出版(巴黎和日内瓦，1908)。尽管这本书的两个合作者是著名的心理学家，但是这本《调查研究》(*enquête*)所反映的是数学家的观点而不是心理学家的观点。首先，这本书试图明确有利于数学工作的条件，但是，无论提出的问题还是给出的答案都对心理学表现出相当的兴趣。似乎这本书的出版在后来导致了庞加莱的演讲《数学发明》(*L'invention mathématique*)，②庞加莱的思想后来被阿达玛所继承和发展。③ 波利亚的作品是自己独立发展出来的，但在同样的问题背景下他也做了有益的讨论。

从他自己的经验出发，庞加莱区分了数学发现中被无意识阶段分开的两种意识阶段。这个区分与我们解决数学难题时的经验相一致。经过一系列不成功的尝试后，我们变得厌倦，最终被迫放弃探索。后来经过一段时间的休息，解决方案突然闪现，无须意识努力并且令人惊奇的清晰和肯定。那么，意识的第二阶段的工作就是对刚才的发现进行证实并用公式表述。

庞加莱认为，那个把两个意识工作的阶段分隔开来的短暂阶段很明显只是一个休息的阶段。在他看来，正是在无意识中发生的活动最终产生了解决方案。

在讨论庞加莱的无意识工作的想法之前，我想讨论一些能够证实无意识工作的现象。首先，当我们已经放弃探究一个问题时，我们常常还在不自觉地思考它；在这种情况下，如果我们想重回先前已经放弃的问题上，在开始阶段不会像我们应该去做的那样——从头再来。相反，我们有这样的印象，我们被问题所带领，投入一大堆观念之中，很

---

① Poincaré, 1905, p. 34.

② Poincaré, 1909, p. 43 et seq.

③ Hadamard, 1945.

难从这些观念中逃脱出来。

第二,问题被完美解决之后,可能发生的情况是,对这个问题更加简洁或者精致的解决方案会自动出现,或者是我们无须意识努力又出现了一个更加完整或者更加一般的结论。

对于无意识工作的性质,庞加莱并不接受阈下自我的假说。这种假说认为,阈下自我与意识自我平等,甚至阈下自我在识别、判断和精致化方面要胜过意识自我。他只是认为,阈下自我有机械地形成许许多多的观念联合的能力,其中只有少数想法能够进入意识领域。

另一方面,庞加莱强调意识层面两个阶段工作的重要价值。起始阶段看起来完全不成功,但是,正是这个阶段启动了无意识的工作机制。最后一个阶段也是不可缺少的,因为它要对已经获得的解决方案进行证实。

阿达玛支持庞加莱的以上观念,在阿达玛的小册子《创造心理学》(*psychologie de L'invention*)[①]中,许多观念都与庞加莱的思想相联系。阿达玛区分了四个阶段:准备,酝酿,顿悟和证实。我认为,第三阶段不能算作一个独立的阶段。与庞加莱相比,阿达玛更进一步,他坚持认为存在不同类型的数学思维,并且他深入探讨了词汇和表象的作用。

根据阿达玛的观点,像《数学教学》(*l'Enseignement Mathêmatique*)这样的调查存在缺陷,这类调查很难得到一些最优秀的数学家的回答,大多数回答是一些具有一般水平的职业数学家所提供的。现在在我看来,这种反对意见并不像阿达玛所想象的那样严重。参加《数学教学》调查的那些数学家代表了文化和数学活动的水平,这种水平其实是相当高的,它超过了常人的水平。从心理学的观点来看这种看法也是不恰当的,即认为天才数学家的思维模式应该与提供大部分答案的好的数学家的思维模式非常不同。

我自己的观点在很大程度上与阿达玛自己观察的事实是一致的,一个试图解决代数和几何问题的学生所进行的工作与一项原创性的发现所从事的工作之间,如果他们在程度或水平上存在差异,那么二者之间还有共同的特点,而且,庞加莱的观察中[②]也表达了同样的想法。如果情况相反,那么在真正意义上数学发现将是一种非常特别的现象,这样也就根本没必要试图去进行心理分析。

在这儿我不想把灵感作为一个独立的阶段,而阿达玛却把它独立的列了出来,但是对这种情况我想讨论从第一个意识工作到酝酿的转换问题。如果我们承认庞加莱的假设,根据他的假设酝酿阶段事实上是一个无意识的工作阶段,那么从意识到无意识的转换问题就值得我们特别关注。这样就产生了两个可能的假设:

---

① Hardamard, 1945.

② Poincaré, 1909, pp. 123 et seq.

(1) 在第一个有意识的工作阶段“无意识逐渐地开始工作”;

(2) 当意识水平的工作被打断的时候“无意识工作突然开始。”

现在看来第一个假设是不适宜的。根据我们所得到的数据,无意识工作可以利用有意识工作的结果。所以对意识水平工作的打断对于储存信息进行快速的传输是必要的,还有一种情况就是对意识水平工作的打断对建立已经储存信息与无意识工作之间的联系是必要的。

这种工作应该在意识水平启动并且受到它的影响,这样看起来更加合理一点。我们可以想象一种引入或者是共振,我们还可以把它想象为与弗洛伊德的抑制相类似的机制。在庞加莱看来意识水平的工作包括形成各种观念的联合,而那些无用的联合被拒绝。我们可以假设,在意识水平对于不符合标准的观念组合被拒绝了,这些组合也受到了抑制,所以提供给无意识工作的信息是一种新的运算。当意识水平的工作在继续的时候,它占用了我们所有的注意力,所以无意识水平所产生的新的观念组合很难进入我们的意识领域。甚至对意识水平工作干扰之后,这些组合观念才能艰难地逃避意识标准的监控。但是,当环境氛围使得意识监控放松的时候,例如不喜欢、黑咖啡、兵役、旅行途中风景的变化、庞加莱的半睡眠状态、赫尔姆霍兹的散步、烟草、茶或者是酒,在这些情境中新组合的观念在无意识水平也许会引起我们的意识水平的注意。

我要谈一下我自己在这个领域的经验,我发现我所感兴趣的数学问题能产生三种连续的反应:

(1) 第一个短暂的反应;

(2) 几天之后的第二个反应;

(3) 几个月之后的被延迟了的反应。

第一个反应是完全自动的,不需要意识努力,也是相对高效的。它对于简单的问题常常能够提出一个完美的解决方案,对于一个不太简单的问题,他可以提出一个部分的解决方案,而且很多情况下这些解决方案非常合理。

第二个反应是第一个意识努力的结果,它的效果要相对差一点。一般而言,它不会导致第一个反应的进步,第二个反应不会促进我的研究。

到了比较大的年龄我才发现了第三个延迟反应,但是它却非常有效。它明显出现在我感兴趣的一些问题中,如果这种情况出现的话,它能帮助我获得问题的解决方案。

在这种情况下,第一种反应仅仅让我对问题有个大概的了解,是否对这个问题感兴趣以及这个问题解决的可能性。在第二个反应中我会用相当的气力去解决这个问题,并且有可能迅速快捷地完全解决问题。但如果我发现对问题的解决没有进展的时候,我会选择放弃这个问题。

但是在接下来的几个月内,我会不时地去思考这个问题,也许会试着去重新解决问题。正是这样一个决定,标志着庞加莱和阿达玛所说的那种开始。从这一刻起解决问题的进程与他们描述的非常相像。

对我来说这些个人经历让我得出了一个非常重要的结论。庞加莱和阿达玛所描述的准备阶段并不能带来有价值的无意识思维,除非这个阶段的意识工作是以一种合理的有效的方式进行。但是以上所述已似乎在证明另外一个结论:无意识工作并不具有纯粹的自动性。无意识工作也是指向于或多或少的一个有预定的目标,而这个方向是在预备阶段就确定了的。

我在这儿还要提两种想法,是它们使我认为无意识工作不具备纯粹的自动性。首先,在我们现有的知识水平上我们认为实际的"无意识加工"具有极大的能力和速度。很难相信这样一个无意识机制是存在的。

第二,据我们所知,有时候意识水平的观察发生在酝酿阶段。庞加莱对这一现象的描述给我们一个印象,那就是许多观念以无序的没有方向的形式涌现出来。在我的经验中,这一过程与意识水平的思维比较相似,尽管它们有一点混乱,也缺乏严格的约束。这一过程与意识现象非常不同,它很难穿越意识阈限,它很难在几小时之内产生出如庞加莱所提到的那些完全无序的思想流。

无论如何也不能否认,无意识水平的思维在很大程度上依赖于准备阶段的意识水平的思维。这一事实足够表明波利亚(G. Polya)试图建立一个数学启发式的重要性。①

初看起来,即使是启发式的概念本身也具有矛盾的特点。我们在这里可以区分三种类型的数学问题:

(1) 那种只需要运用某种正确的路径就可以解决的问题;

(2) 那种需要用目前已有的方法巧妙解决的问题;

(3) 利用目前的方法不能解决的问题。

对于问题(1),任何启发式方法都是多余的。对于第二类问题任何启发式都可以约简为一个规则:用一种聪明的方式尝试使用可以使用的任何方法。第三类问题超越了任何启发式方法。

但是自相矛盾的并不是数学启发式的思想,而是我们讨论的这一论证过程。对于问题的分类已经产生了一定数量的启发式规则,有些我在后边会谈到。如果我们遇到的问题是第一类问题,在这种情况下用适当的路径去解决就足够了。

如果不是这样的情况,在第二类和第三类之间去做选择也没有什么用处。在任何情况下,我们都会尝试巧妙地运用现成的方法去解决问题。在选择能够成功解决问题的方法时,我们会受到启发式过程的引导。如果能在寻尽已有的方法之前就发现了解决方法,那么,这个问题显然就属于第二类问题。

如果用平常的方法不能解决问题,我们会得出结论,这个问题属于第三类。显然对这类问题没有什么特殊的启发式。但是我们通常得到的建议是尝试再次使用现有的方

① Polya, 1954, 1957.

法，这样做不仅仅是为了确保不忽略可能成功的方法，也是为了进一步搞清楚没有成功的原因。经常出现的情况是，我们通过变化已知的方法而找到了解决问题的方法。如果还找不到问题的解决办法，那么要解决问题的办法就只能是我们刚刚讨论过的真正的数学发明。

27. 寻找一种既是启发式又是证明式的方法：笛卡尔以及对古人的分析

在实际的数学研究中经常存在一种奇怪的数学二元论，即创造术与争论术。

创造术包含了启发性规则，这种方法可以让我们发现某些问题的解决办法，但是一般而言它们不具有论证力。它不是一个确定的先验，因为我们无法通过观察这些规则就最终发现科学问题的解决方法，它也不能保证通过恰当运用规则所发现的解决方法就一定是正确的。我们必须通过论证来证明后天发现的解决方案是正确的。

相反，争论术为我们提供一些原则，帮助我们判断论证（后验的）的决定性特点，同时对这个解决方案所声称的正确性进行判断。但是这些原则只能运用于后验，因此它们不能帮我们发现解决问题的方案。当解决方案被发现后，它可以帮我们启动论证，以证明这个方案的正确性。

但是在一些特殊的情况下，我们在解决问题的过程中同时具有启发式和论证式的特点。根据当代的思想，最古老的和最基本的就是数学运算。十进制可以让我们去计算 137×269 这样的问题，十进制同时也提供论证，它可以去判断我们获得的解决方案的正确性。（在运用十进制的时候我们会犯错误，这一事实并不是有效的反对意见：因为如果计算结果是错误的，那么证明也是错误的。）

亚里士多德的三段论是同时具有启发性和论证性的方法的第二个例子。值得注意的是这个方法的名称本身就表明它与数字运算相类似，这个特点引起了希腊思想家们的注意。但是，如果这两种情形都没有引起哲学家和数学家的兴趣，那是因为人们把逻辑学看作是外部的数学，认为数字运算已经退化为一种为柏拉图和亚里士多德所使用的纯粹的方法，也就是退化为一种亚数学。

正是笛卡尔强调代数方法同时具有启发和论证的特点，也正是笛卡尔把握住了这一重要性。作为这类方法的第二个例证，笛卡尔引用了著名的对古人的分析（analysis of the Ancients）。人们认为笛卡尔使用的概念也许有问题，甚至是伪造，这也许是真的，但是这并不妨碍笛卡尔创造了分析几何学，它是代数方法与古代几何分析的一种综合。

但是值得注意的是这些方法并没有获得完美的实现效果。这些方法能让我们发现很多具体领域里产生问题的解决方案，当用这些方法解决问题的时候，它们也能够提供完美的证明。但是这些方法并不能解决使用它们的领域中的每一个问题，甚至笛卡尔也没有详细说明这些方法的使用条件。

有趣的是，在这样的背景下，笛卡尔在更加宏伟的项目开始之前也犹豫了。特别是在讨论世界语言问题时他指出：

"如果有人曾经解释了人们头脑中的最简单的想法是什么，人们用这一想法构成了他们的思想，并且这种解释能够被每个人都接受的话，我想我希望能够有一种全世界通用的语言，它非常容易学，也非常容易发音和写作，并且最为重要的是它可以帮助人们来判断、来清楚地指代所有东西，不容易发生错误，而目前的情况则是相反的，我们掌握的词汇只有各种混淆的含义，我们的头脑也习惯了这样一种长久以来的状态。这就是为什么人们的理解存在不完美的原因。现在我认为这样一种世界统一的语言是可能的，人们可以在这种语言的基础上来发现科学，在它的帮助下，农夫对于真理的判断也许要比哲学家还要准确。但是我们将永远没有希望看到在生活中来使用这种语言，因为它意味着事物的顺序要发生极大的变化，并且它的使用必须以全世界变成一个天堂和乐园为前提，这种想法只能在想象中来实现。"①

28. 莱布尼茨和决策问题

莱布尼茨对我们刚才引用的笛卡尔的话进行了如下评论：

"尽管这类语言依靠真正的哲学，但是它并不依赖于哲学的完美性。也就是说尽管哲学是不完美的，但是这种语言可以被建立起来，并且随着人们的知识增加，这种语言也会变化。同时这种语言对于两个方面——运用我们所知道的东西以及注意到我们所缺乏的东西——是有帮助的，它可以创造出发现未知东西的方法。这首先是它可以消除我们在运用推理过程中所产生的各种争论，这样的话，推理和计算就变成了一回事。"②

莱布尼茨的把推理约简为计算的假设承认了三种解释，也承认了一种非常不同的"逻辑力量"。根据最弱的解释，它也意味着一种符号的存在(或者是建构)，这种符号可以允许我们去表征每一个逻辑论证，我们可以用一种类似于证明数学运算是否正确的方法去证明我们解决问题的答案是否正确。根据第二种解释，它意味着一种过程的存在，这个过程可以让我们找到某些问题的答案，并且同时可以产生一个论证来证明这个解决问题的答案是正确的。

在最强水平的解释上，莱布尼茨的上述假设意味着一个过程的存在，这个过程可以允许我们解决"依赖推理的"任何问题，并且同时能够提供一个论证来证明这个解决方法是正确的。

现在看来，毫无疑问只有最强解释与莱布尼茨的目的相一致。在莱布尼茨看来，代

---

① Descartes，1842，pp. 524-525.

② Couturat，1903，p. 28.

数方法并不是一种创造术,因为它不能解决每一个代数问题。

莱布尼茨的假设需要一个一般性的解决方案,它就是我们现在所说的决策问题。对这个问题的一般性解决方案能够使那种同时具有启发性和论证性的理想方法得以完美实现。现在,在哥德尔看来,如果决策问题不容许一种有效的一般解决方案,那么我们必须重新唤起信心要实现这样一个目标,并且接受方法论的二元论,这点我已经在27部分的开始提到。

29. 更基本水平的坚持:阿基米德的方法

数学方面的科学进步体现在两个非常不同的形式中。一方面新发现让我们掌握了新的技术方法,可以让我们去探索以前无法接受的一些问题。另一方面有些发现却帮助我们加深了我们的理论认识,它可以使我们有可能去完成更加全面严格的论证。微积分的发现是一个纯粹的技术进步的好例子,这个发现并没有加强数学的理论结构,甚至相反,它影响到了希腊几何学已经获得的严格水平。

戴德金(Dedekind)的自然数理论是纯粹理论进步的一个很好的例子,这个理论几乎没有扩展我们的技术方法,但是它却加深了我们对算术基础的理解。

但是,在我们感激微积分和自然数理论给我们带来的好处的同时,我在这里只想分别考察它们的短期影响。对于微积分来说,数学家们曾经在一定程度上拒绝对微积分的讨论,这是十八世纪数学分析的一个特点,当时的数学家们不遗余力的要为数学重筑坚实的基础。在最后的分析中,戴德金的自然数理论就从属于这个运动。另一方面,这个理论以及其他有类似特点的数学理论开创了对数学的变革,这也证明了这些理论是非常有用的,即使是用自然科学和技术的实用观点来看也是如此。整体来看,在理论和应用两个方面数学都取得了很大的进步。

我刚才所描述的数学的发展并不是一个特例。因为芝诺(Zeno)悖论的引入以及对无理数的发现,希腊数学家已经经历了"基础的危机"。数学基础危机的度过多亏了克尼杜斯的尤得塞斯(Eudoxus of Cnidus)的努力。尤得塞斯的比例理论允许我们用穷尽法来替换希腊几何学家所使用的原子方法,而穷尽法是一种被当代数学家所使用的严格的方法。

从心理学的观点来看,有意思的是原子方法尽管有自身的矛盾性,但是它从来没有被抛弃。

这个方面,我们必须首先要提到的是,那些不是数学家的作者对原子论的使用。高德诺·布鲁诺(Giordano Bruno)的思想就是一个典型的例子。

我还必须要提到由卡瓦列里(Cavalieri)所发起的数学原子主义的复兴,这一活动对于微积分的早期发展产生了重要影响。

最后我要提到的是,在实际的数学研究中以及教学中,甚至在我们的日常生活中,

我们都在使用原子论的方法。其中的一个典型事例是阿基米德的方法中所描述的，这个例子是 1906 年海伯格(Heiberg)所发现的。阿基米德在他的前言中强调了论证方法和启发法之间的差别。论证方法是他在其他作品中所用到的方法，而启发法则是他目前所揭示的方法。启发法使得阿基米德发现了著名的结果，也就是在事件出现之后他才能对事件给予论证。

格伦鲍姆 (Grünenbaum)①发现，康托尔的集理论允许对原子方法进行修正。但是对我来说，这种方法是不公正的。为了解释我的异议，有必要尽可能清晰地表达出原子方法的一些原则，如下：

Ⅰ. 连续的空间(线段，表面，实体)是由原子所组成的，原子是同类的空间，所以对连续空间的测量(长度，面积，体积)只能通过测量它所包含的原子来获得；

Ⅱ. 要获得原子的总和，我们默认原子的总数尽管非常大，但却是有限的，所以我们只需要去数那些原子；

Ⅲ. 但是我们对原子的总数没有最终确定。

原则Ⅰ和原则Ⅱ解释了原子方法的效果；原则Ⅲ只是让我们避免了悖论。现在看来，很显然原则Ⅰ和原则Ⅱ与集理论的原则是不相容的。

数学家们继续使用原子的方法这一事实产生了两个明显的问题，这两个问题对于数学思维心理学是非常有价值的：

(1) 为什么那些在解决问题的过程中运用完美方法的数学家要继续使用原子方法？

(2) 为了获得正确的结果，他们运用这种方法能够得到什么？

从根本上来说，这两个问题只是更一般问题的两个具体方面，即数学家们接受我们在 27 部分讨论的方法二元主义，其心理学的解释是什么？

30. 新颖的思想：创造还是发明，建构还是发现？柏拉图主义的回答：弗雷格，康托尔和埃尔米特(Hermite)

为了回答这个问题，我们必须要考察柏拉图主义对于数学发展的影响。

在柏拉图主义看来，数学本身考虑的问题是那些超越物质世界的课题，因此，人们的感觉和知觉是无法感知到这些数学课题的。所以数学不能以实验数据为基础，它只能通过推理来得到发展。因此，推理方法是适合于数学科学的唯一方法，实验数据能够矫正错误的论证过程，但是由于实验数据的缺乏，强迫我们在数学中只能接受论证，通过论证可以满足最严格的逻辑规则。

假定我们对柏拉图之前的数学知之甚少，我们不知道是不是柏拉图把数学描述成

---

① Grünenbaum，1953.

他所知道的那样，或者说数学家们是否在遵守着柏拉图的戒律。但是毫无疑问的是，从流传至今的伟大的希腊数学家的经典作品来看，他们心甘情愿地与柏拉图的戒律保持一致，并且其他一些诸如数学本质的概念对于希腊数学的发展影响甚小。怀疑论者和享乐主义者并没有给数学家推荐一种新的方法，相反却把自己局限于与数学科学的论战之中。

从17世纪开始，哲学家们提出了关于数学本质的一些新理论以及一些恰当的方法：直觉主义、经验主义、实用主义、唯名论及其他。但是这些理论对于数学的影响非常小，数学家们比以往更加紧密地遵循着传统的方法论。这个运动的领导者，诸如康托尔和弗雷格，在这样的背景下唤醒了柏拉图哲学，博尔扎诺(Bolzano)表现出了同样的倾向性。埃尔米特的态度正如庞加莱所描述的那样非常奇怪：①

“在柏拉图意义上而言，我从来没有见过一个比埃尔米特更有现实主义数学精神的数学家，并且我必须承认我从来没有见过对康托尔主义的批判有超过埃尔米特的。在他那里可以看到明显的矛盾性，他反复出现的乐此不疲的行为越发表明了他的矛盾性，我是一个反对康托尔的人，因为我是一个现实主义者。他批判康托尔创造了而不是发现了数学客体。毫无疑问，因为他的宗教信仰，他认为进入一个只有上帝才能进入的领域是对上帝的大不敬，因为进入这样一个领域就意味着我们无须去等待上帝为我们一件一件揭露事物的神秘面纱。他对自然科学和数学做了比较，自然科学家试图去预言上帝的秘密而不是去实验研究，在他看来这些自然科学家不仅仅自以为是，他们还对神圣的上帝缺乏一份敬意，康托尔主义者似乎也在以同样的方式在数学领域做着同样的事情。这就是为什么在行动上他是一个唯心论者，而在理论上他是一个实在论者。对我们而言，有一个实在需要我们去认识，它在我们之外并且独立于我们，但是对它所能够达到的认识却依赖于我们自己本身，这个过程并不是一个渐进的过程，并不是一个一系列探索活动组成的小步骤组合起来所能完成的事情。剩余的世界是真实的，但却永远是不可知的。”

但是，埃尔米特的柏拉图主义并没有转化为一种哲学态度，而是对深刻的物理事实感兴趣，这一事实的出现方式与庞加莱对埃尔米特的外部行为的描述有着很大的反差。② 他通过观察发现几何学有下列几个特征：

“当他在谈话的时候他一直很兴奋，他似乎找到了外部的问题所在，现在他要用他的手指摆出各种姿势来研究他的问题，最终他明白了并且他将要描述，这就是为什么他把手摆出的姿势称作是帮助他的一种工具……”

庞加莱继续写道：

“对埃尔米特来说矛盾是常态，他的眼睛似乎在避免与世界的接触。对他来说，不

① Poincaré, 1913, pp. 160-161.

② Poincaré, 1905, pp. 14 and 32.

是外部世界，而是在观察内在世界时，他看到了真理。

……

当你与埃尔米特交谈的时候，他从来不提那些感知觉能够觉察的观念，但是你很快会发现，那些最抽象的实体对他来说就像活生生的东西一样。他不用看它们，但是他能够感觉到它们并不是一些人为的结合体，它们有着无法描述的内在统一原则。”

毫无疑问，对于埃尔米特以及其他许多的数学家而言，柏拉图主义表达了一种物理真实性，这显然并没有证明柏拉图主义，甚至是柏拉图主义的数学概念也没有被证明，这一事实本身就包含了真理。数学领域的一些新颖的研究成果，有时候被称作创造或者是发明，有时候被称作建构或者是发现，这一事实经验本身就说明数学经验是多重的。

对我而言，数学思维的真正科学的分类学必须建立在经过验证的心理学的方法之上，它可以为我们提供一个数学经验多重性的适宜的表达形式。如果缺乏这个数学思维分类学，那么将很难对内省经验给予一种或多或少内在统一的解释。只有通过这个分类学，数学家们才能为我们提供数学思维真正本质的话题。

第五章 直觉结构与形式化的数学

31. 空间知觉：康德，赫尔姆霍兹（Helmholtz），克莱因（F. Klein），尼克德（Nicod），怀特海（Whitehead）和塔斯基（Tarski）

我们发现在纯数学思维、推理方法和柏拉图主义之间存在一种预存的和谐性，三者之间的联合是如此稳固，以致我们很难认为这是一种偶发的、历史性的结合结果。

但是，我刚才提到的三种成分并不是决定数学发展的仅有的成分，数学家也从来没有停止使用过启发式方法。尽管数学家在呈现一个调查的确定结果时，启发式方法经常被数学家排除或者是掩饰，并且毫无疑问，空间直觉经常用到启发式方法。

抽象数学所关注的课题大多是空间直觉所不能涉及的，所以也许人们会说抽象数学的发展将会终止数学家对空间直觉的利用。很显然，现在看起来在抽象数学的研究中没有人能够拒绝去利用空间直觉来提高论证力，但是即使在抽象的讨论中，我们也没有办法阻止自己去利用空间直觉。所以即使是在最精确的论文中图示法还是必不可少的。

下文我们要讨论对空间直觉角色质疑的另外一种想法。例如，在欧几里得的《几何原本》（*Elements*）中，他的论证几乎无一例外地或多或少留有非常认真的空白部分。没有人怀疑古代的几何学家或多或少总是利用空间直觉来填补空白。现在，这种做法使得他们从来不会接受错误的定理。那么，我们的问题是，空间直觉对于纯数学是不是一种可靠的资源？当代数学家是否通过拒绝使用这样一种资源而从那些绝对必要的信息里错误地走了出来，或者，他们在无意识地使用这些信息？

根据康德的可信的理论，正如我们在第一章所分析的，后面一种假设是正确的，只是在表面上看来，几何学的发展是从提出公理出发然后通过对新的定理的形式推理而得到发展的。而实际的情形是，我们以纯粹的空间直觉来建构越来越复杂的图形，而这些图形的性质进一步以定理的形式表述出来。但是，我们发现这个理论是错误的，并且康德所设法解释的数学论证的某些特殊的特点与我们所发展起来的推理方法的基础概念完全相符。结果是空间直觉的作用能够被限制在对选择几何公理予以提示或者对选择的正确性予以证明。这种思想被人们毫无异议地接受，并且一直可以追溯到康德那里。

但是，在几何学的历史发展中，空间直觉扮演了更加重要的角色，这个事实到现在依然是真实的。我们必须解释这一奇怪的事实，那就是借助于空间直觉而产生了定理，而定理的可靠性只能由后来的形式推理所确认。

数学中与空间直觉的角色相关的更加充分的概念的发展，尤其是在几何学中，首先是由赫尔姆霍兹①对这一过程进行了考察，他的研究至今非常有名。我们必须清楚，对我们来说还有两个问题：

(1) 确定空间直觉在几何中能够并且必须发挥什么角色；

(2) 需要解释的是，事实上有时候空间直觉发挥着更加重要的角色，而不是引导我们直接走向错误的定义。

在赫尔姆霍兹看来，我们习惯上称之为空间直觉的东西是由一些异构成分组成的。其基本的成分是先天的，它能够让我们的空间经验自动地加以组织。这种组织过程引入了一些补充的成分，这些附加成分后来与先天的成分进行合并，并在一定程度上与它们的自明性相融合。

欧几里得公理表达的是先天成分与经验成分的同时性。相反，一个好的公理应该只表达的是先天成分。这样一个公理将不再从种类上确定空间的结构，也就是，空间的几种结构仍然与内在成分的群集是相一致的、相融合的。

基于经验的附加公理使得我们能够确定与实在性相一致的特殊结构。

毫无疑问，赫尔姆霍兹的观点在整个结构上是非常精确的，但是他的观点也经历了一定程度的修正。庞加莱曾经指出，在原则水平上，经验不可能决定对特殊空间结构的选择，反而是方便性起了一定的决定作用。

确定几何的公理性是一件非常有趣的事情，几何所强调的是先天成分、经验成分和习俗三种成分的不同的作用。但是，要确定这样一种公理性也是相当不容易的。帕斯卡和克莱因早就指出，不同的公理化过程所产生的概念对于纯直觉（其特点就是先天成分）和经验直觉（通过获得经验成分从纯直觉发展而来的）是无法接触的。单纯的直觉包含了纯直觉以及经验直觉，单纯的直觉有一种一般性质，它不会使我们去操纵诸如点、线、面这些纯粹的几何意义上的概念。

我们习惯上认为，这些概念是从直觉概念本身出发，然后通过抽象或者是理念化过程所获得的。在这个思想基础上，我们认为没必要去深究我们是从哪里获得这些概念的，以及如何获得的。真正重要的问题是，我们一般都假定在我们开始建构纯粹的公理性之前这些过程已经发生了。所以，公理性需要通过基本概念的方法，而这些基本概念对于单纯直觉来说是无法获得的，所以那些需要这些概念的公理仍然具有非直觉的特点。

为了避免这个缺点，有必要通过基本概念的方法来接受那些拥有更多基本性特点

---

① Helmholtz, 1923.

的概念。表达先天成分的公理必然只接受那些对纯直觉来说可以接受的概念。那些表达经验成分的公理也许包含一些对经验直觉可以接受的概念，但是对于纯直觉来说则不然。最后，我们要借助于习俗成分来填补空白。

威尔斯汀(J. Wellstein，1905)，怀特海(A. N. Whitehead，1919，1920)，尼克德(J. Nicod，1924)和塔斯基(A. Tarski，1927)已经对这种公理化进行了发展。作为一个例子，我在这里要讨论的是塔斯基的系统。

"论域"是由欧几里得空间(Euclidean space)的所有的固体所组成的，这些固体可以被看作是个体的，而不是点的集合。基本的概念是(1)部分对于整体的关系，这种关系被运用于固体；(2)球体的概念，它是一个单个的固体。

塔斯基认为这两个概念足够来定义两个同心球体之间的关系。他对几何的点的定义是：所有的球的集合，它们与一个特定的球是同心的。然后他定义了关系 I，这种关系存在于点 a，b，c 之间，当 a 与 b，c 是等距的时候。现在，根据皮耶里(M. Pieri)的结果之一(1908)，概念 I 本身就能够定义欧几里得体积测定的所有概念。因此，由于概念 I 可以按照基本概念(1)和(2)来定义，所以，接下来基本概念(1)和(2)允许对欧几里得体积测定的所有概念进行界定。

至于公理，显然，我们首先需要一些部分对于整体的关系的特点，例如：

如果 X 是 Y 的一部分，并且 Y 是 Z 的一部分，那么 X 也是 Z 的一部分。

从严格的几何学意义上来讲，公理的陈述是相当奇怪的。例如，让我们从皮耶里的公理系统出发，在这个系统中，概念 I 是唯一的基本概念。由于点的概念和概念 I 可以按照塔斯基的基本概念(1)和(2)来界定，我们可以把这些概念替换为相应的定义者(definiens)来对皮耶里的公理系统进行重新表述。所以皮耶里的公理被重新表述后就有了一般性的特点。

所以公理化过程中所获得的基本特点是毋庸置疑的。部分对于整体的关系在运用于单一实体时在纯直觉的范围内也是毋庸置疑的，对球体概念的适当的增加也非常巧妙地表达了通过经验直觉所增加的信息。具有部分对于整体关系性质的公理也是非常基本的。

总之，几何公理本身通过基本概念(1)和(2)来表述，在"原则上来说"是最基本的。在欧几里得球体测定的"标准"表述中，这些公理将是涉及球、球的类等的艰深复杂的定理的集合。

这一结果对我来说相当令人吃惊。几何演绎推理发展必然引入了非直觉成分，也许，正如帕斯卡所说："数学思维的发展与人类的本性是相反的。"

无论如何，历史已经表明，在芝诺悖论以及涉及平行理论的困难中，希腊人通过引入一种明显具有人为特点的成分成功地建立了几何学，而在这一过程中，他们显然缺乏纯粹直觉或者是经验直觉的基础。在我们运用几何学来解决实际问题的时候，我们会遵从纯粹直觉或者是经验直觉中借来的概念所给予的限定。只有在我们试图把实用的

几何学转化为一个理论和演绎的领域时，我们才发现我们直觉概念中的内在空白，我们认为需要通过引入一些概念来填补它们，这些概念源于理论的思考，所以这些概念具有人为的特点。

所以欧几里得几何的每一个充分的公理化必须包括某些非直觉的原则，但是我们仍然有可能以恰当的方式来使它们具有"本土化色彩"。在塔斯基的系统中，基本概念和一些公理有非常强的直觉性质，非直觉的概念被列入了真正的几何公理。另外，在希尔伯特的系统中(它是对欧几里得系统的一种中性化的版本)，我们把诸如点和直线这样的非直觉概念作为一种基本概念，这就使得我们把大多数公理可以看作是高度直觉化的。只有平行的公理以及连续性的公理才拥有毋庸置疑的直觉特点。

32. 时间直觉：康德(Kant)，柏格森(Bergson)，布劳威尔(Brouwer)和德·格鲁特(De Groot)

在康德的系统中，空间和时间在本质上拥有相同的位置。空间，作为外部感觉的一种直觉形式，它同时是纯几何的基础；时间，作为内在感觉的一种直觉形式，它必须以同样的方式为算术提供基础。但是，毫无疑问，康德对于空间与几何关系的注意远远超过了时间与算术关系的研究。所以对康德与他的同时代的人而言，几何学在纯数学中是最受重视的一个分支，而算术只处于次要的位置。

在十九世纪，这种状况发生了很大的变化。非欧几何的发现影响了纯数学和空间直觉的关系，另一方面，几何学中分析方法的发展，以及分析方法的算术化倾向越来越使算术居于中心位置。但是，几何学和空间直觉的关系被认为是有问题的，由于这一看法以及抽象的、非建构性的分析方法的发展，使得数学家几乎没有任何兴趣去进一步研究由康德所提供的算术和时间直觉之间的一些线索。

在哲学方面，情况也非常不利于这种研究方向。非欧几何的发现本来引发了一些这方面的讨论，但是由于大部分哲学家的兴趣离开了数学科学，所以这些讨论也就销声匿迹了。马尔堡(Marburg)的新康德学派(The neo-Kantian school)仍然对数学抱有兴趣，这个学派在基础问题上倾向于采用逻辑学家的概念。

柏格森作为少有的哲学家，对时间直觉进行了深入的研究，他认为在时间直觉和算术之间只有间接的关系；在他看来，只能通过对时间进行空间化才能够描述它们之间的关系，而这种空间化显然已经扭曲了时间直觉。

只有布劳威尔认为时间直觉和纯数学之间有着紧密的关系，他在自己的直觉主义的计划[①]框架中重塑了现代数学。布劳威尔像接受欧几里得几何那样接受非欧几何，他认为几何学与空间直觉的关系以及几何学中运用分析方法的问题方面，几何学可以

---

① Brouwre, 1907.

保持完全的自洽。另一方面，他强烈反对形式主义者、逻辑学家、康托尔主义者以及抽象的倾向，这些都是当代数学发展的主宰。他要把数学置于直觉的基础之上，特别是时间直觉之上。这种直觉首先让我们建构了自然数的无线序列，然后建构了实数的连续体。布劳威尔后来偏离了他最初的研究计划，他用多对一的直觉代替了时间直觉。但是，这种偏离既没有影响他对现代数学的批评，也没有影响他建构自然数以及实数连续体的方法。

最后，我们应该注意的是，布劳威尔仅仅从公理出发，放弃了建立连续体理论的传统方法，他所使用的公理是（或者被认为是）对直觉所提供的某种连续体的描述。连续体的直觉主义理论是对更加基本的直觉数据所建构的连续体的描述（这些数据来源于多对一的直觉）。这是布劳威尔和他的反对者喜欢采用的一个步骤，这个步骤之所以非常重要是因为直觉连续体的结构过于弥散，以至于无法对它作为公理系统来进行描述。

直觉空间连续体的弥散结构将通过第 31 部分对我们利用人工成分的讨论进行说明，至于直觉时间连续体，回顾一下柏格森对这个问题的讨论就足够了。

在这样一个背景下，讨论德·格鲁特（J. de Groot）的观点是非常有意思的。德·格鲁特假设作为现象学数据的经验 B 有（日常术语）一种特定的持续性。也就是说，把它看作一种相互联系的经验是一种自然的现象，而无须意识到时间上的中断。这样，经验 B 的一部分就允许偏序：如果 B_1 和 B_2 是 B 的组成部分，那么有可能 B_1 要先于 B_2，有可能 B_2 先于 B_1，或者是两种情况中哪种情况都不是。

两种经验 B 和 B' 的交集要么是空集，要么是经验 B''。如果不是空集，那么另外有四种可能性：$B''=B'$ 是 B 的一部分，$B''=B$ 是 B' 的一部分，$B-B'$ 先于 B'' 以及 B'' 先于 $B'-B$，或者是 $B'-B$ 先于 B''，并且 B'' 先于 $B-B'$。

由于这些原则是从时间直觉的现象学中借用而来，所以抽象数学为建立日常意义上的时间顺序提供了方法。事实上，从所有的经验以及经验的组成部分所提供的偏序出发，我们可以建构这个集的某些子集之间的某种顺序关系。例如，如果我们只考虑同一个经验的所有部分的子集，那么我们获得的顺序是一种线性顺序。但是，如果我们考虑的是一个更大的集的子集，那么我们所认可的那些原则就不能保证线性顺序的存在。如果我们假设来自于建构的顺序是线性的，那么我们依然不一定能够发现连续的顺序，因为存在许多其他的可能性。

现在我们可以回到利用空间和时间直觉的问题上。事实上，这种利用是可能的，尽管还没有证明它，只要它与直觉连续性的一般特点有关系。例如，在欧几里得空间和非欧空间中发现的空间连续体的一般特性是：这些特性通过外在或者内在的欧几里得几何或者非欧几何中不同系统的公理表达出来。所以，为了把这种特性运用到几何论证中，我们可以求助于欧几里得或者是非欧几何的某些公理，或者是仅仅求助于空间直觉。

显然，在实际的数学研究中，我们只提到了空间直觉。一般而言，几何学家的经验

可以让他们避免这些陷阱,这些陷阱就是这些过程之中内在的一些陷阱,因为我们不总是知道我们是否真正的在研究一般性的特性。毕竟,这一过程具有启发性和非论证的特点。所以,我们获得的结果只有通过严格的论证才能够被确认。

33. 基于希尔伯特(Hilbert)的有限直觉以及无限论的无限直觉

现在让我们假设欧几里得几何的某一个公理已经以严格的方式得到了证明。现在我们已经获得了几何命题的有限序列,这一序列(1)以一定数量的前提公理和定理开始,同时(2)通过运用某个演绎推理的规则,每一个后续命题都来自于某些前位命题,并且(3)序列以所讨论的定理结束。为了判断这个论证的效度,我们必须证实条件(1)—(3)。现在,我们可以用下面两种方式来证明它们:(A)只是通过简单的检查给定的一系列命题;(B)在形式上论证那些序列能够满足条件(1)—(3)。

如果我们偏向于方法(B),那么我们必须判断方法(B)所需要的形式论证的效度。这一方法也许可以通过方法(A′)和(B′)等来实现。因此,如果我们想要避免无限回归,我们必须把我们的论证限制在直接证明中。

这种直接证明的方法意味着要利用直觉。如果论证是以书面的形式,那么我们必须要利用空间直觉。因为论证是否以有穷格局的形式出现并不重要,所以论证只能利用空间的一般特性。在这里我们有一种非常有特点的例子,那就是希尔伯特学派(Hilbertian)所称之为有限论直觉的理论。

这种有限论直觉首先能够让我们直接证明形式论证的正确性或者数学计算的正确性。这种对直觉的运用一般只产生一种特殊的结果。但是,在希尔伯特看来,有限论直觉还可以让我们获得某种具有一般意义的简单结构。我想通过一个例子来说明他的观点,让我们来看下面的形式系统。

公式:A 和 B 并且,假如 X 和 Y 是公式,并且 $X \vee Y$。

公理:$A \vee A \vee A$

推理规则:

$$\text{(i)}\ \frac{X}{X \vee B} \qquad \text{(ij)}\ \frac{Y \vee A \vee A}{Y}$$

(Ⅰ)公式 $A \vee B \vee B$ 是可推理的。

论证。所讨论的公式的推理如下:

$$\begin{array}{ll} \text{(ij)} & \dfrac{A \vee A \vee A\,[\text{ax}]}{A} \\ \text{(i)} & \overline{\qquad\qquad} \\ \text{(i)} & \dfrac{A \vee B}{A \vee B \vee B} \end{array}$$

(Ⅱ)公式 B 是不可推论的。

论证。我们要对公式 B 进行推理。

(1) 如果从规则(i)开始,我们将得到公式 $A \vee A \vee A \vee B$,并且每一个后续使用的规则(ij)将被排除在外。所以在公式的开始我们决不能够去掉字母 $A \vee A \vee A$。

(2) 我们的唯一的可能性将是把规则(ij)运用到公式 A 导出的地方。下一步我们只能把规则(i)运用到公式 $A \vee B$ 导出的地方。这样我们就可以在开始部分有可能去掉字母 A。

因为我们没有穷尽推理的各种可能性,所以可以得出结论认为公式 B 是不可推理的。

(Ⅲ) 每一个公式 $A \vee B \vee \cdots \vee B$ 是可推理的。

论证。首先我们把规则(ij)运用到公理,也就是 A 的出处。然后我们把规则(ij)运用到公式 $A \vee B \vee \cdots \vee B$ 中,运用的次数与字母 B 出现的次数一样多。

尽管对定理(Ⅲ)的论证同时与公式 $A \vee B \cdots \vee B$——这个公式在数字上是无限的——有关,但是它拥有(a)直觉特点,因为这个论证过程——给予这类公式中的每一个公式一个指示以便我们给每一个特殊的公式一个推理——分别处理每一个公式 $A \vee B \vee \cdots \vee B$,以及(b)有限论的特点,因为它无论如何也不能产生一个无限的概念。

有趣的是我们可以比较一下对于定理(Ⅲ)的论证与对以下定理的论证:

每一个逻辑实体可以被追溯根源,

这是第三章第 23 部分的一个定理。尽管在两种情况之间有明显的类比,但是这个论证并不具有有限论的特点,因为它产生了无限的概念。但是,看起来在 23 部分所给出的论证包含一个规定,它可以使我们推导出任何一个逻辑同一性,因为我们可以通过建构逻辑同一性的语义表单来确切地发现一个推理。但是在这儿两种情况之间仍然有巨大的差别。在定理(III)的论证中,所给的规定与给公式 $A \vee B \vee \cdots \vee B$ 的演绎的长度恰好相符。相反,在第 23 部分的过程论证中,论证过程并没有告诉我们一个逻辑同一性的论证长度,我们只知道语义表单的长度不是无限的。

如果我们想对 23 部分所提供的那类论证赋予直觉的特点,那么必须假定无限直觉的存在,这样就超越了希尔伯特的有限论直觉的限制。

这样一种直觉毫无疑问会得到布劳威尔学派直觉主义者的认可,这个学派一方面只接受数学论证中存在直觉的特点,另一方面他们又不愿意接受对有限直觉论所加的限制。但是布劳威尔给予无限直觉的自由仍然是相对适中的。

康托尔主义已经提出了一种更加有力的直觉。

我们应该注意到,当我们要求每一个论证应该有直觉的特点,并且同时我们想要超越有限论直觉的限制时,在这种情况下无限直觉的假设才被运用。即使我们不能给每一个论证赋予直觉特点,我们也极有可能认为存在有限直觉并且接受非有限论的论证。

如果我通过表达自己对这个问题的看法来结束这个方案,那么问题就会变得更加清晰。在我看来,在我们解决问题的时候我们有一个有限论的直觉,它是必需的并且是可靠的。我们也有一些直觉,它们超越了有限,但是这些直觉太模糊并且变数太大,我

们不能通过它们的直觉意义来判断非有限论数学的正确性。非有限论数学构成一种有限论数学的人为的外推法。

这种外推法来源于不同因素的相互作用:直觉数据、运用于各个领域时的要求、逻辑学危机、数学既成理论产生的问题。这种相互作用首先表现出来的就是数学基础的危机,然后这种危机逐渐又转化为一种新的数学种类。

34. 柏拉图哲学作为真实或者虚幻的直觉观:唯名论者的批判

康托尔回忆录中的名言非常清楚地表达了他思想中的柏拉图主义灵感:

我们并没有根据自己的判断为智力或者其他事物立法,我们只是像忠实的抄写员一样,面对自然之声所宣布的律法,我们只能接受和做好记录而已。①

在埃尔米特(Hermite)的作品中我们也发现类似的态度:②

“如果我不是错的,那么就存在一个世界——这个世界包含了所有的数学真理,对这样一个世界除了通过智慧我们无法接触它,就正如存在一个物质实体的世界,这两种世界都与我们相独立,这两种世界都是天才的非凡的创造的结果,这个世界对我们来说如此的不同,那是因为我们智力上的缺陷,而对于一个智慧的大脑来说,这两个世界其实就是一个世界,对这两个世界的综合其实就是对抽象的数学与天文学以及物理学的各种分支的一种综合。”

弗雷格(Frege)——“曾经认识到了一个客观的、非真实的领域”——用一种同样令人吃惊的方法表达了类似的观点③:

“不!数学家不能武断地制造出任何东西,与地理学家相比,他们丝毫没有更多的权力去凭空制造出东西。像地理学家一样,数学家只能去发现已经存在的东西并给它命名而已。”

这三位数学思想家达成一致,他们认为在实体领域存在一种直觉,它可以超越有限的领域。从其他地方来引用类似的证明材料也不是什么困难的事情。但是,康托尔的情况无疑是最有趣的,因为他所描述的版本后来得到了发展,通过他自己的作品以及后人的发展,他描述的版本变成了伟大的崇高的理论,这一理论成了当代数学的重要基础。

作为现存数学的外推法,集理论是一个例外。例如,把复数合并到整个数学中的确也是一个重要的外推法,并且完善这些理论基础导致了复变函数理论的快速发展,但是

---

① 我们也非根据自己的判断来为我们的智力或者万物确立规律,而像忠实的抄写员,我们只是洗耳恭听并如实地记录那些自然自身生成并昭告的律令而已。(Cantor, 1895.)

② Lallemand, 1934, p. 192.

③ Frege, 1894, pp. 107-108.

迈出这一步是以长时间的试误法为基础的。相反，康托尔一次性地揭示了新的数学实体的所有内容，而他却无须太多的准备工作。

康托尔所坚持的柏拉图主义的理论与他的数学理论相混合并没有取悦任何人，数学的悖论基础的发现(参考第三章第17部分)似乎证明了许多数学家对于集理论学家的方法缺乏信心的看法是正确的。但是，既不影响理论的核心，又能消除数学基础的悖论，这种可能性使得它的批评者与柏拉图主义者提出的成分之间实现了和解。最近的情况表明，唯名论者有可能对理论进行重构，但是唯名论者的集理论有非常强的人为的特点。①

从心理学观点来看问题似乎更加有趣，我们通过这个观点对于康托尔的直觉观可以获得一些更加精确的了解。毫无疑问，在这个问题上我们不能怀疑康托尔的真诚态度。一方面，康托尔极有可能在他本人的研究中也被一种相对清晰和明确的直觉所引导。另一方面，我们要承认一种无限直觉的真实存在。一般意义上而言，这种直觉是模糊而充满变数的，但是这也绝不能排除一种可能性，即康托尔在全神贯注于某件事的时候，他的头脑中有一些极度准确的、清晰的、稳定的意象。在这种背景下，我们可以考虑那些高级别的、井然有序的集合的意象。但是，我们很难相信通过种类Ⅱ中的序数可以形成井然有序的、适当的直觉意象的可能性。

因此，集理论的发展极有可能是被恰当的意象所激发的，但是很难相信存在针对所有实体的一种直觉观。并且，如果康托尔认为他有这样一个直觉观，那么他肯定是幻觉的牺牲品。

① Gödel, 1944.

第六章 “思维机器”与数学思维

35. 形式化与“思维机器”的建构

在对逻辑学和数学的形式化的反对意见中，其中有一个最普遍的说法认为，这种形式化将会把逻辑思维或数学思维简化为一种纯粹的数学运算，进而会让人们建构一种“思维机器”，它能够代替逻辑学家和数学家。如果接受这种替换的可能性，那就意味着我们要否认逻辑思维和数学思维的原创性，所以这一点与我们的经验是不相符的，在我们的经验中解决数学问题是需要创造思维的。

为了评估这一反对意见，有必要深入地研究形式化与建构“思维机器”之间的关系。

很显然，现在如果能够建造这样一种“思维机器”，那么就意味着逻辑学或者数学可以被完全形式化，这种“思维机器”在许多种类问题的解决中可以代替逻辑学家或者是数学家。

令 P 是正在讨论的问题的类。通过假设可知，问题 P 至少可以提交给逻辑学家或者数学家，所以它也必然可以提交给一个机器，因此必然有可能通过特定的编码对问题 P 用公式来表达，而那些编码可以允许把问题 P 转化为机器能理解的语言。

现在，如果逻辑学家或者是数学家能够解决问题 P，机器必然同样也能解决这个问题，并且那些编码必然能够让我们理解机器产生的解决方案。

最后，由于我们只能从逻辑学家或者数学家那里获得一个答案，这个答案只有他们能够证明，那么这种方法必然允许机器来证明它所得出的答案。因此，我们能够确立一种恰当的形式化，我们要求逻辑学家和数学家也用同样的方式来表达他们所面对的那类问题，我们还要求通过编码——必须要适应“思维机器”的建构——的方式来提供问题的答案并为这些答案提供证据。

在把这些编码提交给逻辑学家和数学家的时候，我们没必要去限制他们解决这类问题的能力。令 P' 是他们以前能够解决问题的种类。根据假设，因为机器能够在这方面代替逻辑学家或者数学家，机器同样能够解决问题 P' 并且能够证明它所得出的结论。现在，机器只运用编码，并且这个编码能够让它表达和证明由逻辑学家和数学家提供的答案。

36."思维机器"的建构意味着对关键问题的解答

现在,让我们假设对某一个特定的问题 P,机器并不能提供一个答案。那么从我们的假设出发,问题 P 就不可能被逻辑学家和数学家曾经解决过,因此问题 P 是无法解决的。

在这种情况下机器将会如何做出反应?在这儿我必须区分问题的两种类型 C。

(Ⅰ)如果我们给机器类别 C 的一个问题 P,它是无法解决的,那么经过一定数量的徒劳无功的努力,机器停下来了;

(Ⅱ)如果类别 C 的一个问题 P 是不可解决的,把它提供给机器,也许机器从来停不下来。

这两种情况必须分别来讨论。

ad(Ⅰ):在这种情况下,问题 P 的类别 C 可以很方便地被替换为问题 P° 的类别 C°,它可以这样来表达:

P°:解决类别 C 的问题 P 或者是其他,如果这种情况出现,表明问题 P 是不可解决的。

现在我们的机器允许类别 C 的每一个问题 P° 得到答案。令 P° 是类别 C° 的一个问题,我们把对应的问题 P 提交给机器。那么,机器要么得出问题 P 的答案,要么停下来而没有得出答案,在两种情况下问题 P° 都被解决了。

我们也许要问,在第二种情况下问题 P° 的答案是否被完全证明了。现在如果我们怀疑这个答案的正确性,这就意味着我们承认类别 C 的问题 P 有一个答案,这个答案并不是机器所发现的。但是我们已经把这种可能性排除在外了。

ad(Ⅱ):在这种情况下,用类别 C° 代替类别 C 是无用的。只要机器不停止运行,我们就既不知道问题 P 的答案也不知道问题 P° 的答案。

下面用一个典型的例子来说明这两种情况。

例(Ⅰ)。我们来考察所有问题 P 的类别 C:

推导出公式 X,

其中 X 是第五章第 33 部分讨论的形式系统中的任何一个公式,我们可以很容易想象一个机器可以解决这类的问题。这个机器将首先尝试去掉末尾的字母 $\vee B$,然后它会设法在末尾加上字母 $\vee A \vee A$;如果最后仍然是 $A \vee A \vee A$,那么可以通过撤销这一系列操作而做出推理。如果最后结果不是这样,机器停下来,问题没有解决。但是机器对所有问题给出了一个完整的解答:

P°:推理出公式 X,或者是其他,如果那种情况出现,说明公式 X 无法被推导出来。

例(Ⅱ)。另外,我们考察所有问题 P 的类别 C:

P:论证 U 是一个逻辑同一性,

其中 U 是第三章第 22 部分所描述的类别中的任何一个公式。

在这种情况下，我们可以想象一个机器可以建构序列 Φ/U 的一个语义表单，但是也许可能发生的事情是建构过程无限期地持续，而我们始终不知道那个问题能否被解决。

我们已经把问题 P 的类别 C 替换为问题 P° 的类别 C°，现在我们发现通过引入所有问题 $P^{\circ\circ}$ 的类别 $C^{\circ\circ}$，情况将变得更加简化。

$P^{\circ\circ}$：对问题 P 能否被解答给出答案，其中 P 是类别 C 的任何一个问题。

在情况（Ⅰ）中，机器可以让我们解决类别 $C^{\circ\circ}$ 中的每一个问题 $P^{\circ\circ}$。现在让我们假设有第二个机器，建构它的目的只是为了解决类别 C 的问题。我们发现这样一个机器与第一个机器相比并没有什么差别。

让我们假设第一个机器处在情况（Ⅱ），所以有时候当类别 C 的一个问题无法解决时，这个机器持续工作不会停下来。我们首先发现，按照定义，第二个机器是不会有这种缺点。事实上，假设让机器去解决某一个问题 $P^{\circ\circ}$，第二个机器一直工作不会停下来。然后相应的问题 P 无法解决，因为如果能够被解决，那么第二个机器将不得不停下来说明 P 是可以解决的。但是如果 P 是无法解决的，那么根据假设，第二个机器也应该停下来说明 P 是无法解决的。所以在任何情况下，第二个机器必须要停下来。

现在看来第二个机器的这一特性可以让我们来改善第一个机器。我们可以用下列方式来把两个机器结合起来，在第一个机器中引入问题 P 将自动地在第二个机器中引入对应的问题 $P^{\circ\circ}$，当第二个机器停下来宣布问题 $P^{\circ\circ}$ 是不可解决的，这样就可以引发第一个机器在同一个时间停下来。所以，第一个机器被改进后我们可以回到情况（I）。相反，对于种类 C 的问题 P，建构改进的机器是不可能的，那是因为建构种类 $C^{\circ\circ}$ 的问题 $P^{\circ\circ}$ 的解决机器是不可能的。

总之，我们发现，如果我们有一个解决种类 $C^{\circ\circ}$ 的问题 $P^{\circ\circ}$ 的机器，我们就不需要解决种类 C 的问题 P 的机器。需要强调的是，我们并不满足于一个神谕，我们需要的是一个真正的机械装置的机器，我们应该明白它的工作原理，这样我们就可以确保这个机器能够解决种类 $C^{\circ\circ}$ 的所有任何问题 $P^{\circ\circ}$，并且它的所有答案总是正确的。在问题 $P^{\circ\circ}$ 的答案是否定的情况下，这就意味着机器必须尝试各种可能性来得到问题 P 的答案；对于一个需要证明的肯定答案来讲，机器必须事先以某种方式证明问题 P 的答案是正确的。也就是说，如果机器宣称问题 P 可以被解决，那么对于机器的运算过程的检查必须能够让我们来解决问题 P。

因此，研究能够解决种类 $C^{\circ\circ}$ 的各种类别问题的机器的建构问题就足够了，换言之，问题的答案应该表达为“是”或“否”。

进一步而言，在我们掌握一般方法来解决类别 $C^{\circ\circ}$ 的任何问题 $P^{\circ\circ}$ 之前，建构解决类别 $C^{\circ\circ}$ 的机器就不可能实现。这个机器只能把我们从机械的劳动中解放出来，因为在使用这个机器之前我们总是用这个方法来解决特殊的问题 $P^{\circ\circ}$。

确立一个一般性的方法来解决类别 $C^{\circ\circ}$ 的每一问题 $P^{\circ\circ}$，这个问题被称作是类别 $C^{\circ\circ}$ 的决策问题。现在，这部分的讨论结果是一种高效机器的建构[这种机器并不产生情形(Ⅱ)的复杂情况]，可以让我们解决某一个种类 C 的每一个可以解决的问题 P，其前提条件是相应种类 $C^{\circ\circ}$ 的决策问题已经被解决。

37. 布劳威尔的"从目标跳到方法(leap from end to means)"的不可约简性

在 1907 年的博士论文《论数学的基础》中，布劳威尔以下列方式表达了从目标跳到方法的不可约简性的原则：

"人类的大部分行为倾向于尽可能多地考虑数学顺序(或者是因果系统)，但事情看起来似乎是我们按照这个序列中的较早的成分，而不是按出现较迟的成分来行动，我们也许会得到好的结果，其目的是为了选择每次我们遇到的第一个成分作为行为的目标，即使是第二个成分在影响着我们的直觉。(用方法代替了目标)。但是这种智力行为的非直觉性特点导致了这个系列中各种成分的一致性非常不确定，所以它经常被拒绝，这种情况通常被看作是发现'规则不再起作用'。"

在目前情况下，上述观察的意义对我来说是非常明显的。智力的成分包含解决问题，解决问题与找到解决方法是同等重要的，解决方法与可信的结果之间联系密切。如果解决问题的方法总是不可避免地受到目的的影响，那么我们总是有必要利用我们的智慧去发现达到预定目的的恰当的方法。这种想法排除了建构一个能够解决任何问题的机器的可能性。

在一定程度上，布劳威尔的思想被第 36 部分的讨论结果所证实。在那个讨论中已经表明，能够解决某一个种类 C 中的每一个问题 P 的机器可以被建构，只要种类 C 满足某些非常严格的条件，如下：

(1) 种类 C 的问题 P 以及这些问题的预期的答案都可以用某一个编码来表达；

(2) 这个编码可以允许我们表达一定数量的运算，所以，如果 C 中的问题 P 有一个答案，那么，总是可以通过运用这些运算来解决问题 P；

(3) 某一个类别 $C^{\circ\circ}$ 的决策问题可以被解决。

即使一个类别 C 满足条件(1)－(3)，那么只能在一定的意义上说 C 中的问题 P 可以在不借助人类智力的情况下被解决：事实上，只有人类的智力可以让我们(1)建构适宜的编码，(2)以恰当的方式来对运算进行计数，以及(3)解决类别 $C^{\circ\circ}$ 的决策问题。

38. 递归函数：无解问题，绝对无解性

现在我们必须要回到第 5 章第 33 部分所讨论的形式系统。很容易说明：

(Ⅳ) 所有的公式

$$A \vee B \vee B \vee \cdots \vee B \quad \text{并且} \quad A \vee A \vee A \vee B \vee B \vee \cdots \vee B$$

是可推理的，并且其他公式是不可推理的。

因此，解决所有问题的类别 $C^{\circ\circ}$ 的决策问题并不是一件困难的事情：

$P^{\circ\circ}$：回答公式 X 是否可以被推理。

现在我想说明，我们如何对形式系统的句法进行算术化，使得它与第三章第 20 部分所提出的一般性建议相一致。第一步是把我们系统中的每一个公式与一个哥德尔配数 $g(X)$ 相联系。

这一步的具体做法是，首先我们写一个数字"1"来作为开始。然后我们从左到右检查公式 X，如果我们遇到字母"A"，我们写一个数字"1"；如果我们遇到一个字母"B"，那我们写一个"0"。这些数字的书写是从左到右，第一个数字的右边是"1"。例如对于公式：

$$A \vee A \vee A \vee B$$

下列数字与它相对应：

"11110"

这个复数可以被看作是二进制中的自然数 $g(X)$ 的记号。例如，复数"11110"是数字 30 的二进制记号，所以我们有：

$$g(A \vee A \vee A \vee B) = 30$$

那么，我们可以转到为我们的形式系统赋予特点基本规则的算术化问题上。作为公式，我们发现每一个自然数 $n>1$ 可以被表征为恰当限定的公式 X 的哥德尔配数 $g(X)$。

与公理和推理规则相符合的各种规定可以通过引入函数 f 来进行算术化，该函数可以用下列方式来定义：

(1) $f(0)=f(1)=0$；

(2) $f(15)=1[15=g(A \vee A \vee A)!]$；

(3) 如果 $f(n)=1$，那么 $f(2\times n)=1$；

(4) 如果 $n>1, f(4\times n+3)=1$，那么 $f(n)=1$；

(5) 如果 $f(n)$ 仍然不能被规定(1)—(5)定义，那么 $f(n)=2$。

很容易发现，如果 n 是一个可以推理的公式 X 的哥德尔配数 $g(X)$，那么 $f(n)=1$，并且如果 n 是一个不可推理的公式 X 的哥德尔配数 $g(X)$，那么 $f(n)=2$。

刚才所做的对我们的小形式系统的观察可以提出下列算术形式。

(Ⅰ[a]) $f(12)=1$；实际上，$f(4\times 3+3)=f(15)=1$，所以 $f(3=1)$；那么 $f(6)=f(2\times 3)=1$ 并且 $f(12)=f(2\times 6)=1[12=g(A \vee B \vee B)]$。

(Ⅱ[a]) $f(2)=2$。

(Ⅲ[a]) 对于每一个 $k, f(3\times 2^k)=1$。

(Ⅳ[a]) 对于每一个 $k, f(3\times 2^k)=f(15\times 2^k)=1$，对于每一个数 $n>1, f(n)=2$。

刚才提到的类别 $C^{\circ\circ}$可以被所有问题的类别 $C^{\circ\circ a}$ 所代替：

$P^{\circ\circ a}$：回答问题 $f(n)=1$ 还是 $f(n)\neq 1$

其中，n 是我们形式系统中任何公式 X 的哥德尔配数 $g(X)$。

类别 $C^{\circ\circ a}$ 的决策问题最终是可以解决的，其条件是函数 f 的值 $f(n)$ 可以对每一个特定的 n 的值进行有效的计算。并且类别 $C^{\circ\circ a}$ 的决策问题的可解性意味着类别 $C^{\circ\circ}$ 的决策问题的可解性。

现在我们回到第 36 部分和第 37 部分开始的分析，把我们的形式系统作为一般情况的原型。在第 37 部分提出的条件(1)—(3)中，如果条件(1)和(2)没有被满足，那么就没有精确的决策问题，在这个意义上而言，条件(1)和(2)几乎是微不足道的。条件(1)和(2)是能满足我们的形式系统，因为公式本身构成了一个满意的编码，而对一个公理和两个推理规则的选择同时是对运算的计数，这些运算可以获得 C 中的问题 P 的答案。类似的数据可以用来描述问题 P 的种类 C 的特点。

因此，可以通过像刚才解释的特殊情况一样调整算术化的过程使它们适应其他的种类 C，特别是：

1. 通过算术化编码，我们把类别 C 中的每一个问题 P 与一个特定的自然数 n 联系起来。

2. 接着对运算的计数通过条件系统—对特定的算术函数 f 进行描述—进行转化；如果对应于 n 的问题 P 是可以解决的，我们将得到 $f(n)=1$；如果这个问题 P 是不能解决的，那么 $f(n)\neq 1$。

3. 所有问题的类别 $C^{\circ\circ}$：

$P^{\circ\circ}$：回答问题 P 是否是可以解决的，被所有问题的类别 $C^{\circ\circ a}$ 所代替：

$P^{\circ\circ a}$：回答问题是否 $f(n)=1$ 或者 $f(n)\neq 1$

其中 n 是一个数字，它能对最基本的类别 C 中的一个问题进行描述。例如在我们的小的形式系统中，n 是公式 X 的哥德尔配数 $g(X)$，P 需要对它进行推理。

4. 最后，当且仅当函数 f 的值 $f(n)$ 对于变量 n 的任何值可以被有效计算出来，类别 $C^{\circ\circ}$或者是类别 $C^{\circ\circ a}$ 的决策问题将可以解决。

一个满足这个条件的函数 f 被称作是递归函数。所以对决策问题的研究可以约简为对递归函数的研究，或者更准确地说，是对一个由一些特定的条件所决定算术函数 f 的递归或者是非递归特点的研究。

显然我们需要考虑界定条件的类别。现在有可能把讨论界定到一些条件上，这些条件可以通过某些形式化的 R 来表达。简单地说，可以通过对条件(I^{a})—(IV^{a})的命题中使用的术语进行考察来理解。这些条件可以以形式化的方式加以表达，包括运算＋和×的记号、指数函数的记号、等式和否定的记号、蕴涵和数量化的记号。现在这样一个记号可以使我们在一般意义上实现(1)对编码的算术化以及(2)对计数——针对解决类别 C 的问题时的运算——予以转化。

我们可以把每一个条件系统 S——可以被表达为形式化 R——与哥德尔配数 $g(S)$ 联系起来。然后我们可以引入所有问题的类别 $D^{\circ\circ}$：

$Q^{\circ\circ}$：回答问题自然数 n 是否是一个条件系统 S——可以被表达为形式化 R 并且用一个递归函数 f 进行描述——的哥德尔配数 $g(S)$。

现在我们可以用下列方式描述一个函数 F：

(1) 假如 n 是具有递归函数特点的系统 S 的哥德尔配数 $g(S)$，例如 f_n，那么 $F(n)=f_n(n)+2$；

(2) 否则，$F(n)=1$。

根据刚才所做的解释，条件(1)和(2)可以用形式化 R 来表达。令 T 是条件(1)和(2)的系统，只要它在公式 R 的标记中出现，并且令 t 是 T 的哥德尔配数 $g(T)$。我们建议限定 $F(t)$ 的值。

ad(1) 首先我们假定 t 是条件系统——描述一个递归函数 f_t 的特点——的哥德尔配数；那么必然是 $F(t)=f_t(t)+2$。但是 t 是条件系统——描述一个递归函数 F 的特点——的哥德尔配数，所以，f_t 与函数 F 相同，因为 $f_t(t)=F(t)$。因此，t 不可能是条件系统——描述一个递归函数 f_t 的特点——的哥德尔配数。

ad(2) 从这点出发我们可以得到 $F(t)=1$。

现在让我们假设类别 $D^{\circ\circ}$ 的决策问题已经被解决。那么，对于每一个自然数 n 而言，我们现在可以回答问题一个系统 S，如 $g(S)=n$，能否决定一个递归函数 f_n。所以我们可以计算 n 的每一个值，$F(n)$ 的值，以及函数 F 具有递归性。但是根据结论 ad(1)函数 F 不可能是递归的，因此，类别 $D^{\circ\circ}$ 的决策问题是没有办法解决的。

卡尔玛(Kalmar)曾经强调，尽管与哥德尔第一定理相似(甚至是来自于它)(参见第三章第 20 部分)，这个结果要比哥德尔第一定理有更加深远的意义，或者说它本身就有其深刻性。事实上，如果算术的每一个形式化 T 是不完整的，在这个意义上来说，它不容许我们论证某个公式 $Q(q^{\circ})$，不过，这个公式是真的；那么，无法解决问题 $Q(q^{\circ})$ 只是相对的，因为只要形式化 T 通过增加适当的公理使得它更加充分，这个问题就可以解决了。相反，对于种类 $D^{\circ\circ}$ 的决策问题是一个绝对无法解决的问题的例子，假定通过引入更强的算术公理也不可能解决这个问题。对于任何系统 S 而言，如果我们想要回答问题，S 是否描述一个递归函数，那么只有算术机器是不够的，我们必须利用和依靠圣言。

39. 数学思维的两个自由度：解决问题与设置问题

类别 $D^{\circ\circ}$ 是由无限的问题序列组成的，如 $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$。我们刚刚解决了问题 P_t，我们得到的答案表明，通过机器或者是机械单一的方法解决 $D^{\circ\circ}$ 中的所有问题是不可能的。所以我们必须给那些想要解决类别 $D^{\circ\circ}$ 中某一问题 P_k 的某个数学家相当程度

的自由，允许他使用所需要的方法。在这里我们有一个最基本的、令人鼓舞的结论，那就是在第 38 部分的讨论结果让我们有理由这样说。

但是我们也许会想如何去选择问题，在这个问题上数学家必须把自己限制在种类 $D^{\circ\circ}$中的那些问题里面。这种观点是没有基础的。

我们必须记得类别 $D^{\circ\circ}$ 中的问题都是决策问题，所以每一个问题 P 都与问题 P'——必须通过统一的步骤，只接受事先限定好的方法才能解决——的整个类逐次相关。这种问题有时候出现在数学中，其可解答性通常在定理中得到表达，其可能性表现在与一个表面积相同的四边形代替任何一个多边形，以及把一个整数分解为素数这样一些步骤中。但是数学家们在寻找基础的过程中总是强调他们自己的兴趣。

如果一个数学家在意研究问题的类别，这并不必然表明他为自己设置了一个决策问题。有可能他想要限定的是方法，这种方法可以让他解决特定类别中的所有问题。但是，相反，也有可能发生的事情是一个数学家想要限定问题的类别，而他可以用只有自己可以专用的预先熟悉的方法来解决它们。

数学家的研究一般聚焦于单个的问题，但是单个的问题并不必然严格地限定在个别情况 P'——它可以进入决策问题 P。例如，它可以是实函数理论——毫无疑问，对于连续函数来说，实函数是微不足道的，并且，在另一方面来讲，它对于任何实函数而言也是无效的——的一个定理问题。在对这样一个定理一般化的过程中，我们也许会保持我们的命题不变，而设法去确定非连续函数的种类的有效性。同样我们也可以去对一个连续函数设置更强或者是更精确的命题。第三种可能性就是为非连续函数确定一个弱化了的命题。在对定理的一般化问题进行陈述的时候，也许数学家总是在这三种可能性之间犹豫不决。最初的问题是模糊不清的，所以对问题予以限定就成了研究目标中的一项内容。

即使在选择问题的过程中，数学家拥有比自己想要的自由更多的自由。通过在决策问题中发现自己的兴趣来探寻数学的基础并不意味着对数学家自由的限制，相反，它为通过打开新的研究领域而拓宽了数学家的自由。

40. 依据伯奈斯(Bernays)所获得的自明性

亚里士多德科学理论的衰落以及笛卡尔和康德思想的式微，使得数学家们从持续思考他们的概念与直觉自明性数据的一致性中解放了出来，这一现象毫无疑问减缓了非欧几何的发展，特别是影响了人们对它们的科学性的认可。而抽象算术的出现恰好是数学家们很好地运用他们自由的一个有力证据。

但是在第五章中我们已经提到，直觉对于数学来说并没有完全失去它的重要性，尽管直觉的作用正在经历着深刻的变化。不过我们要问的是我们是否考虑对直觉成分进行一个渐进、持续的去除过程，而这一过程从长远来说会损害数学的发展。利用直觉自

明性并把它作为一个标准经常与数学家的自由相互干扰，但是充分利用一个自由心灵的直觉常常会给我们带来富有成果的研究思路。

在目前的背景下非常适合讨论伯奈斯的概念，他的这些概念具有重要的意义。这位思想家指出，自明性并不像是哲学传统所认为的是人类思想史里面贯穿始终的一种不变的成分，相反它是一个复合体，它可以被我们的经验所影响。有些情况下自明性不存在，有些情况下是需要自明性的。

长久以来，由文化环境所决定的自明性的条件作用理论一直是文化人类学和知识社会学的热门主题。的确，知识社会学曾经一度运用它而产生了相对主义的结论，波普尔(K. R. Poper)提出了有力而正确的反对意见。但是在我看来，伯奈斯[①]关于这个问题的精妙思想是对这种批评的反驳。

“我们经常认为，我们必须要么接受一份绝对的自明性，要么全盘放弃自明性对于科学的贡献。与其让我们去选择有或者无，倒不如让我们去建构一个自明性的恰当的概念。一个人掌握自明性就像是学会了走路或者是一只鸟学会飞翔一样。通过这样一种方式我们可以达到苏格拉底的认识，从原则上来说我们对未来的事情一无所知。在理论领域我们只能用各种观点来进行实验，这样最终才能获得智力上的成功。”

作为一种不再是自明性的例子，伯奈斯引用了朴素实在论。我们还要提到亚里士多德的物理学的原则。作为获得了自明性，但是最终又被放弃的例证，伯奈斯提到了自明性对欧几里得几何和算术方法的主导。他发现在几何自明性领域，拓扑关系的自明性有一种更基本的特点。所有这些与我们在第五章的讨论是完全一致的，第五章的讨论在很大程度上也是由伯奈斯的思想所激发出来的。

在我看来，我已经把注意集中到了这样一个事实上，那就是在历史上新的自明性的获得通常是由不连续论证的出现为标志的，在作者看来，这种不连续论证的论证力不是来自于它们的逻辑形式而是来自于某种直觉材料。当这种新的自明性被广泛接受的时候，这些论证就转化为有标准性的论证。如果要举例子的话，我要引用笛卡尔的“我思”(Cogito)。

因为经验这个概念已经进入我们目前的讨论之中，所以我要对这个概念进行考察。对这个概念应该在非常宽泛的意义上去理解，它包含了我们精神生活的所有部分，例如对纯数学的研究在一般意义上它并没有产生各种经验数据，但是这一活动却为研究者提供了特殊的经验，这种经验与研究者在其他领域获得的经验以同样的方式、同样的地位融合进了研究者的思想之中。

同时，我们必须厘清整合这个概念的内涵。第一种整合可以称之为归纳整合，这种整合来自于相似经验的重复。这个整合的过程在本质上是缓慢的、并且是可逆的：一系列相似经验的结果就意味着某一个结论，这些相似经验的结果可以被一系列相矛盾的

---

① Bernays，1954.

经验比较轻松地破坏掉。第二种整合可以称之为理智整合,它的发生比较快速,它一般出现在比较特殊的有震撼意义的经验场合。这种整合的过程是不可逆的,它产生一种持续的、深远的结果,后续的经验很难对它产生破坏作用。

就自明性而言它不是天生的,所以自明性有可能是理智整合的结果。理智整合在成人中是一种非常罕见的现象,理智整合在智力发展的开始阶段扮演着重要的角色。

在我看来,对于人类思想史和发生认识论的研究以及我刚才已经讨论过的现象学的重要性,我认为是无可争辩的。

格里兹(Jean-Blaise Grize)对“思维机器”想法的评论

对“日常思维”的观察使我们发现,存在两种行为,即朴素的和形式的。然而,这种划分也只是相对的。所以,在这种语境中,贝丝教授提出的“思维机器”意义非凡,因为它为所有的形式思维提供了精确的描述。

事实上,第36和37部分对于建构思维机器的分析把我们带回到解决决策问题上来,也就是说,对于每一个问题要做出“是”或者“否”的回答。现在,这一问题看起来只是一个过程问题,但是却需要一些特定的条件。事实上,成人和小孩都可以对一些困难的问题回答“是”或者“否”,尽管他们并不是逻辑学家。这是因为在朴素的思维阶段,正确的回答往往意味着在行为层面是正确的,它无须强迫当事人做出选择。他也不需要武断地做出选择。在开始阶段,他必须形成客体的类别、谓词以及关系,至少满足37部分的前两个条件。

第三个条件仍然存在:“某一种类 C^{00} 的决策问题可以解决。”假设情况是这样。首先,我们知道只是一些符合特殊条件的问题才属于这种情况,这让贝丝教授认为“依赖智力是必要的”。但是,还有形式主义无法克服的一些困难,这让我们不得不回到行为的朴素阶段。可以很轻松地举出决策问题被解决的形式系统的例子——例如,刘易斯(Lewis)和朗格弗德(Langford)的系统S2和S4——对这种系统的运用需要冗长的过程,逻辑学家和数学家都无法到达系统的结尾。现在,碰巧有一种智慧能够完美地解决这个问题,而且它甚至知道自己能够解决无数的问题。

让我们想想经常发生的情况——前提已经知道,而且结论也已经确立,规则以及相应的结果也有,但是我们还缺乏有效运用这些规则的规则。然后,通过假设,发现一个能够得出结果的步骤不再是一个形式活动的结果。然而,这并不意味着智力必须要么依赖一种多少有点神秘的占卜力,要么依赖那种纯粹的朴素行为。纽维尔(Newell)、肖(Shaw)和西蒙(Simon)最近发现了证据,他们成功地建构了一个“机器”,它能够模仿那种被人们认为是朴素的智力行为。这些机器能够像对待具体的物体一样分析公式,检查它们的异同,对它们进行运算并且观察它们产生的变化。像自然思维一样,这些机器有一些规则,这些规则不是强制性的,而更像是一些建议,它们享有充分的自由,可以在测试任务中允许自己失败。①

因此,思维机器及其能够模仿智能的机器可以帮助我们更好地理解人类的心理活

---

① Newell,A.,Simon,H. A,《模仿人类思维》,兰德公司,1959,第1734页。但是,贝丝在《论证明定理的机器》(1958)中对Newell和Simon的观点进行了抨击。

动规律。二者都承认形式化作用的必要性，二者也都表明了自身的不完备性。第一，可以在理论上限定它们的可能性，提高其精确性；第二，通过一些具体的方式来表现它们的失败。

第二部分

让·皮亚杰

序　言①

在本书的第一部分，贝丝(E. W. Beth)从历史角度论证了数学和逻辑的完全自治

① 贝丝在本书的第一部分给我们介绍了他自己的学术成长的信息，现在轮到我来介绍自己。我曾经学习自然科学，于1917年提交了动物学专业的论文，主题是瓦莱阿尔卑斯山脉陆地软体动物的分布和种类多样性。除此之外，我还非常热衷于知识理论，同时还在动物学实验室里花费了许多时间，有写作基于生物学的认识论的雄心壮志。我甚至在这段时间做了许多拟定初稿的工作，随后除了在科学学院学习课程外，还在纳沙泰尔(Neuchatel)听了一个优秀老师——逻辑学家阿诺德·雷蒙(A. Reymond)讲的哲学课。

但是，这种多样兴趣导致的危机重塑了我的职业生涯。一方面，哲学家的聚会一直吸引着我，但也让我内心不安。哲学家——无论有多正直——都是经过专门的训练来谈论天下的一切事情，并且当他在谈论一些特殊的或者一些不能决定的问题时，他的书本知识给予他的凌驾于事实知识之上的优越感就已经能够消除他内心的焦虑与不安。另一方面，我发现自己有不可否认的爱好思考的习惯，并且很快明白如果我能够约束自己，继续从事我的动物学研究，并在闲暇时间"思考"一般性的问题，那么我的生物学认识论可能会像其他任何哲学一样。因此，我开始渐渐思考我的所有作品中的理智上的不诚实，这些作品并没有接受当时被认为有效的两种方法的检验，一种是事实检验——接受个人实验而无须顾及别人作品中的观点，另一种是演绎证明——接受那些在数学或符号逻辑中使用的精确算法的检验。

对于逻辑学来说，还必须补充一点：当我在公立高中读书时受到了柏格森的影响，相信逻辑——数学结构中的重要过程具有不可约简性，但是之后对于"物种"概念和一般生物分类学的思考，特别是在陆地软体动物多样性研究中引入了计量生物学，所有这些让我坚信在有机体与逻辑或数学结构之间有着密切联系。

简而言之，在反反复复的对于哲学的思考中，我对未来的实验或计算(生物统计的或者逻辑学的)充满信心，我决定构建生物认识论，它可能要求我(我当时缺乏系统发生的一般知识，另外也缺少人类知识的史前社会发生的知识)全身心地投入到胚胎遗传发生分析的研究中，并且，首先要研究儿童智力的产生以及基本的智力操作的发展。我希望投入5年时间来进行初步研究，然后再回到一般问题的研究上。但是这些准备工作花费了我40年，并且从我提出从发生学角度来研究认识论到现在也已经有近10年光景了。因此，我非常感激像贝丝这样一位知识渊博并具有批判精神的逻辑学家，是他给我机会让我把自己的想法与他的思想——逻辑学和数学认识论中的核心问题以及现实思维与形式逻辑的关系——进行比较的机会。

性,同时也认为(第 21 节)尽管形式主义很重要,但不能为数学和逻辑提供完整的哲学基础。我们将以完全相同的观点开始我们的研究。我们相信,我们和贝丝的每一个主张——通过分析逻辑学家和数学家作品的效度和基础而提出逻辑学和数学的激进自主的观点——都是一致的。如果试图借用心理学的结果来解决逻辑或者数学问题,这就是"心理主义",对此我们要毫不犹豫地进行谴责,因为这不仅混淆了方法,同时也混淆了问题本身。从效果上来看,通过数学论证解决逻辑问题的标准在于发现这个逻辑是有效的条件,而心理问题则在于确定数学家的思维发生了哪些心理机制。这两个问题显然是不同的,一个是基础,另一个是因果解释,对应的方法也是不同的,一个是演绎推理,另一个是实验证实,所以很容易理解为什么所有的心理主义是失败的。

如果我们承认这两个领域是分离的,那么我们必须问问自己逻辑或者数学与心理学的独立是否是相互的。出于同样的原因:逻辑学家并不关注心理机制,他可能不愿参与心理学家对这门科学中出现的问题的讨论。相反地,如果心理学家运用逻辑学这一方法的话,人们会要求逻辑学家去判断演绎性心理理论的有效性或者无效性 ,更不必说数学家去评估心理学家运用统计理论的有效性。简言之,如果逻辑学研究的是形式效度,那么这门学科具有无限的广度,逻辑学家可以确定它的范围,甚至是心理学理论的内容问题也涵盖其中;但是,另一方面,逻辑学在广度上是有限的,所以,纯粹以形式效度来解决事实问题或者解释心理机制是行不通的。

数学逻辑活动与心理学的独立性其实完全是相互的。在内涵上来说,心理学领域是有限定的,因为它只研究心理加工的机制,这就可以防止把心理学滥用到任何形式问题中。但是在外延上来说,就人类的行为(这里不讨论动物心理学)而言,这个领域在原则上是不受限制的。所以,出于解释的需要,心理学家可以决定自己是否把自己限定在虚妄或者不完全的争论的研究中,或者,还可以从心理机制的观点来确定是否对逻辑学家认为有效度的争论感兴趣。他还可以确定是否直觉本身提出了心理问题,或者是否形式化也从心理机制的观点提出心理问题,即使与形式化相对应的心理机制是由一小部分"精英"被试,即那些被看作是活生生的会思维的生物的逻辑学家所展示的。简言之,在外延上来说,心理学领域是无限的,但是迄今为止,心理学只是一种因果解释而不是一个"基础",后者(基础)只属于逻辑学领域。

这种划分消除了各种冲突和矛盾。将心理主义排除在外对于心理学有利,对于逻辑学也同样有利,因为它从实际的思维机制的角度对基础问题进行了陈述。我们可以找到一个准确的出发点:我们如何从心理学的角度解释"纯"逻辑和数学的可能性(可能性这一术语意指实现的可能性,而非效度的可能性,"纯"仅仅指内容的独立性。)

如果刚开始就提出这样的问题,我们就不可能在心理学水平上提出解决问题的纲要,这一点可以在第四章看到。为了不误导逻辑学家或者数学家一类的读者——他们对心理学的看法也许会让他们认为我们对心理主义的拒绝心存遗憾,以后的立场有可能出现 180 度大转弯——所以,刚开始就有必要表明最基本的立场。

现在,可以用一句话来表明立场。帕斯(Pasch)认为"数学思维与人类本性相对立",相反,我们从研究人类智力的发展中获得的知识让我们相信,通过对演绎方法的精致化——有时候会表现出人为性——经验主义或者直觉主义的超越是对人类其他的诸如此类的超越的一种"自然的"延续。像其他一些作者一样,由于对其他成人过于简单的观察或者不完全的内省导致帕斯对于"人类本性"的误解。如果他像今天的人一样,了解 0—15 岁期间心理发展中逻辑-数学行为的转变的知识,他也许会认为,公理学家帕斯的观点与这一心理发展的观点一致,而不是与他所谓的"人性"相一致。

尽管运用实验方法并不一定导致经验主义或者直觉主义,但是,从一开始我们就必须理解真实思维的发生心理学。之所以实验方法不一定导致经验主义是因为——假如某些经验对于开启被试的逻辑-数学活动是必需的——这些经验不是来自客体(恰如物理经验的情况一样),它们来自施加于客体的行为或者运算。逻辑-数学活动启动的运算概念不一定导出直觉主义,因为在形成一个新结构的过程中,结构的改变并非只是通过"渐进"的方式来实现:在结构改变的过程中,需要持续的调整早先形成的结构并在更广的基础上予以重组,在这个意义上而言,这个过程还具有(并且是相互的)"反省的"性质。紧接着,用运算直觉替换假设演绎程序的思路已经融进了相对基本的发展阶段之中,并且公理的重组以及形式化所导致的观念反演并不与人性相悖,相反却展现出前公理结构的"自然性"。

所以,我们认为,以发生学视角充分发展的智力心理学能够为我们提供一种不同的思维形式的图景,这一点是普通心理学无法完成的。这种心理学最终将修正逻辑学家的反心理主义而不是与它相对立,因为后者的思想主要来源于一种非发生心理学。

本书的第二部分,我们的任务不是反对贝丝的某个观点,而是正如我们将看到的,寻找一种心理解释,这种解释可以继续将自身转换为与逻辑学家所采纳的立场——由于对基础的自发性的发展研究——相对应的心理学。逻辑学家和数学家的构造所提出的心理学问题可以在一种相当广泛的视野中与法理学家建立的标准结构相比较。与心理学一样,社会学也是一门事实科学,而不是标准科学,而像法律一样的逻辑学则是标准科学[能够采用标准主义者凯尔森(H. Kelsen)的所谓的纯形式]。然而,通过区分标准本,法律社会学对此没有异议——与"标准事实"相对应,针对有些被试建构或者接受标准的方法进行的事实性观察——而最终达成一致。我们可以建立一种科学,它可以解释标准事实而不产生冲突,但与标准的建构过程相一致。以同样的方式,我们可以构思一种关于音乐或者诗歌创作的心理社会学,它可以解释音乐或者诗歌而无须为美学制定规则,因为作曲家或诗人自己可以解决美学问题。以同样的方式,我们可以对效度或者标准问题与事实或者因果发生问题彻底分离开来,我们可以对数学或者逻辑学给予心理学解释,但是可以尝试按照发生的过程来理解它们。

但是,如果这样的尝试有机会成功,那么它们会不会像古代的副歌只是对真正演员的台词进行重复一样,通过对基础分析——通过发生分析——与其简单共鸣——的无

用重复而终结？我认为不会是这种情况，因为逻辑数学活动的内在结构与心理学发现的因果或者发生结构之间的对应性，对于一般认识论是非常有指导价值的，即使这种对应性不全面或者只与某些个别部分相联系。如果我们通过实验证明逻辑的内在特点源于被试的活动，那么我们必须重新思考柏拉图主义、概念论、唯名论以及先验论或者经验论的那些问题。更准确地讲，涉及基础的研究将引导我们寻找逻辑数学知识的一般性起点。从心理学立场来看，被试的活动会使得这种标准分析成为可能，而这种活动却会使冗长的发生过程终结。认识论在努力调和标准推理和发生解释之间的冲突，使它们不至于陷入恶性循环，这样的话，认识论就染上了辩证法的色彩，它用连续性建构的思想替换了静态先验论，从而具有了渐进性和内省性，同时却消减了直觉自明性的重要性，但又保留了形式化的主要部分，它将形式主义看作是一种工具，其回归分析的历史发展本身又促成了这种工具的不可或缺性。

第七章 来自逻辑学和心理学关系的历史经验

41. 逻辑学研究和心理学研究之间关系历史的三个阶段

一般而言，演绎科学的产生远远先于实验科学，这一点对于认识论极具指导意义。即使数学曾经有过一个实证的阶段(埃及数学不只是一种技术，它更是一种有着自己真正研究对象的科学)，数学在希腊人那里达到的精致程度远高于他们的物理学。欧几里得的几何原本提供了一种公理演绎的典范，在相当长的时期它被认为是完整的，而希腊物理学则仅仅是对常识资料的系统化(亚里士多德的物理学)，或者是用一种演绎和非实验的方法表达非常片面的结果(阿基米德的静力学)或者是搞一些与真正的实验无关的天体力学研究。直到 17 世纪(尽管在中世纪末和文艺复兴时期出现了许多先驱者)才出现了具备方法论自治权的学科——物理学，直到今天物理学仍然体现出这种自治权。

在逻辑学和心理学关系的历史中，实验和演绎的分歧非常明显，因为在心理领域中接受精确系统的实验要晚于在逻辑学领域。之所以这样的原因——这个原因强烈地影响着那些非专家对心理学的看法，而不是心理学家的看法——在于我们很难认为通过内省就可以获得知识的心理学领域需要所谓的实验方法。结果是，科学心理学在 19 世纪才出现，而逻辑学作为一个系统的学科可以追溯到亚里士多德，即使是现代意义上的符号逻辑，直到 19 世纪才开始发展。事实上，如果我们将两个学科的发展历史同步来看，直到 19 世纪逻辑学仍然从属于哲学，就像心理学仍然是内省的，然后，逻辑学变成了数学，而心理学变成了实验。的确，希腊逻辑学没有错误(亚里士多德认可 Darapti, Felapton, Bramantip 和 Fesapo 对于存在前提的需要，而与有些人的看法相悖)①，但却是不完整的，而许多哲学心理学中的主题在实验心理学中早已销声匿迹。所以，我们长久以来一直以为希腊逻辑学是完整的，从未怀疑过它的片面性，现在我们只记住了它的效度概念。

现在，逻辑学在心理学方面的发展，以及在当代意义上的符号论和形式化的最新发

---

① 对于亚里士多德而言，每个术语的非空属性是逻辑学的一个基本假定，他为了捍卫自己的观点曾经回复欧几里得(cornutus paradox)。与现代逻辑学相比较，只有用法的不同而已。

展，均来源于这两个领域最初的未分化，这种状态一直持续到逻辑代数和实验心理学的出现为止。

我们认为这种早期未分化源于两种互补的原因。就逻辑学而言，因为亚里士多德的方法具有直觉性并且从属于内省的自明性，对于判断和论证的描述采用自然思维的形式。就心理学而言，由于在真正的思维机制，尤其是发生心理学中的思维机制的研究中缺乏系统的实验研究，并且由于内省方法所占据的主导地位，这就导致人们仅仅关注被试思维的标准问题，因此，对于被试认知活动的实际形式采用逻辑学的描述方式。

两门学科的未分化状态一直持续到数理逻辑和实验心理学的出现为止。所以，在1854年布尔(G. Boole)——布尔代数的发明人——仍然将他的第二本逻辑学著作命名为《思维的规律》，其后的许多年中他的论著中都涉及心理学。在讨论思维心理学时，他从经典逻辑学中借用了概念、判断和论证来进行描述性总结。

两种学科未分化的残留作用在它们分离后仍然体现在各自的研究方法中，在逻辑学中使用数学步骤和形式化，在心理学中使用系统的实验方法，这使得它们相互批评，在逻辑学中批评“心理主义”，在心理学中批评“逻辑主义”。

心理主义是指通过考察心理事实来解决效度问题的一种尝试，换言之，用心理事实替换逻辑学的纯粹演绎方法。在第二章中，已经从逻辑学立场说明了这种尝试的失败。

另一方面，心理学中的逻辑主义是指尝试把心理学的因果解释完全置于逻辑之上，所以，心理学领域的合理性完全依赖于演绎效度而非心理事实。德国的思维心理学(符兹堡学派等)给我们提供了逻辑主义的代表，从马尔比(K. Marbe)和屈尔佩(Külpe)到彪勒(K. Bühler)和塞尔兹(O. Selz)，他们都努力用内省法而不是发生方法来研究人的思维机制。为了反对联想主义心理学的错误研究结果，联想主义把整个智力活动简化为感觉与心理表象的联系之间的复杂运作或者是心理表象之间的联系，符兹堡学派的心理学家们想要证实联想和表象在思维过程中的作用。为此，他们使用基本测试(例如，询问上位或者下位的联想：听到“鸟”后，对上位概念如“脊椎动物”，“动物”的联想，以及对下位概念如“鸭子”，“麻雀”的联想能够出现)，为此，他们训练被试，让他们详尽描述得出答案的内省过程。这样，他们就得到了有效的心理学结果(法国的比奈也独立地运用类似的方法)，两个主要结果是，判断不能简化为一个简单的联想，而是一个意向动作；表象并非思维的元素，而是一种次要的功能，它通常没有表现出来。现在，通过恢复判断的自治权以及发现无表象思维(肯定或者否定，关系，等等)，他们在心理学和逻辑学的关系问题上持肯定立场。因为他们采用成熟成人思维的共时性立场而非发生学立场，所以他们发现自己和那些被试都拥有确定的逻辑(与普遍的社会传统相一致)，而没有看到它的渐进的建构过程。这一发现导致他们在两种立场之间摇摆，公开的立场是逻辑学家，另一半则是心理主义。

马尔比(K. Marbe)属于第一种立场，所有其他人的研究都源于他的作品。他得出否定的结论，他认为，尽管存在一般意向性，但是人的判断并非由持续的意识状态所伴

随。然后，他由此推断心理因素还包括逻辑因素，可以称这种观点为坦率的逻辑主义。现在，在我们看来，这种陈述问题的方式引发了极大的困难。逻辑只涉及抽象结构的效度，而不关心它们的因果机制，心理学只关注后者，而不是前者。可以说，逻辑"因素"进入心理加工过程为效度这一基础赋予了因果或者事实的重要性。的确，正是这种中间物的存在才确定了马尔比的立场，认为被试的逻辑与逻辑学家的逻辑不同，并且被试评价自己的判断真假的方式可以进入他们的因果机制中。但是，还有可能发生以下两种情况中的一种。我们可以自问，被试对这样一个判断或者论证进行真假判断是否正确，这属于逻辑推理；然后，逻辑学家可以说他是否对问题感兴趣，并且，随着数学程序和逻辑学形式化方法的使用不断增加，他逐渐远离这些问题，因为对我们而言，被试的思维太不清楚了，我们无法准确地描述它们。一方面，我们可以把被试对自己判断的评价作为事实，无须判断被试的对错，只是关注他的反应并分析原因和效果；这样的话，被试的评价不再是"逻辑"标准，而是"标准的事实"，这就引出了另一个问题，也就是，在被试看来是标准问题，而在心理学家看来则是事实问题。显然，马尔比在谈及"逻辑因素"时，他心中想的是这些"标准的事实"，但是，我们发现了这一术语的错误，因为它不是一个逻辑问题，而是被试的问题，而且，如果存在一个"因素"，那么它就不再是超级心理学，而是作为"标准的事实"而进入因果背景中，也就是作为事实之一。

真正困难不在这里，而是如果我们从心理水平去解释判断，反省是不够的。内省仅涉及意识水平的内省，从效果来看，它服从于规范，但是，内省的操作方法本身不能提供思维过程的信息。为了把标准事实看作是事实，有必要把它与整个行为框架相联系来看待，而且从发生学的角度进行分析；但是，这样的话，被试的逻辑就不再是"因素"，而变成了结果。

马尔比和符兹堡学派思维心理学的真正传人塞尔兹采用行为观点尝试分析——这次是从外部——被试如何解决问题获得答案的。这项研究让塞尔兹站到了第二种立场上，他从马尔比的相当简陋的逻辑主义走了出来，但是在我看来，仍然没有完全摆脱逻辑主义的影响。塞尔兹的核心思想是，问题是整体的一个缺口，解决问题就是填补缺口。这里无须详细地介绍塞尔兹的思想(对知识和方法的动作化，从旧方法中抽象创造新方法，对结果的预期以及对允许预期的格式进行填补的关系的整合)，他的思想以逻辑-心理平行主义为终结。对关系——导致对缺口的填补——的整合遵循一些反映了逻辑学的规则，所以，简言之，思维是"逻辑的镜子"。

我们不反对将心理机制和逻辑数学结构之间联系起来的研究，因为这恰恰是我们的任务。另一方面，平行主义思想有其令人满意的地方——它是对马尔比的互动主义的一个积极进步，即，平行的两列元素之间互不干扰，这似乎保证了逻辑标准和心理因果序列的双重自主权。但是看到平行主义的我们就能预见解决方案吗？这种明显谨慎的解决方案对于双方是否过于严苛？

在塞尔兹的逻辑学著作(1913 年和 1922 年)和稍迟的心理学著作出版之前，历史

本身就已经回答了这些问题。至于逻辑学，其不断增加的公理化或形式化使其成为没有被试的逻辑学，如果逻辑学家出于对这种特别技术的需要，对于心理活动的有效机制不再感兴趣，①那么就会使心理学家无法从被试的思维中找到多重公理的“平行物”。另一方面，在心理学家对智力和思维的研究中，他们已经坚决地走上了发生分析的道路，他们关注的问题是，是否像格式塔心理学那样，是否将被试的逻辑数学结构简化为适合所有的发展水平的基本组织形式（参考韦特海默尝试将三段论等简化为格式塔定律），或者通过一个源于被试的活动渐进的建构过程来解释这些结构。

总之，冯特（Wundt）、埃德曼（Eedman）、西格瓦特（Sigwart）等的心理主义希望将逻辑学建构在心理学这一基础之上，与此相似的是逻辑主义者马尔比、塞尔兹等想要在思维中找到预存的逻辑框架。心理主义是逻辑学和心理学由于早期未分化而在今天出现的一个残留阶段。公理逻辑学的发展和实验心理学的出现是两门学科关系发展的第二阶段，这在一定意义上而言是一种彻底的分离。就逻辑学而言，它已经朝着基础分析和效度的条件等问题前进，它已经与对事实的考察分离开。现在，在因果关系的背景下，心理学研究思维被看作是一个事实系统。另一方面，就心理学转向事实研究而言，——即使心理学家在他们的研究方法中遵循标准并且服从逻辑学或者数学的规则——它只能与逻辑学决裂，因为无法为演绎效度设置一个事实问题——它只依赖于经验。

两门学科的分离最终确定了吗？对于这个问题，我们无意做出预测，因为历史已经告诉我们有多少预言成为谎言。但是在选择认识论的立场问题上，我们需要逻辑学和心理学的资料，我们仍然需要了解两种分析应该如何相互合作。无须重新讨论分离，我们必须从历史发展中汲取经验教训，需要对合作问题勾勒出一个计划。

42. 合作需要

现在，很显然，逻辑学领域属于基础或者效度的领域，而心理学领域则是因果和发生学解释的领域，这种分离避免了任何冲突，但是却提出了相互合作的问题，在这里必须理理清楚。

Ⅰ. 让我们从逻辑规则与象棋规则之间的类比开始，这一类比由济塞（E. Zilsel）所倡导并被认可。心理主义犯了与济塞同样的错误，因为如果他要决定哪些问题能够解决，并且通过对历史和心理方面的考虑解释象棋的发展并对如何解决它们做出回应，那么棋手就成了受害者。他是完全正确的。但是，一旦我们承认这一点，两类问题仍然存在。

(1) 棋手接受游戏规则。这是一个心理事实，不再是一个标准。如果不讨论这个

---

① 也许根岑不在此列，讨论自己的“语义表单”的贝丝也是如此。

标准——只涉及棋手——我们可能会问,为什么他们接受。第一种回答是,他们已经学会了那个游戏,但是这一回答又与事实分不开(他们也可以有对象棋的先天知识,或他们可以通过直接直觉来发现它,等等。这里我们可以立即排除各种解决方案)。但这个答复是不够的,因为我们需要了解,为什么一个棋手运用、学习、接受这些规则,并认为它们是有效的。出于纯粹的惯例,还是因为义务或者契约(在这种情况下,它是如何出现的?)等等。这些仍然是事实问题。

(2) 如果这些问题解决了(它们可不是简单的问题),那么必然出现第二类的问题:当游戏规则在被试的行为或者思维中生效时;它们就成为这些行为背景中的事实或者原因。现在这些行为是否需要这些规则以及这些规则有效还是无效不再是问题。但是,一旦被试认为它们是有效的,从观察者的角度看,这些规则就变成了"标准的事实":换言之,无须讨论这些规则的有效性,只要被试认为它们是有效的,观察者就会看到这些标准在改变被试的行为。为了解释这种行为,观察者有必要问自己这些标准事实来自哪里。这等于在问,如何解释游戏规则,不是有效与否,而是作为影响被试行为的规则。作为一种近似的解释,我们很自然地认为,这些规则是一个社会制度(与语言等相比较而言)。但是,这只是一种近似的解释,因为这种特殊的、有限的制度并不借助于宗教的神圣性,也不借助道德的约束,也不借助法律的强制性,也不借助于类似于语言学运用中的约定俗成,等等。规则成功的原因在于规则必须与个人的在特定的发展水平上在智力和情感方面展现出来的某种一致的倾向性以及保持和谐或者一致。例如,象棋满足了某种结合的倾向,我们必须确定此种倾向是先天的还是后天获得的,如果是后者,是通过个人经验还是社会传播。

总之,如果我们要建构象棋的逻辑或者代数,心理学或者社会学都不是称职的,心理主义会混淆事实与标准,所以也不能够胜任。相反,如果我们想建构一种象棋的哲学或者认识论,也就是说,把它与被试的行为以及"事实"(物理的、社会的,等等)联系起来,事实性问题与效度或者证明一样重要,如果认为象棋的逻辑学家或者数学家有能力解决事实问题,那么将滑入相反的错误之中:心理-社会资料与标准具有同样的重要价值。

现在我们回到心理学与逻辑学或者数学的关系上。如果我们的问题是搞清楚一种论证是否是真的,或者一个公理系统是否是有效的,尤其是它们为什么是真的或者有效的,那么,事实性内容绝对不能够回答诸如此类的问题。即使心理学家发现,100%的普通被试发现论证为真,甚至是该领域内100%的专家也认为论证为真,这种结果也说明不了什么问题,因为有可能第二天一个天才横空出世,他发现那些论证存在不足,需要用另一个论证代替它。另一方面,我们所关注的认识论问题包括确定逻辑数理实在是否依赖于物理实在,是否依赖于被试的动作、语言、先验的综合结构,或者依赖于独立于被试和物理世界而永久存在的观念世界,通过观察数学家和逻辑学家的长久以来的观点分歧,我们会发现,以上认识论问题不再依赖于标准方面的思考,而需要标准问题和

事实问题的合作。这正是我们要讨论的议题。

我们从最大假设开始：逻辑和数学与个别被试毫无关系，因为它们是对时间之外的自在世界，以及完全自明性的反映。在这种柏拉图式的观点看来，标准问题似乎在与事实问题的关系中获得了最大的独立性，因为每一个真的系统都直接与观念世界相联系，而与被试以及物理世界毫不相干。

这种柏拉图主义在逻辑学家和数学家中颇为流行，但却是以一种弱化了的形式出现在他们中间，弱化了的柏拉图主义简单地承认标准系统或者形式系统彻底独立于实在，对于逻辑数理真理的存在范围问题没有形成明确的结论：没有结论就意味着这些真理的存在范围与主观的、物理的、语言的①等存在物的范围是不同的。

这个假说引发的问题可以归纳为两个主要问题：(1)被试如何获得理念世界，这是一个事实问题而非标准问题；(2)我们如何在无须解决第一个问题——也就是说，无须借助事实问题——的情况下来证实理念世界存在这一假设？

为了解决问题(1)——涉及柏拉图的"回忆录"的性质——我们涉及了各种各样的内容，或者是"纯"直觉的各种类型，或者是罗素(B. Russell)的第一个职业阶段提出的"构想"对"知觉"的划分，或者严格限制我们的说法，称数学家"发现了"新真理而不是发明了真理。在任何一种情况下，我们提出的显然都是心理问题(我们将回归到这些问题上)。但是，我们也许会认为，这些问题也许让数学家感兴趣，但是它们与认识论毫无关系，因为直觉的效度、概念或者发现都不依赖它的心理解释。但是，尽管如此，问题(1)引发了标准与事实之间的合作问题：我们如何知道发现的真正过程是否足以让我们获得永恒真理的宇宙。如果问题仅仅是确定这个"发现"是否有效，那么心理过程并不能进入行为之中，那样的话，我们就无权假设那个存在于理念世界的被发现的真理。相反，如果我们接受这种人格化的想法，我们又该如何解释理念世界与那些发明者或者"发现者"之间的联系呢？换言之，我们如何知道心理过程足以发现这种联系，而不是仅仅给我们一些虚幻的东西？

从问题(2)引发的问题：如果要从纯效度(逻辑问题)领域跨越到观念世界(本体论的一个认识论问题)的永久性假设仅仅使用只在有限意义上考察演绎以及存在问题的逻辑数理效度是不够的。事实上，如果一个逻辑学家或者数学家赋予一个抽象实体存在性，按照效力递增排序，他们所用的标准往往是简单的无矛盾律、类的成员、一个决定、布劳威尔的一个建构或者庞加莱的一个先验直觉；对于使用更高级别逻辑学的公理系统，除了区分标准模型与非标准模型以及各种范畴之外，还需要满足一些额外的条件。但是正如伯奈斯(P. Bernays)所说，形式主义或者演绎行为所认为的这些存在形式只是一种关联(bezogene)，换言之，与一个由它所决定的结构的存在相联系。至于结构本身的存在问题，它不再依赖于存在的定理——通过形式公理来确定——但是却提出

① 外部语言哲学除外，例如 Ayer 的作品。

了认识论问题。所以，我们必须区分存在的形式问题，这一问题可以被称作是实体的领域或者范围，这个问题包括区分所有我们已知的实体（物理的、社会的、个人的）或者构想的实体（理念世界）与那些我们想要赋予它们特点以及存在性以支持我们进行有效论证的所有对象。在这个意义上而言，观念世界除了与物理世界、被试的行为或者语言习俗世界——它将问题置于推理效度或者建构效度之外——相区分之外，它失去了其重要性。现在，这些另类世界只能通过仔细界定的心理过程（知觉、语言等）的中介物来获得。为了给它们提供一个认识论，事实的、心理的知识以及对这些过程的批评是必不可少的。那么就可能出现两个问题中的一个：要么是观念世界无法到达——除非通过某些心理过程的中介物，并且有必要研究它们以确保它们与前者（例如，为了从经验直觉中区分"纯"直觉）不同——又将我们带回到问题(1)；要么是无须被试主动参与，认为观念世界已经存在于被试心中，并且我们必须解释这种神秘现象——这种情况又预设了被试的知识。在任何一种情况下，都会通过满足内省或者思考，并且迫使它借助于实验心理学，才能够预防一种严重的柏拉图主义认识论。

我们刚才发现，柏拉图主义认识论与逻辑学和数学先验论等价，这种理解在一定意义上与康德主义相类似，却与康德的哲学没有关系。更深层次的原因在于，在这里我们不再讨论把理念世界与"个人"世界分割开来的那个假设，而要考察基于被试的活动，对认知活动（直觉的或者形式的）的基本构成条件与构成先验形式的内容进行区分。在这种情况下，问题有所简化：如果先验形式存在，那么它们的直觉必然性可以专门作用于数学和逻辑学专家，直觉必然性也可以与那些拥有"自然"思维的被试相联系。所以，庞加莱——将数值迭代 $n+1$ 以及"群集"的基本概念归因于综合先验直觉——从感知运动水平出发，试图在被试的最基本的行为水平重新发现迭代以及置换的群集。同样，在心理学中，研究者也在用先验方法解释格式塔理论，例如，梅茨格（W. Metzger）试图以空间知觉来获得先于所有经验的建构条件。所以，确定我们是否在思维的发展中找到了先验综合的踪迹，或者是否是在发生序列的结尾而不是在其开始就得到了必然性，这是一个事实和实验分析的问题。

根据亚里士多德理论，假设可以通过简化抽象（simplifying abstraction）过程从物理实体中得到逻辑数理结构，那么事实问题就更加明显，数学认识论学者就可以利用这些数理逻辑结构。例如，我们被告知，在物理世界中无法以纯形式来例示几何图形：所谓的抽象其实就是建构，用概念上完美的图形代替感觉上不完美的图形。没有比这更真实。但是，在这种情况之外，一种严肃的研究——探讨知觉与智力，尤其是抽象的不同种类——要么从客体出发，要么从施加于客体的动作出发，将引导我们对逻辑数理结构与物理实体之间的关系获得更为清楚的认识。并且这些基于心理学实验的事实分析将为我们提供对经验论和心理主义的批评。

至于对唯名论的各种与语言的逻辑数理结构有关假设（不同水平的）——对于它们的利用或者批评都涉及对一群事实的考察。但是，这些事实不仅仅与真实语言和言语

思维有关:为了判断唯名论对于逻辑数理结构解释的正确性,同样有必要确定究竟在何种程度上,通过语言转换和传递的结构不是来自于动作。根据这些涉及分类、关系、基本计算等的步骤是否只与语言学有关并且只通过言语传递来获得,或者我们是否再次在纯粹的感知运动情境中发现它们,或者在那些情境中,"符号功能"并不与发声语言相伴而生(例如,在失聪或者失语人群中),我们将对逻辑学与自然思维的关系进行不同的解读。

Ⅱ. 现在让我们把这些引导性的观点讲得更加清晰一点。首先,我们要对"认识论领域"——包括知识与各种可能实体的形式(涵盖非知觉性存在物范围的可能性)的关系——进行界定,否则,认识论与逻辑学会混为一谈。认识论认为存在这样一个领域,但它包含一个更为广阔的框架——带来实体空间中的客体问题,主体的作用问题,甚至我们碰巧缩小了它的活动:在可能的认识论解释的一个极端,客体只是主体的一部分或者一个方面,所以主体只知道他自己;在其他极端,主体除了在知识活动中让自身消失外别无用处;但是在认识论的视角来看,总是有主体作用的问题存在。所以,我们无意预判它的解决方案,我们的第一个基本假设是,所有的知识意味着有一个主体、一个客体及它们之间的关系,我们还要区分客体中的包含的属性以及它的存在种类(与实体的范围问题有关)。所以,我们有三个系统以及它们之间的三种关系:

(1) 系统 S:主体的活动。

(2) 系统 F:客体的特性(形式等)。

(3) 系统 E:客体的实体的存在类型。①

(4—6) 关系 SF,SE 和 FE。

首先我们发现,就逻辑数学知识而言,系统 F 是自治的,即逻辑和数学通过演绎建构而获得它们的客体,无须预先涉及主体 S 的任何知识以及客体 E 的存在类型。另一方面,我们也发现,系统 S 是自治的——至少部分是——即存在主体的心理知识——通过实验而无须预先涉及 F 或者 E。另外,我们假设不存在 E 的知识的独立性,即不存在像逻辑学和心理学这样的自治的"本体论":我们是否通过经验直觉、"本质直觉"等来解释逻辑数理结构,对于它们的存在模式的选择总是与系统 F 所采取的立场有关。另一方面,逻辑数理实体的存在是由 F(一致性和非矛盾性,范畴性等)决定的。所以,没有关于 E 的直接的科学,同样的道理,有关于 F 的科学,也有关于 S 的科学,但是,只存在与关系 SE,FE 和 SF 相关联的间接解释的可能性。这就是我们将与关系 SF,SE 和 FE 以及系统 E 有关的问题称为认识论问题的原因。

---

① 根据主体和客体的区分,几种不同的存在类型归于后者。客体本身也包含几种不同的存在类型(物理的,柏拉图式的,等等)。每一个存在类型归因于客体,因此意味着从许多种类中进行选择,以至于系统 E,像系统 S 和系统 F 一样,与系统整体相对应。

现在,我们要从即将使用的认识论规则的视角来清晰地界定关系 SF, SE 和 FE。①

(a) F 中的每一个命题独立于 S 中的命题,并且 S 中的所有问题不是 F 中的问题:即,再一次,事实数据不可以引入逻辑数理领域。

(b) 另一方面,F 中的每一个问题和命题产生 S 中的问题,但是对 S 中的问题的解决只能通过 S 中特有的方法,而不能通过 F 中的演绎方法。

F 中的每一个问题或者命题应该产生 S 中的问题,这是因为,即使远离被试的"自然思维"——他们不是逻辑学家——逻辑数理结构仍然拥有一定数量的特殊大脑,他们被称作康托尔、弗雷格、贝丝等等。即使它如人们所期望的那样特别,F 中的命题也会提出问题,它是否可以被这些读者和被试理解,包括其发明的机制以及被试感觉与标准绑在一起的方式等。但是,S 中提出的问题不是 F 中的问题,所以不能用 F 中的方法来解决。相反,我们有理由相信,如果我们用 F 中的命题来解决 S 中的问题,那么 S 中的命题必然与 F 中的命题相一致。

(c) E 中的每个命题必须与 F 中的每个命题一致,而无须后者能够解决 E 中的问题。

E 中不存在矛盾结构(在主观实在中仍然有这种可能性),这就意味着 F 的权限大于 E,但仅限于严格性。事实上,F 中的命题不足以解决 E 中的问题,F 中的专家对 E 的各种解释表现出了后验性,而先验性则体现在标准问题和实体或者存在(可以理解为"实体空间",但不可以理解为形式存在)的不可约简性。领域 E 仍然从属于领域 F 而无须其明确的延长,这等同于说,不存在一个拥有逻辑学和心理学的自治性的本体论,并且 E 中的问题不依赖于 F 和 E。

(d) E 中的每个命题依赖于 S 中的命题。

我们也许会问,在考虑 S 和 F 的情况下,既然存在一个对立的规则(a),为什么还要接受规则(d)。有两个原因,首先,被试存在,并且基于对其他类型存在的认识,认为不同实体之间是关联的,因为一种实体的存在模式只有与其他模式联系起来才有意义。第二,被试能够以一定程度的连贯性完成推理,并不影响逻辑学家的演绎性建构,因为

① 这里我们只想确立方法论规则,以便指导后续的分析(第八到十一章),所以选择最谨慎的规则。例如,有人也许提出异议,逻辑学与心理学的分离并非那样彻底,因为逻辑学家使用元理论,会发生他有时会提到被试的行为的情况。提及被试行为的好例子可以在"保持变量恒定"的条件下,在论证形式 $(x)A(x)$ 的公式的过程中找到,例如 Kleene 的元数学导论。另外,心理学家可以使用形式化并求助于逻辑学。但是,如果逻辑学家求助于对非形式的考虑,那是因为他的标准研究的自发的发展——这保证了它的完全的自治性,以上情况确实是真实存在的。相反,如果心理学家恰巧使用了形式化,那是因为他可以用一种更加严格的形式来表达他的材料,这种做法的真正价值依赖于事实材料,并且事实变量仍然保持完全的自治性。在第十章,我们将回到逻辑学与心理学可能聚合的问题上,但是,通过方法本身来预测它们是不明智的,因为方法不能预判断其引导的结果。

它是一个不同标准的问题，其中一些可以被看作是有效的，而无须其他成分。另外，一个演绎系统有一定程度的自明性，而接收某种存在空间就意味着，要么是具有与它有关的一个限定的角色的形式化的思考，要么断言一种知识，这种知识是被试必须具有的用来获得这种实在的存在的可能性。

所以，综合的规则(e)源于规则(c)和(d)。

(e) S 中的命题不能决定系统 E，而无须提到 F，同样，F 中的命题不能决定系统 E，而无须提到 S。

所以，有必要整合 S 的事实问题与 F 的标准问题，这种整合本身受到规则(a)和(b)的保障，它们足够预防所有的冲突(即，逻辑学中的心理主义和心理学中的逻辑主义)。让我们来厘清这一整合的目标：

(f) 它是一个收集事实资料——涉及主体(S)的动作以及客体(E)的存在——的问题，其不仅仅与知识(F)的关系的标准效度相容，而且可以进一步解释运用于 F 中客体的标准如何必然施加于主体，同时还能够照顾到主体的发展水平，以便让主体能够同化这些标准。

换言之，对事实问题和标准问题进行整合就意味着，演绎性知识 F 必须被置于主体与客体的关系的框架中，而不能使这种演绎知识变形，但却可以从主体活动(知道后者是否发挥形式化作用或者仍然保持封闭的问题)的视角以及客体的本体论性质(知道后者是否与主体的某一个方面混淆，或者它是否以不同的程度游离于知觉世界、社会世界、语言世界或者理念世界等之外)的视角来解释它的可能作用。

在我们看来，通过这种方式，我们对逻辑学和心理学的自治性肃然起敬，并在认识论领域对二者之间的合作结果有了信心，这就需要努力解释各种可能的知识的可能性(以及两个方面——它们的标准效度与它们在实在中的作用——的可能性)。举一个例子，如果真理 $2+2=4$ 不是一个事实性数据，而是一个逻辑论证，当我们说明这个论证为什么有效时，这一认识论问题仍然没有得到解决：我们仍然需要知道 2，4 和＝“是”什么或者“表明”什么，以及被试为了遵循论证的必需标准需要做些什么。认为 2，4 和＝是理性实体，被试在它们的组织中并没有任何作用，这种看法是认识论的解决方案之一，但是其他方案也是有可能成立的，因为它们也尊重这一论证中的同样的标准的自治性。为了在这些解决方案中进行选择，必须经常引入心理学数据。所以，事实数据和标准的效度的合作将会使它们相互一致，而无须在简化的两个可能的意义上，把一个简化为另一个。对于处理事实的专家和处理标准的专家而言，让他们相互尊重对方的观点是非常困难的一件事，因为每个心理学家都把自己局限在自己的领域中，在思考逻辑学的对与错，而每个逻辑学家也有自己对于心理学的对与错的观点。但是，认识论问题将这种合作运用到两个领域中而无须简化双方，这也正是为什么该解决方案进展如此缓慢的原因。

43. 发生观与标准观

我们刚才达成了一致观点，认识论研究需要考虑逻辑学的标准数据与心理学的事实数据两个方面。现在我们必须澄清后者的性质。

由于心理学问题在于解释被试在知识中的作用，所以从一开始我们就必须区分两种心理学事实，对它们分别进行分析，它们的区分对于我们的研究至关重要：一方面，它们是意识的事实，从主体的立场以共时的静态的方式来考察，即在发展的特定水平并且独立于后者；另一方面，它们是从观察者的立场以历时的发生的方式所看到的行为方面的事实，即按照发展的方式。的确，我们也许会把意识事实看作是期望行为的后继者，但是这是从行为的视角以及观察者的视角所看到的，而主体对这些事实的内省却采用另外的视角。

Ⅰ. 将逻辑学家的标准研究与心理学家的实验研究的合作问题复杂化（或者简单化，根据我们的解释而定），产生这一基本事实的原因在于从主体立场看到的意识事实总是有一个标准，即使这是"单纯的"，并且远离科学标准或者形式逻辑。在这里我们采用共时观点，即无须设法找到眼下主体标准是如何发生的：教育和语言传播、先天性、个人习得等等，所有这些假设都是可以讨论的。我们只看到的是，每一个标准的主体，他们在思考和说话，做出推理，理解其他人并且判断真假，主体的行为不仅仅涉及他们提供的信息与外部世界的一致性，而且涉及观点的内部一致性（非矛盾性）。

从观察者的立场来看，无须评价这些主体的标准态度，只要观察和解释即可。为了避免标准与事实的混淆，我们将用"标准的事实"来指代事实性观察（从观察者视角），这一术语涉及意识或者行为的状态——从主体的视角来看，它有标准的方面。

为了界定我们的分析方法，需要强调的第二个要点是与行为事实相对的意识事实并非与大部分运用于物理实体的习惯分类无关：物质、空间、运动、力量、因果。事实上，如果意识状态随时间出现变化，我们仍然不能说一种状态"导致"了另一种状态，因为根据它们的联系方式，它们之间的关系更多的是一种引发而非"原因"。从认知的角度看，它们的基本特点包括意义；从情感角度看，则是价值。现在，意义不是另外一个意义的"原因"，价值也不是另一个价值的"原因"，但是它们之间一个导致了另一个的出现，这种方式我们只能用一种普通的、非技术的术语来表达，即"导致（entailing）"。当主体看到一个物体时，它会把看见部分的特性运用到看不见的部分（如，物体的另一面）中；同样，对于一个物体的兴趣（价值）使得接近它的方法有了价值。早期的心理学家用"联想"来描述这种基本关系[通过相似或者连续性获得的联想不能运用到物理实体中，除非弗雷泽（Frazer）所描述的神奇思维中]①。但是，事实上，机械联想的问题要比主动同

① 在弗雷泽的作品《金枝》中，他把联想律运用到了现实生活中。

化的问题小得多，因为我们通过这种联想在更广的意义上获得对世界的认识。

简言之，从主体的立场看，意识事实具有含蓄的性质，同时也包含了标准的内容。这就是为什么当代心理学毋庸置疑地试图将逻辑标准简化为“思维律”的原因，但却忽略了这样一个事实——主体的“朴素”逻辑与逻辑学家的逻辑无关，恰如儿童的“朴素”物理学与物理学家的物理学无关一样：如同日常生活中关于物质和能量的看法不会给我们准确的物理定律一样，同样，日常生活中的逻辑不会给我们逻辑学家的逻辑学。如果前者是否与后者非常近似这一问题仍然存在（在第八章和第十章——第十一章我们将重新讨论这个问题），那么另一个问题依然存在（在第十章的 52—53 部分我们将重新讨论这个问题），即是否公理化的数学和逻辑学的发展方向与人类心灵的自然方向相反（如帕斯所言）。

Ⅱ. 从观察者的角度，而非主体的角度，我们发现，心理活动必须被看作是行为系统（包括内部思维、无意识或者意识，但是在后一种情况下，心理活动被看作是符号表达的内化动作，像可能的期望一样等等）。在这种看法中，心理活动与我们的行为紧密相连，智慧本身必须被看作是一个运算系统，也就是说，内化的（Df.）以展现整体规律的形式完成可逆的并且相互协作的操作（观察者可以按照框架、类等来描述规律，简言之，用抽象代数的语言描述规律）。毫无疑问，如果我们把与动作和操作性运算（Df.）相关的称之为意识心理，那么还存在另一种具象心理，也就是说（Df.）与知觉轮廓（例如，知觉和心理意象）有关。但是，很容易发现，如果把知识的具象成分看作是需要认识的客体的“状态”，如果把知识的操作性成分看作是需要认识的客体的“转换”，那么知识的发展过程总是包含一些次级水平，它们在最初的构思中独立于转换系统——这保证了操作的首要地位。

与内省心理学相反，行为心理学的核心特点是，它源于发生的或者历时的视角，所以，在一定形式的因果意义上而言，它是“解释性的”，并且它不再仅仅是“内涵的”（在理解意义或者价值的层面，以及在更广范围的蕴涵层面）。

行为心理学应该尽快说明它的发生维度，可以从两个事实看出这种必要性：(1)一般而言，一个行为或者操作系统的产生是逐渐地（遗传系统在数量上非常稀少，并且通常对于知识来说无足轻重，一些影响感知运动的反射除外）；(2)不同的操作系统是在非常不同的发展水平上形成的，可以对它们轻松地按照时间顺序进行组织排列。

为了说明以上的(1)和(2)，我们举一个替代结构的例子。在先于语言的感知动作水平，当孩子可以在房子或者花园周围行走时，我们就认为他已经获得了一个结构，因为他可以在这些地方随时返回（参考逆运算）和绕道（参考结合律）。但是，这种替代性的结构（通过移动客体等来实现）既不是天生的，也不是发展的早期结果：在第一个月，孩子甚至不能够区分位置的变化（替代）以及状态的变化（当客体离开视野后认为客体具有非恒长性），也不能按照相继的替代来进行定位。一旦在感知运动水平获得旋转和简单转换的群结构（1.5—2 岁），将会在几年之后（7—8 岁之后）才能将同样的结构运用

到不是这一动作中完成的运动中，而是在思维表征中进行替换：例如，我们在一条直线上做从 A 到 E 的来回运动（如 AC, CB, BE, EA），那么从 A 到 E 与从 E 到 A 的距离相同。思维运算的群（即使在直线来回运动中进行简化）与动作群非常不同。最后，我们必须等待，直到更高的运算水平（11—12 岁）形成，相对运动进入了问题解决过程中：例如，蜗牛在甲板上的运动与甲板相对于一个不动的参照点的运动（预测蜗牛在甲板上从左向右移动了 20cm 后，而甲板从右向左移动了 20cm，预测蜗牛的位置）。

总之，任何结构，即使是在这种特殊情况下，在一条直线上对一个转换亚群的简单有限的表征，只能够非常缓慢地、逐渐地出现，并且在三种水平上——取决于我们经过甲板的动作（身体本身的运动）、对单一的操作系统的运算，或者对两种参照系统结合起来的运算——不断地重构更新。

所以，显然，行为心理学必须采用发生的观点，出于这一原因，它发现自己必须要面对因果解释的问题。例如，我们如何解释这些感知运动替代产生了涉及替代直接联合的结构（假如 ABC 不在一条直线上，$AB+BC=AC$）、一个返回合成（inverse composition）以及一个绕行结合？这一结构是先天的吗？（我们刚刚已经表明，它不是先天的）如果它不是先天的，那么它可以被同化到一个物理经验的简单总和中吗？或者它源于感知运动协调的渐进平衡过程吗？为什么通过动作获得这一结构之后，不能直接运用到儿童的思维中，非要等到儿童能够想象替代？它是如何在思维水平重新建构的？为什么这一重新建构不需要对最基本的直觉（例如，4—5 岁的儿童甚至不能够确定 AB 之间的距离与 BA 之间的距离相同，尤其是在一个倾斜的平板上呈现 A、B 两点时）进行重新精致化的加工？为什么替代直觉的发展必然再次导致一个群结构？等等。

事实上，逻辑推理或者简单地运用被试意识状态的内省数据都无法解决以上问题，内省数据只能提供一些线索而不是解释。例如，我们断言，在特定的前运算水平，传递性无法作用于被试的意识：在他发现 AB 的距离与 BC 的距离相等，BC 的距离与 CD 的距离相等，而被试不承认 AB 的距离与 CD 的距离必然相等。当这些运算与群结构协调之后，这一水平传递性才会作用于被试，他会说："它是逼迫的"等等。与一个形式标准相对应的传递性的知识无助于解释为什么它自身可以作用于 7—8 岁的被试，让他们认为是一个标准：事实上，我们必须明白为什么它不提前起作用，以及被试如何知晓它的。现在，从发生的观点来看，它又是一个因果解释的问题，我们是否借助于教育或者语言压力等方式来解决这个问题，我们是否可以把它看作是一个源于被试的动作与运算本身的结构，即产生于发展过程中处于连续的平衡阶段。

从导言开始我们就一直在强调的发生观，对于"自然"或者真实思维与形式思维之间的关系问题至关重要。因为它可以从一开始就防止我们把自然思维看作是静态实体，迫使我们采用(a)连续阶段的观点，以及(b)水平或者阶段的层级观，每一个层级与后续的成人智力层级中的阶段作为结果或者分层都相对应。所以，每个正常个体在其发展过程中都要经历感知运动水平，该阶段的组成水平（总是在成人中出现）由基本动

作组成;还要经过动作的"具体"阶段(指动作进入对客体的操作中,但是有可能对这些操作形成表征),在这一阶段,操作性直觉已经被详尽说明,成为该阶段的组成水平(也总是出现),比之前的水平高,但比之后的水平低;也要经过与言语和假设-演绎操作相联系的运算阶段,从这一阶段产生第三个水平群,等等。

用叠置的层级水平的方式对连续阶段的分析产生了一定数量的基本结论,我们将在Ⅲ中予以分析,主要的观点是,"自然"思维从来就不是完整的,但是却存在无限发展和分化的可能性,所以,从心理学的立场来看,把数学或者逻辑数理思维先验地划分为两个领域确实有点随意和任性,其中一个领域被认为是对"自然"思维的拓展(例外,某些形式的"直觉"),而另一个领域则如帕斯所言——"与人类本性相对立"。

Ⅲ.(1) 对于阶段和层级水平分析所发现的第一个结果是思维发展不是线性的,不能把层级水平比喻为通过一层层叠置而形成的地层。事实上,如果行为的发展只遵循累加顺序原则,那么水平以及阶段只能是对一个连续性的或者是纯粹加法过程的随意划分。相反,基本的事实是,在前一个阶段获得的结构并非简单地带到后一个结构中,而是在合并到新结构之前进行重构,从而使这些新的水平对结构进行精致化处理。我们已经观察到两种重构,由于在感知运动水平获得的在2—7岁之间的替代群是在具体运算水平上重构的,当它必须整合到更加复杂的系统(双重参考系统)时,它又要在假设演绎水平(12—15岁)进行重构。一般而言,从出生到成年,我们要经历三大结构的建构:第一个是感知运动(I),以及后来合并整合到更加复杂的结构中,形成了具体运算结构(Ⅱ),再后来,通过重构形成了命题结构(propositional structure)(Ⅲ),这一结构更加复杂。

现在,这个非线性的连续的重构和整合过程,对我们的研究非常重要。"自然"思维是以我们的社会中12—15岁的普通儿童(可以同化欧几里得《几何原本》中的简单内容)作为标准,当把现代公理化阶段的思维(例如,从弗雷格到帕斯和希尔伯特)与"自然"思维进行比较时,意味着我们正在被诱导着得出结论认为,与刚刚开始使用假设演绎方法的普通儿童相比,公理学家有着完全的意义可逆思维。但是,如果我们不仅仅拿这种水平N的精致的思维与水平Ⅲ的朴素思维作比较,而且用更迟的水平(Ⅲ)与水平I的感知运动结构——它的起点——作比较,那么就产生了两个问题,我们将在下文讨论:(1)N和Ⅲ之间的差距真的比Ⅲ和Ⅰ之间的差距大吗?(2)存在于水平N和水平Ⅲ之间(在N中的为了确定论证的基本条件所进行的回归分析的思维过程,与在Ⅲ中的具有构成意向的一环的思维过程)的不可否认的意义可逆性真的不能与已经观察到的水平Ⅲ(建构性论证)和水平Ⅱ(当被试被处理时的运算结构的建构),尤其是水平Ⅰ(动作结构的构成)之间的意义可逆性相提并论吗?

出于发生观的需要,为了说明问题,我们直接看到了最"自然的"思维形式与那些"最人造的"思维形式之间的关系,这种关系比想象起来的还要密切。有人也许会反驳,12—15岁学生的思维已经不再"自然",因为他已经深受语言、家庭和学校的影响,通过

口语和书面语回到了欧几里得时代(这就意味着二十多个世纪的文化)。我们的第一回答是,语言、家庭、学校、文化和欧几里得几何学,这些本身就是"自然的",因此,这显然使得它们依赖于社会发生与依赖于心理发生之间的程度可以说存在着不分伯仲的现象。接下来我们还要说,儿童本身就不是一个消极被动的文化容器,为了同化我们的文化,他必须具备一种基本的结构:我们认为正是这些基本的结构(这些结构的发展只能被文化加速或者丰富,而不能被文化完全决定)才是水平Ⅲ的思维中的前提条件。总之,我们的观点是,从社会发生和心理发生两个视角讨论问题之前,水平 N 与水平Ⅲ或者水平Ⅲ与水平Ⅰ之间的差异及意义可逆性仍然是完全相同的。

这些观点引导我们产生了(2)。

(2) 从发生观来看,心理结构绝不是完整的,它们是"开放的",这一事实让我们相信,任何结构可以通过拓展而成为新的后续的结构。我们经常认为,在逻辑数理领域,直觉的出现从被试的视角提出问题,也就是从心理学的视角提出问题,而公理化和形式化的结构则没有从被试的视角(我们是在结构所需要的思维过程方面来讨论这些结构,而非它们的效度)提出任何问题。伟大的克罗内克(Kronecker)认为,"自然数"是神的杰作,而其他种类的数则是人的创造,这已经是对"人造"与"自然"的一种对立描述。现代的逻辑学家认为自然思维有各种直觉形式,并且把自然思维看作是"人造"思维并朝着公理前进,在此背景下我们应该记住克罗内克的观点。历史的发展已经导致了对任何在积极、消极、理性、非理性以及复整数(complex integers)之间自然对立的压制,所以,应该把它们都看作要么是自然的,要么是人造的;至于这种区分本身已经失去意义,它只是表明,它们是被试当下的思维对象,而从逻辑学家的视角来看,它们只是有效论证的对象。同样的道理,任何形式化以及任何知觉,对于被试来说,它们是思维的客体(心理学家所认为的发生问题的来源),而对逻辑学家来说则是论证的效度(从拒绝或者接受直觉的意义而言)。

从发生的观点来看,任何一种形式的思维,无论看起来具有多少人造性,它也是发展的产物。发展只考察了主体中非常有限的典型部分,这一事实与以上观点一点也不冲突,因为它并没有说,发展变化的思维越多,就会越倾向于以特别的方式让自己显得与众不同。甚至,当形式化只与思维的一种特殊形式相对应时,整个心理学问题仍然是去理解这一特别形式是如何发展以及它与普通思维的关系是什么(在原则上而言,人们常常认为,建构一个结构的有效性无须以其他结构的建构为条件)。

第八章 逻辑数理思维的一般心理问题

A. 结构问题

拥有方法论的原则——将心理分析方法限定在事实问题中，而不是效度或者基础问题，但是考虑到这些事实问题的自治性，我们将在第八章运用发生方法来解决数学思维提出的一些一般心理学问题。就一般问题而言，我们理解那些独立于形式化的问题：布尔巴基(Bourbaki)的“结构”的本质，自明性及其变量，直觉的不同形式，以及发明与发现。其中的每个问题都划分为两类不同的问题，有些与发展的形成阶段有关(从动作与运算的视角看)，有些与被试的意识有关，这两种视角的相互协调是所有解决方案的预设前提。

需要再次注意的是，这些分析的目的是方法论的，而不是逻辑学的，对于提到的每一点，我们不想涉及效度问题，而是致力于解决两个问题，(a)发现什么应该归因于被试，什么属于被试，(b)后者的本体论性质是什么。例如，就布尔巴基的“矩阵结构”而言，心理学能够为这一问题所做的贡献是确定这些结构是否与被试运算机制的一般心理结构相对应，或者它们是否只是由于近期的操作精细化而出现的。就多多少少植根于被试的动作中而言，如果它们是“自然的”，那么我们必须从发生学角度来确立它们是如何发展为这一动作(与任何内省的“经验”相对)内部条件之间的函数，或者是不同经验(物理的，等)的函数，或者语言的函数等等。那么，发生数据再一次与逻辑学家和数学家的标准要求“合作”[参考第七章 42 部分，规则(c)(e)和(f)]，以说明它们的本体论(42 部分的领域 E)和认识论本质(关系 *SE*，*SF* 和 *FE*)。

44. 布尔巴基的“矩阵结构”

群概念被 E. 伽罗瓦(Galios)发现后，在几何学中被 F. 克莱因(Klein)著名的埃尔朗根(Erlangen)计划以及其他许多学者所研究，布尔巴基学派尝试确定“数学的结构”，他们试图将数字、不可约简的先天性作为数学的基础，认为数学的基本结构或者“矩阵结构”可以通过内部差异的双重运动以及二者之间的联合，或者这些矩阵结构的次结构与另一矩阵结构的次结构之间的双重运动而产生。我们马上发现，就数学存在的心理

学问题而言，我们在三方面对这种方法感兴趣：(1)对于“结构”概念的使用有可能让我们对数学结构与心理结构进行比较研究；(2)结构之间数学关系的概念有可能让我们将其与发生关系进行比较；(3)对于方法——用来发现结构的方法(在证明它们的公理性之前)——的分析可以为我们提供指导，或者至少是关于结构——与被试和客体之间关系有关的结构——存在类型的提示。

在《数学的结构》①这篇著名的文章中，布尔巴基阐述了以他的名字命名的学派关于目前数学统一性现状的观点。尽管存在各种各样千差万别的理论，但是仍然有可能从各种相关理论构成的要素性质中抽象出独立于这些要素的共同关系，也就是只确定结构关系。那么，从结构的公理而言，这些关系的决定条件又一次被列举出来，并且对这一结构的公理理论形式化的过程将包含在说明这些公理的逻辑顺序之中，而无须做其他任何假设。

所以，现在呈现的结构理论是一个形式体系，其前提条件是主要的结构已经被发现和描述。但是，为了发现和简化它们，以便得到可能的最小数量，目前唯一可用的方法是，在现存理论之间进行系统归纳比较，以提取最基本的结构关系。布尔巴基小心而明确地表明，已知基本结构的数量实际上是不确定的。换言之，不存在结构的先验推理，而且对它们的发现主要依赖于一种反省和追溯的分析，而不是直接的结构。渐进建构增加了将研究对象分隔为具有自足性的研究领域(代数、分析、数字理论、几何)的倾向，在这些领域中，用于揭示结构的比较分析方法反过来将成为发现最一般的共同形式的工具，但其条件是突破这些分隔，并且在不同领域的相似部分之间寻找同构性。

到目前为止，这种回归分析发现了三种基本结构，它们保持了不可约简性，可以称作“矩阵结构”，因为其他已知的结构都可以从这三个结构中推导出来。它们是：

(1) 代数结构，其原型是“群”，核心特点是如果系统的两个基本成分 x，y 已知，那么第三个成分 z 可以通过运算 τ，即 $x\tau y=z$，单一地确定。在这里要加入结合律、中间成分 e 以及反演 $x\tau^{-1}x=e$.

(2)顺序结构，其重要类型有网络和框架，用来处理诸如 xRy(x 在最大程度上等于 y)这样的关系。它不再假定两个成分 x 和 y 以单一的方式决定第三个成分，而我们有 xRx、xRy 和 yRx，使得 $x=y$；并且 xRy 和 yRz，使得 xRz；另一方面，我们没有排除顺序结构的一般形式，在这种情况下，两个成分 x 和 y 是不兼容的(例如，如果 R 意味着“蕴涵”)。

(3) 拓扑结构，这种结构处理大约、限制和连续性之类的概念。

从这些矩阵的结构，我们可以(至多)通过微分法或者组合得到其他所有结构。微分法是“通过添加额外的公理，让每一个都产生新的结论”(43 页)，限制了矩阵结构的一般性。可以用倍数来说明组合法在形成结构中的方式，它通过对两个矩阵结构进行

① 在 Le Lionnais 的 *Les grands courants de la pensée mathématique* 中，巴黎，1948，pp. 33-47.

交叉,不是并置而是有机地调整与它们相关的一个或者几个公理:例如,拓扑代数和代数拓扑。

最后,通过详细说明微分法或者组合法处理的结构成分,我们将回到经典数学的特殊理论上来。但是,它们将不再表现出自洽性,而表现为结构相交的形式。所以,通过它们的层级顺序,正是后者最终构成了数学的有效结构。

如果通过对公理化方法的持续使用,布尔巴基的结构理论可以被同化为形式体系,那么它能够达到的"形式"可以与活生生的结构相比:"统一赋予数学的不是形式逻辑的框架,不是没有生命力的骨架统一体;它是滋养有机体茁壮成长的乳汁,是自高斯以降,所有伟大的数学思想家用来进行研究的得力工具,所有狄里克雷(Dirichlet)公式的追随者,都在致力于用理念代替计算。"(47页)。我们引用这些文字——不是出于分享逻辑学观点的考虑——是因为它表达了这种一心想要改变数学的结构,使之符合活生生的形式,或者符合对一般生命有机体的思考(在狄里克雷的其他作品中也表现得如此明显,尽管他有明显的柏拉图主义色彩)的热情。

45. 主体动作和运算中的类别和关系的结构;"群集"的形式化

已经分析了"矩阵结构"的特点,我们的任务是确立在这些矩阵结构与被试的动作和运算结构之间是否存在关系。那么,这是一个核心的发生问题,我们首先必须清楚地界定所有的概念。

Ⅰ. 首先需要注意的是,是否这些矩阵结构与被试意识中的一些确切概念相对应并不是一个问题。当我们说,正整数系列是"自然的",这样说的意思是,在语言中通过口语或者书面语表达的数字"一","二","三"等,这个无限系列的初期部分与日常概念的某些部分相对应。这是一种肤浅的观点,因为儿童也许可以数到10或者20,而他还没有掌握运算,没有运算我们就不能够讨论数(例如,在两组有六个一一对应的客体中,当客体不再相对应时,仍然保持相等)。① 如果除了被试的意识状态的思维、口头数数等现象,我们再也没有其他的关于正整数的"自然"特点的指标,那么我们不可以从这些现象中做出更多的推论;另一方面,因为数数不可能只与社会和语言性质有关,而与个别的被试心理无关,而且,由于我们的问题是发现意识深层的运算(例如,这种一一对应),无须依赖于口语或者内省的数据。无论这个例子有什么价值,正整数序列的初期与被试意识思维中的明显概念一一对应,对于许多作者来说,这一点已经足够认为它们是"自然的"(然而,对我们来说,还是不够的)。

现在,布尔巴基的矩阵结构没有与主体的意识思维中的任何东西相对应。在被试学习之前,他们中没有人能够理解群、格(lattice)、拓扑同形(topological

① 参见 Piaget and Szeminska, *La genèse du nombre chez l'enfant*, Neuchâtel-Paris, 1941.

homeomorphism)等这些“概念”:在大多数文化环境中,在上大学或者中学高年级之前,我们很难见到这些概念。所以,从主体的角度来看,我们问这样的问题——这些结构是否是“自然的”——确实不是成熟的想法。这样就大大地简化了问题,我们可以在进行发生分析中将那些最棘手的因素搁置一边:即,教育和语言传播因素。

我们的问题应该是,当主体操作客体时,在他动作中的自发协调,或者在他的运算中的自发的协调是否反映了协调的结构,这与代数结构、顺序结构和拓扑结构有一定关系。所以,这种方法要比分析被试的意识思维的方法直接得多。但是,另一方面,我们马上又发现了主要的困难:我们要确定到底在多大程度上,我们认为存在于主体的运算机制(动作与运算)中的结构——首先,就主体的动作而言,它是操作的——真正属于被试还是被心理学家推导出来的,也就是说,通过研究主体2而得出主体1的结论并把自己的心理结构投射到所有主体身上。

心理学认识论也许对于后一种情况感兴趣,而对我们而言却有实用价值,因为我们必须避免陷入恶性循环,P. 格雷科(Gréco)这样描述:“它既不在智慧中也不在心理中。”(Nil est in intellectu quod non prius fuerit in psychologo)①

为了说明我们如何逃离恶性循环,首先需要澄清一点,在我们试图确定运算结构的种类时,我们对布尔巴基的矩阵结构一无所知。1952年,在巴黎附近的默伦举行了一个主题为“数学结构与心理结构”的小型讨论会。研讨会的开场有两篇论文,第一篇是J. 迪厄多内(Dieudonné)对布尔巴基结构的讨论,另一篇是我做的心理结构的讨论。当时,在并不知道布尔巴基工作的情况下,仅仅通过实验观察儿童智力的发展,对不同的运算结构尝试分类,我们已经发现了三种结构。这三种结构具有不可约简性,可以以不同的方式与其他结构结合:第一种结构的可逆形式是反演或者取消(A－A＝0),我们可以通过适用于代数或者群的模型来描述;第二种结构的可逆形式是互换的,必须通过关系或者顺序来描述这类结构;第三类结构是连续体,它是空间结构的基础,其基本形式具有拓扑性质,出现在度量和投影结构之前!这两种完全独立的探究令研讨会的成员,尤其是两位作者本人印象深刻(对于他们,我们也许可以说,第一位是有意忽略了心理学,而第二位则是无意地忽略了数学……)。

不过,我们确实通过借用基本符号逻辑学中的方法来尝试(并且这将是我们对心理学家和被试的恶性循环的第二个批评)描述基于发生视角所观察到的结构。但是,我们非常需要澄清(并且需要强调),将自然思维简化为模型并不是问题,相反,问题在于使用最准确的语言来描述自然结构,通过有意识的努力,考虑适合于自然结构的限制,并且发现最基本和最初步结构的种类(既不用担心它们缺乏一般性,也不用担心它们的逻辑一致性)。所以,在我们的研究中,很容易区分依赖于主体1的那些结构(也就是依赖

① 我们可以用莱布尼茨的话来做出回复:“*Nisi ipse intellectus*,”但是,这一回答却尽失发生性意义。

于儿童的发展)，以及依赖于主体 2 实际语言的那些结构(即，依赖于心理学家)，因为那些结构的特点——通过主体 1 的活动予以说明——已经有了自己的限定条件。

Ⅱ. 首先需要说明的(为了便于理解发生数据与布尔巴基结构之间的类比)是，在被试的活动中所体现的结构具有双重意义：(1)系统整体性，有其特有的结合律，(2)可以展现相同形式的系统，独立于它们的不同内容。

(1)众所周知，在心理学中存在一些系统，它们有适合系统自身的特殊的结合律。但是，我们必须确定我们感兴趣的系统。形式心理学(或者格式塔心理学)认为，知觉、记忆等事实并不是对于基本成分(感觉等)的简单联合而形成的加法复合体，而是从一开始就是一个整体(例如，几何图形立即组织起来并从背景中独立出来)。所以，这种整体的存在是一个一般性的事实，但是，我们首先必须区分(与"格式塔心理学家"假设的所有心理结构的自然整体相对)两种类型的整体——它们之间不可相互简化为对方，我们只对第二类整体感兴趣。另外，有一些结构，我们仍然可以称之为"格式塔"，其特点是它们的非加法复合体①以及不可逆性(所以，知觉错觉是不可抵消的转换)。在我们的空间图形知识中，这些格式塔几乎可以被看作是一般原则，除非考虑几何直觉的发展形式，在这种情形下，形状从属于运算。至于与动作和运算有关的知识，它们的终极形式也是系统的整体，具有整体性特点，但是它们具有呈现加法性和结合的可逆形式倾向。

例如，在发展的所有水平上都存在行为的分类形式，要么是可以辨别的水平，要么是蕴涵在动作的其他形式中：被试要么对客体进行分类，要么以某种方式对它们施加动作(抓，平衡等)，但是这些动作也表明一种分类(例如，可以抓的客体，以及不可以抓的客体等)。现在，显然在所有的水平，分类单位(不要说种类，因为在很长一段时间内，只有组织不良的种类或者"前种类")之间并不是相互独立地存在，并且从一开始，只有一个系统，不完美也好，精巧也罢。我们已经在感知运动水平观察到这样一些系统：例如，我们给 8—10 个月的孩子一个客体，孩子会抓、吸吮、摇晃(看看能否发出声音)、在摇篮边上摩擦等等，似乎为了理解它的性质，孩子成功地把这个客体合并进了可能的动作种类或者格式中。现在，在各种格式之间有多种结构关系：能够抓的东西都可以看见，但反过来却不然；所有能够听见的东西都能够看见，但反之不然；有些物体既可以看见也可以抓，有些物体有第一个特性而没有第二个特性，有些有第二个特性而没有第一个，有些则二者全无。总之，存在一种感知运动动作的系统性综合，它有某种分类结构，也许很简单和初级。在后续的水平上，将会增加一定数量可以区分的种类，可以把客体分为空间群，它们会相互重叠、相交等，其后我们会看到简单加法(结合与重叠)或者乘法形式(同时依据两个标准的双项表)的分类发展。在所有水平上，这些分类将表现出它

---

① 例如，如果一条直线 A 被一条不同的部分 A'(比 A 短)延伸，那么，与 A' 相比，A 被过高地估计，因此与 A 不相等：所以，$A(A')>A$，其中 $A(A')$ 是 A 与 A' 相比。

们结构上的整体性规律，我们将证实，它们的组织形式将越来越表现出两个基本特点：某种加法性（$A+A'=B$ 等）和某种可逆性（$B-A'=A$ 等），这会使得这些系统比简单的“格式塔”更加灵活也更加清楚。

我们可以讨论关系系统的相同内容。从感知运动水平开始，儿童就可以堆积木 A，B，C，…按照外形大小递减 $A<B<C<\cdots$，这就按照实际的动作形成了一个序列模型（不用表征）。这些系统在具体运算水平又得到进一步的精致化：在 5 岁时，50%的被试已经能够画楼梯，而同时让他们按照从小到大的顺序排列一组木棍时，他们却无法完成这一动作。在（2）中以及 46 部分中①讨论的运算序列紧随这一水平。

同样，一一对应等也为早期的结构形成让路，要么以性质对应形式（例如，A 对应 A'，B 对应 B'，C 对应 C'，等，因为每对都有共同的性质；或者 $A<B<C<\cdots$ 对应 $A'<B'<C'<\cdots$），要么以任意对应的方式（一个单位对应任何一个单位）。

（2）现在，这些系统不仅表现出了作为系统的整体规律（结构存在的首要条件），也表现出（第二个条件）独立于这些客体——这些条件的适用对象——性质的规律。所以，现在有必要澄清这些运算结构的规律性质。

但是，首先需要说明的是，因为我们只关注发生结构，所以为了说明这些运算的心理结构，我们不想建构关于结构最一般的可能模型，而是想发现最基本的动作结构，这种结构包含着最严格的结合方式以及最具体的自然功能。不过，这些结构表现出一定程度的一般性（无论如何严格），这并不是观察者寻找一般性的结果，而是来自这一客观事实——被试在他们那个特定年龄（大约 7－8 岁）获得的基本结构或者发现的平衡具有相对一般性。

事实上，观察和实验都已经表明，如果我们用“运算”动作来表达内化的、可逆的（就可以双向实现的意义而言）并且可以被整合进结构整体中的动作；用“具体”运算表达那些发生在对客体的操作，或者与语言相伴的表征，但不涉及命题或者言语陈述（与后者有关的运算被称作“假设演绎”，它们与任何此类操作无关）；那么，具体运算水平的所有结构就可以约简为一个模型，我们可以把它称为“群集（grouping）”。

由于其多重限制，一个“群集”是一个缺乏逻辑一般性的系统，所以，只有心理学对这一概念感兴趣，这主要得益于它的基本特点以及它自己受限制的性质。但是，由于它看起来有点像其他结构的心理学起点，或者更准确地说，它是各种最初结构的共同形式，所以，有必要对其形式化，以便让后续讨论更加明晰一点。这就是我们的合作者，逻辑学家格里兹所做的工作。②

---

① Inhelder and Piaget, *La genèse des structures logiques élémentaires*, Classifications et seriations, Neuchatel-Paris, 1959.

② 见 J. B. Grize, “Du groupement au nombre: essai de formalisation,” *Etudes épist. génét.*, Vol. XI, Paris, 1960, pp. 69-96, in particular pp. 72-81.

Ⅲ. 假设一个系统($M,\rightarrow,+,-$)，其中，M 是一个非空集，$\rightarrow$是一种关系，$+$和$-$是两个二进制的运算。我们指定 X,Y,Z 为变量，它们从 M 中获得值，并且有两个定义：①

$$(D_1)\ X \leftrightarrow Y = \text{df.}\ X \rightarrow Y \wedge Y \rightarrow X$$

$$(D_2)\ X \rightarrow_1 Y = \text{df.}\ X \rightarrow Y \wedge \sim(X \leftrightarrow Y) \wedge (Z)(X \rightarrow Z \wedge Z \rightarrow Y. \supset. X \leftrightarrow Z \vee Y \leftrightarrow Z)$$

关系$\rightarrow$可以被读作“被包含于”，$\leftrightarrow$表示等价，它是偏序的一种关系。关系$\rightarrow_1$可以被读作“被立即包含于”。

如果满足下列条件，那么系统($M,\rightarrow,+,-$)就是一个群集：

(Refl) $X \rightarrow X$

(Trans) $X \rightarrow Y \wedge Y \rightarrow Z. \supset. X \rightarrow Z$

(G_0) 如果 $Y \varepsilon M$，并且如果 $X \rightarrow Y$，那么(a) $X \varepsilon M$

如果 $X \varepsilon M$，并且如果 $X \rightarrow_1 Y$，那么(b) $Y - X \varepsilon M$

(c) $X + (Y - X) \varepsilon M$

我们看到，G_0(b)和(c)用来限制可能的结合。

$$(G_1)\quad X+(Y+Z) \leftrightarrow (X+Y)+Z$$

$$(G_2)\quad X+Y \leftrightarrow Y+X$$

$$(G_3)\quad X \rightarrow Y. \supset. X+Z \rightarrow Y+Z$$

$$(G_4)\quad X \rightarrow Y. \equiv. X+Y \rightarrow Y$$

所以，G_4 表达了再吸收的原则，其中拓扑是一个特殊情况。

$$(G_5)\quad Y \rightarrow X+Z. \supset. Y-X \rightarrow Z$$

尽管有重言式，G_5 容许运算(－)作为(＋)的逆运算，并且无须引入否定的类。

$$(G_6)\quad Y \rightarrow X+(Y-X)$$

G_6 用来限制系统的结合性，而无须对后者有太多的削弱。

$$(G_7)\quad X \rightarrow_1 Y. \supset. X \rightarrow Y-(Y-X)$$

G_7 容许对“连续性”成分之间的差异进行限制(一步步地结合)。

$$(G_8)\quad \text{有一个 } O \varepsilon M\text{，所以 } O \rightarrow X$$

所以规定，一个群集不能约简为一个组，其原因有二：首先，在一个组中，两个系统的成分 x 和 y 通过它们的结合 $xOpy$(Op 是组的直接或者逆运算)产生系统的第三个成分 z，而无须借助于 x 和 y 的中间物，并且这一过程是完全自由的。在像 $A+A'=B$；$B+B'=C$ 等这样的群集中，基本成分只能连续地结合，所以是一步一步地(例如，$A+C'=D-B'-A$)，系统的自由也受到限制。第二，一个组是结合的，而群集的结合性

① 使用下列逻辑符号：$\sim$(非)，$\supset$(蕴涵)，$\equiv$(等价)，$\wedge$(合取)，$\vee$(析取)，(　)(优先组合)，(E)(存在数量词)，ε(成员)。

(associativity of a grouping)受制于不同概念的结合，$(A+A)-A$ 不同于 $A+(A-A)$。

此外，一个群不能约简为一个完全的格，因为在添加的群集中如果上限是明显的，那么所有的低限将会失效。另一方面，群集的结构包含准格。

从心理学观点来看，这些限制有重要意义：结合——排除一步步的形式——实际上表达了演绎力量的开始，尚未从具体运算中脱离出来，所以只能通过连续重叠而无须得到一个联合系统的方法来进行。相反，在接下来的假设演绎运算水平（从 11－12 岁阶段到具有平衡水平的 14－15 岁）会表现出一个联合系统的基础性的新特点，这将成为命题运算结构开始的显著标记。由于四种基本运算（$p\cdot q \vee p\cdot \bar{q} \vee \bar{p}\cdot q \vee \bar{p}.\bar{q}$）的结合而产生了 16 种双值逻辑命题的二进制运算，它们只是一种简单乘法类别中的一个基本群集。

Ⅳ. 如果我们将那些不具有结合特点（所以不包括布林代数中的所有可能的运算）的群集称为"基本的群集"，那么我们必须注意，从具体运算水平开始，它们的结构就表现出某种程度的一般性。这个结构存在于八个不同的系统中，它们都表现在 7－8 岁到 8－12 岁孩子的不同水平的行为中，并且根据是种类问题还是关系问题、加法类别还是乘法类别、对称对应还是非对称对应予以区分：

		种类	关系
加法	非对称的	Ⅰ	Ⅴ
	对称的	Ⅱ	Ⅵ
乘法	联合单一的	Ⅲ	Ⅶ
	双单一的	Ⅳ	Ⅷ

这里是对群集问题的一个简要描述。① 群集Ⅰ只是简单的包含（例如，"虹鳟鱼"包含在"鱼"中，包含在"动物"中，包含在"生物"中）；群集Ⅱ相当于"地理分隔"（例如，"瑞士人加上所有在瑞士的外国人＝荷兰人加上所有在荷兰的外国人"）；群集Ⅲ是有两个或者更多条目的表格（例如，按照圆形或者方形以及红色或者蓝色对客体分组）；群集Ⅳ相当于家谱图（其中一个维度是祖先、儿子、孙子等等，另一个维度是兄弟、姊妹等等）；群集Ⅴ是顺序排列（传递的非对称关系序列）；群集Ⅵ是对称关系的结合（传递和非传递的）；群集Ⅶ是两个涉及相同关系的序列的积（在按照相同的关系组织的两列客体之间的序列对应，例如，较大玩偶和较大玩偶与较长棍子和较长棍子相对应），或者两个涉及不同关系的序列的积（例如，对物体同时按照重量和体积进行排序摆放）；群集Ⅷ在术语类别中对应于群集Ⅸ中的谱系关系。

为了结束对初级知识的介绍，我们需要注意，如果自然数系统看起来与这一群集的基本结构无关，那么有可能(1)在具体运算阶段获得的近似形式的自然数结构是通过对群集Ⅰ和群集Ⅴ的综合得来的；(2)如果我们像格里兹(J. B. Grize)那样对群集概念进

① 更多详细内容，请见我的《逻辑通论》，Paris，1949。

行公理水平的形式化——与它的自然限制相对应，那么就有可能通过结合它们的运算而形成一个关于群集Ⅰ和群集Ⅴ的“综合体”的一致规则，这就会产生这些限制并允许我们推论皮亚诺(Peano)的五个公理(包括递归)。

46. 可逆性的两种形式(倒置和互反)以及它们在四种转换群中的终极结合

已经解释了这么多，我们刚刚给出了概略的描述，现在回到我们的问题，是否在自然基本结构与布尔巴基的矩阵结构之间存在关系。

到目前为止，我们仅仅描述了“群集”的基本结构的最一般特点，也就是说仅仅说明了在基本的运算结构中需要接受的一般限制形式。另外，我们还要依据更重要的特点对它们进行分组，即，那些将在后续结构的建构中起限制作用的成分被移除。现在，从后续结构的视角出发，运用两个对分法，第一个对分法是，它们是否使用可逆性的可能的不同形式(反演和互反)(inversion and reciprocity)中的哪一个，第二个对分法是，是否从离散成分——把它们结合成整体使之成为升级的“类型”——或者从连续的整体——将它们予以划分，使之成为降级的“类型”——出发。第一个对分法让我们能够区分那些分别与代数结构和顺序结构相类比的结构，第二个对分法让我们从那些并不指向连续性并且可以还原为第一个对分法中的两种情况中区分出那些拓扑结构。

Ⅰ. 我们把反演(inversion)称为可逆性的形式，它执行一个与运算 T 相对应的反演的运算 T^{-1}，二者相互结合后相互抵消。所以，类的加法群集(additive grouping of classes)的可逆性特点的形式是：$+A-A=0$，也就是说，如果被试给种类 X 添加种类A，然后减去它，那么效果是既没有加也没用减。这也就是说，在反演这种可逆性的情况下，对直接对应的相反运算的结合会产生中立的或者相同成分的系统，即对类的加法群集没有效果($+A-A=0$)。

对于互反的可逆性而言，它是关系加法系统的一个特点。我们将从主体角度而无须考虑逻辑学用法来描述它，因为它仍然是一个“自然”结构的问题，并且我们将寻找与布尔巴基结构类似的结构。而且，我们将区分关系的互反与这些关系的运算的互反。

至于关系本身，我们将用一般方式描述，互反包括要么是关系 $A<B$ 的术语的顺序改变，要么是反演关系($<$变为$>$)，或者二者兼有。以下是三种形式的互反，R，R'和R''：

$$R(A<B)=B<A$$
$$R'(A<B)=A>B$$
$$R''(A<B)=B>A$$

所以，$R=R'$并且$R''=RR'=RR$。

我们将在顺序中说明加法关系，在两种不同关系同时存在的情况下说明乘法关系，

如“较小×较重”，等等。假如我们把关系($A<B$)与它的 R，R' 和 R'' 结合，结果如下：

(1) $(A<B)+(B<A)\equiv(A=B)$ 在关系是 $\leqslant$ 的情况下也是真的

(2) $(A<B)+(A>B)\equiv(A=B)$ 同上

(3) $(A<B)+(B>A)\equiv(A<B)$

所以，在三种情况中没有取消，但是结果要么是相等，要么是关系与开始时相比没有改变。

如果我们现在寻找适合于非对称的传递关系(序列)的加法群集的可逆性，我们将对关系 $A<B$，$A<C$，$A<D$ 等用 a，b，c 等符号化，关系 $B<C$，$C<D$，$D<E$ 等用 a'，b'，c' 等进行符号化。那么群集将允许我们不仅仅考虑关系<或者>等，而且可以考虑它们值的大小差异，条件是在考虑到 a，b，c 的关系的情况下：

(4) $a<b<c$ 等等。但是，$a\gtreqqless a'\gtreqqless b'$ 等等。

对于 a，b，c 而言，就有了苏佩斯所说的一个“超级序数”(但是，其结构并没有在考虑 a'，b'，c' 等的情况下达到这一水平)。

我们指定符号－代表逆命题 R''(令 $-a$，$-b$，$-c$ 是 $B>A$，$C>A$ 等)，通过这一步，我们将讨论相反意义序列的心理运算。首先，我们有以下一些直接的结合：

(5) $(A<B)+(B<C)=(A<C)$ 等等。令 $a+a'=b$ 等等。

如果我们同意(通过符号惯例)将结合、关系——将第一结合关系的第一个术语与第二结合关系的第二术语结合起来——作为结果接受，那么，逆命题如下：

(6) $(A<C)+(C>B)=(A<B)$　令 $b-a'=a$

$(A<D)+(D>C)=(A<C)$　令 $c-b'=b$

等等　等等

据此：

(7) $(A<B)+(B>A)=(A=A)$　令 $a-a=0$

$(B<C)+(C>B)=(B=B)$　令 $a'-a'=0$

等等　等等

但是，甚至可以说适用于这一系统的可逆性不能够约简为无效：被指定为 0 的关系并不是对一种关系的抑制，而是对一种差异的抑制，这导致了一种平衡关系($A=A$)。

所以，从群集的“自然”结构的观点来看，存在两种不可约简的可逆形式，一种出现在种类的加法群集中，另一种出现在关系的序列中。

至于乘法群集，初看起来，逆运算似乎与种类的群集和关系的性质相同。如果我们把乘法看作是根据两个或者几个类别同时对客体群集的运算，或者是在它们之间同时引入两个或者几个关系系统的运算，那么在效果上来看，逆运算将从乘积出发，并且提取出一个或者几个类别或者关系系统。将这些运算运用于成分 A 和 B，就有如下结果：

$$A\times B=AB \text{ 并且 } AB:B=A \quad \text{或者} \quad A(a_1)B\times A(a_2)B=A(a_1a_2)B$$

$$\text{并且} \quad A(a_1a_2)B:a_2=A(a_1)B$$

意思是，在相反的关系中："类别 B 被提取了出来，$AB's$ 是 $A's$"并且"关系 a_2 被提取了出来，并且 a_1a_2 被约简为 a_1"。

这样看来，提取(:)似乎既不是求逆(因为它没有减少类的成员，而只是停止在被抽象的类别中结合)，也不是互反(因为它没有反演一种关系并且局限于提取这种关系)。但是，如果我们把类别的乘法与它的反演结合，我们得到类别 Z，系统中最一般的类别：

$$(\times A)\cdot(:A)=Z \quad \text{因为} \quad A=AZ$$

例如，从生物 Z 中选出一个特殊的类 A，然后提取出这个类别，它的成员(无须其他的描述)现在只是 Z 的成员。

另外，通过忽略两个术语的非对称性关系，我认为它们是一种不确定的关系。

$$A(a)B:(a)=A(x)B \text{ 其中}(x)=\text{不确定的关系}$$

所以，在两种都保留的情况下，类别或者关系的成分就汇聚起来，在类别的情况下，我抑制了一种类别，在关系的情况下，我抑制了对关系的说明。不过，在类别的情况下推理仍然是真的，它们的结合会回到成分，会吸收系统的最一般的成分(就像吸收 $A+Z=Z$)，而在关系的情况下，结合仅仅导致提取。

Ⅱ. 所以，从加法的观点或者甚至(尽管不太明显)从乘法的观点来看，当我们仅仅考虑被认为存在于主体的行为中单纯的或者自然的形式，例如，在他的群集或者排序行为中(即，在行为的绝大多数基本形式中，它们的出现要早于语言)，那么在种类的结构和关系的结构之间存在着实质差异。目前，无须确定第一个自然结构的二元性在多大程度上与布尔巴基的代数结构和顺序结构相对应，让我们来关注这两种最初结构在心理发展过程中的三个最重要的事实：

(1) 从它们的性质，或者从性质的内容得到的命题(没有内部的命题运算)来看，只要它是操作客体的问题，那么这些结构——可逆性的各自形式是倒置(类别)和互反(关系)——就与后续的假设演绎运算的结构(12－15 岁)相独立。所以，在具体运算水平，儿童不具备同时包括反演和互反的结构，但是每一种情况可以运用到这个或者那个结构上(或者一起，但是没有将它们结合起来，以便让他从一个转移到另一个)。

(2) 相反，当性质被提取后，就像在开始数数时一样，每个成分被当作是独立于性质的一个单位，我们看到了种类结构与关系结构的第一个结合体形式：事实上我们将看到(第十一章，56 部分)心理意义上的第一个自然数的结构源于一个在连续类别包含与系列化的单独系统中的"综合"(群集Ⅰ和Ⅴ)。

(3) 在假设演绎运算开始时(对涉及假设的命题进行推理而无须考虑内容的真实性的能力)，我们看到有一种新结构出现了，它来自于对包含反演的结构和包含互反的结构的结合的第二种形式。我们将不再像数字形成中的情形那样用"综合"(synthesis)这个词，而是用"结合"(combination)来表达，其意思是，新结构，一方面，包含反演形式

的转换 N,另一方面,包含互反形式的转换 R,二者仍然有区别,但是可以结合到一起,这与阶段(1)发生的情况相反。

为了方便讨论这种新结构,我们将使用命题的双值逻辑的常用记号,但是要强调的是,这绝不意味着,被试自己使用这些规则与逻辑学家使用公理相当,也不能说对运算的自然使用——我们记为$(p\supset q)(p\vee q)$等——与逻辑学家使用的方法相符。我们只是表明①,在假设演绎阶段,前青春期或者青春期的被试不再把自己局限于从简单包含或者从序列等进行推理(45 部分结束时提到的 8 种群集)。但是,根据与组合系统一致的不同可能性,最后还是基于 4 个基本关联(AB,$A\bar{B}$,$\bar{A}B$ 和 $\overline{AB}$)的 16 个可能性。这 16 种可能性与 16 个二进制运算相对应,这有可能形成两个命题 p 和 q 以及它们的否定命题。所以,我们将使用普通的命题符号来指代它们,而不是为这些“自然的”命题的结合建构一套特殊的符号,但是,请允许我重复一下,无须假设形式结构和自然结构之间存在一致性,除非两者都包含相同的初级结合系统。我们也将按照类别写出这些结合,与布尔代数(Boolean algebra)的框架相同(与“基本群集”的限制结构相反),但是由于被试不再结合客体(像在“具体群集”水平一样),而是用口语表达假设,所以,根据命题来代表它们更为方便一些。

将我们自己限制在结构的代数范围中,无须借助于公理系统,那么我们发现,主体的行为似乎与这些命题运算中的任何一个都是一致的,一方面是反演运算,另一方面又是互反运算(在它们是有区别的情况下)。例如,根据前述的标准,$p\supset q$ 对应的反演是 $p\cdot\bar{q}$,它的互反是 $q\supset p$,即,运算 $p\supset q$ 与它的反演结合,导致其失效$(p\supset q)\cdot(p\cdot\bar{q})=0$,它与自己的互反结合产生了一个等值$(p\supset q)\cdot(q\supset p)=(p\cdot q)\underset{\subset}{\supset}(p\cdot q)$。

当然,主体并没有思考他所使用的运算,他也不能将它们用公式表示。正如我们在(I)中强调的,我们在此讨论的结构并不是作为明确的“概念”而存在于主体的意识层面中,而只是表现在他们的行为之中。所以,正是观察者而不是主体注意到它们,并用公式表示它们,使之适用于一个模型。例如,在 $p\supset q$,$p\cdot\bar{q}$,$q\supset p$,$\bar{p}\cdot q$ 这种特殊情况中,观察者将发现,在面临复杂的因果情景时,主体会问自己两类问题:(a)是否事实 x 意味着事实 y[他自己经常用两个命题来表达这两个命题,我们称之为 p 和 q,他会用“如果(p),那么(q)”来表达]。为了证实它,他会去发现是否有一个反例 x 和非 y,即 $p\cdot\bar{q}$。(b)他还会问,是否真的是 x 意味着 y,还是相反,y 意味着 x,我们将这种情况用符号表示为“$p\supset q$ 还是 $q\supset p$?”。他还会设法通过寻找是否有反例 y 和非 x 来证实这一假设“如果 q,那么 p”,即 $\bar{p}\cdot q$,但是只有他懂得 $\bar{p}\cdot q$ 的结合排除了 $q\supset p$,并且与 $p\supset q$ 相一致。总之,这一思维过程表达了他对两种相反过程的结合:反演(或者否定)与互反。

现在,这种新事实具有基础作用。直到这一发展阶段,我们在主体的行为中只能观

---

① 见 Inhelder and Piaget, *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, Paris, 1955.

察到局限于可逆性的结构，要么是反演（对种类的群集），要么是互反（对关系的群集）。相反，随着命题结合系统的出现，我们看到一个复杂的[1]结构逐渐出现，它能够在一个系统中结合两种联合——两者更加独立。那么，这一系统有哪些规律呢？

让我们首先用命题函数的语言来描述它们（为了理解它们），因为我们正在努力寻找抽象的术语来描述结构，使之与被试的行为相对应：

令存在一个函数，如 $p \supset q$，其普通的析取形式是 $p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$。我们可以称反演 N 为产生其否定式 $N(p \supset q) = p\bar{q}$ 的转换。我们可以称互反 R 为包含了在普通形式上对基本命题的否定，但是保留函数子（·）和（∨）不变的转换。令 $R(p \supset q) = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee p \cdot \bar{q} \vee p \cdot q = q \supset p$。我们称相互关系 C 为包含在一般形式上序列改变的（∨）和（·），基本命题保留不变的转换。令 $C(p \supset q) = (p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q}) = \bar{p} \cdot q$。最后，我们称恒等 I 为表达不变的转换：$I(p \supset q) = p \supset q$。然后就有：

$$NR = C;\quad NC = R;\quad CR = N;\quad NCR = I$$

这是一个有四种转换的交换群（克莱因的“四元群”）[2]（Klein's “Vierergruppe”）

在主体的行为中，这一系统的存在不仅表现在他的探究方法中——我们刚才讨论过的（x 意味着 y 吗？等等），而且还体现在对当时的儿童而言难以理解的组织过程中，因为它们需要两个可逆性，且必须同时具有分辨性和合作性的合作。例如，在液体的重量和阻力之间的平衡方面，对于被试而言，仅仅明白重量或者阻力可以增加或者减少是不够的，他必须明白存在一种补偿关系——当与它结合时，补偿关系与反演有区别（例如，液体阻力的减少与重量的增加产生同样的结果）。同样，在相对运动系统中（身体沿着甲板的一个方向运动，而甲板同时以相同或者相反方向运动），我们必须结合反演和补偿。总之，我们在 11－12 岁孩子那里看到了一定数量的新运算格式的形成，它们的共同特点是反演与互反的合作（后者的出现是为了补偿、对称等），其表现形式依赖于结合的形式以及逐步实施分组的步骤（不仅仅限于此）。那么，如果我们想要以用描述分类、序列或者本阶段一致性的一般性特点的方法，来从这些新系统中分离出转换来，我们又一次在各种情况下发现了同样的群结构 INRC。

47. 儿童几何学中的基本拓扑学

我们还有第三个基本结构，它与类别和关系一样简单，比刚才讨论的复合结构（第四部分）出现的早得多。如果我们想要在具体运算水平创新性地提出被试的逻辑数理

---

① 从发生的角度看，它源于前者，因为结合系统只是地理分隔的一般化，其发展同时出现在相互独立的几个领域（分类，客体的结合，假设，等等）。

② 关于约束命题运算的 INRC 群，请见皮亚杰：《逻辑通论》，Paris，1949，第 27－268 页以及皮亚杰：《论逻辑运算的转换》，Paris，1952，第二章。

运算，并且从表征开始时就去重设它们的形式，事实上我们将发现，除了那些影响离散客体以及组织客体或者给客体赋予顺序的动作或运算之外，还存在一些动作或者运算，它们用来分隔或者再结合客体，使客体成为一个整体。这些运算与时间和空间有关，我们需要知道这些运算是否与之前的运算相同，它们是否运用于连续体上；或者，它们是否包含不可约简的特点：换言之，是否空间和连续体是运算的不同作用对象而已；或者，它是否是一个运算问题——它是空间的恰当组成成分（在这种情况下，后者不受知觉的限制），因此，包含了以它们自身恰当的形式构成的连续体——而非仅仅作为材料内容。

首先要考察的是学校教的几何学，我们也许以为，只要掌握一点逻辑学和一点算术，儿童就可以把它们直接运用到看到的图形上，所以，几何学只是数学在科学中的运用而已。但是，儿童在接受学校教育之前很久就已经掌握和运用动作几何学，首先要讨论的问题是，这种自发的建构过程是否与获得这种能力的历史顺序相近（首先是欧几里得几何，然后是投影，最后是拓扑），或者与理论建构的顺序相近（首先是拓扑学，然后通过一般度量而转向欧几里得度量，或者转向投影转换，然后是仿射转换，然后是距离守恒导致的相似性与替换性）。将几何学家使用的结构与儿童的初级的有限的结构进行比较很难让人接受。但是，对其中的一些共同成分进行比较似乎是合理的，这些共同成分，一方面是几何学家的“基础群”的不变量（拓扑转换的同拓扑；直线守恒，而非平行、角度或者距离的投射转换；平行守恒，但是并非角度或者距离的仿射转换；角度守恒，但是并非距离相似；以及距离替代守恒）；另一方面是由儿童在这些动作或者空间运算中逐渐获得的守恒概念，这些概念不是一般性质的基础“群”，而是特别的“群集”（与Ⅰ中的描述相类比而言），并且它的范围非常有限。

现在，观察和经验表明下列观点：

（1）在与替代有关的不变量形成很久以前（在7－8岁之前，长度变化或者距离变化中没有一个是在特定情景中守恒的）以及与投射转换（投射的线或者点）有关的不变量形成以前，我们观察到了一些性质方面的不变量，它们与邻域、开放和闭合的图形、重叠（内在的、外在的以及边界的）、连续与非连续、被认为是同拓扑和分隔的组织顺序（“之间”关系）等等有关，简言之，是一群基本的拓扑同胚。例如，在绘画的某个阶段，正方形、三角形等被表征为简单的封闭曲线（我们讨论的是表征，是绘画中的概念等，而不是知觉，它涉及其他问题），并且交叉线等被表征为直线的相交：在这一阶段，儿童可以画一个小圆在大圆内部，或者在外部，或者在其边上，但是却不关心角度等。

（2）欧几里得度量的不变量、投射的不变量、仿射性（在菱形的仿射转换中的平行守恒）与相似性是在同一阶段（7－8岁）建构的。

（3）合作的自然系统（水平轴和垂直轴）的建构同步于合作观（与两个或者三个而不再仅仅是一个客体相关），标志着具体空间运算的成就（只在9－10岁期间）。

简言之，与几何学发现的历史顺序相比，儿童的表征性（并非知觉的）空间的自发建

构似乎与理论建构的步骤更接近。①

所以，我们认为以下看法并不夸张，除了可逆的反演或者互反的结构，我们必须在所有基础阶段中区分出第三种结构，对此我们将研究它们的出现是否预示着代数结构和顺序结构的出现，这种结构的首要特点是拓扑性，它与其他结构的结合从而产生更为复杂的空间结构（度量等）。

48. 三种基本结构与布尔巴基矩阵结构的关系

如果我们承认在儿童心理中②存在三种基本结构，它们与类别运算（然后是数字类别等）、关系运算以及连续体的转换相对应，那么现在我们必须搞清楚，究竟在何种程度上以及在何种意义上，我们可以证明它们与布尔巴基的三种矩阵结构（代数结构、顺序结构及拓扑结构）相对应，并且认为后者源于"自然"。

我们的假设是，第一，鉴于它们的可逆形式是群结构中的反演（与直接运算结合，其反演产生了系统的中性成分）这一事实，我们假设"代数"结构与三种基本结构中的第一种相对应。第二，假设顺序结构与第二种相对应，其可逆性依赖于互反，恰如格的二元性规律中的情形。③ 第三，在基本拓扑结构中重新发现相对应的一般拓扑结构，但是，这些对应到底意味着什么呢？

用布尔巴基的话说，结构的"普遍特点"首先是"它们运用到性质未明的成分群中：为了定义一个结构，我们使用这些成分出现时的一个或者几个关系"……（或者这个群的部分之间的关系）："然后我们假设特定的关系满足特定的条件（我们列举的）并且它们是我们想象的结构公理。建构一个特定结构的公理理论就是推论结构公理的逻辑结果，同时需要限制其他任何假设——关于成分的考虑（尤其是任何关于它们恰当"性质"的假设）。"④

所以，我们定义的自然"结构"与发生观中的结构不同。但是，在这些不同之外，它们也有共同之处。让我们首先看看不同之处，我们将那些数学家使用的结构称为"*M* 结构"，而将发生观点研究的结构称之为"*G* 结构"。

(a) *M* 结构是数学家们思考的对象，他们为这些结构建构理论。而 *G* 结构既不是理论的研究对象，也不是主体的内省，主体甚至没有意识到它们是明确的概念，只是在行为或者推理过程中操纵它们，观察者可以成功地分析它们。

---

① Piaget and Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris, 1947; Piaget, Inhelder, Szeminska, *La géométrie spontanée chez l'enfant*, Paris, 1948.

② 并且只有三种是已知的，所有观察到的个别的结构被约简为这三种。

③ 通过对（·）和（＋）的置换以及关系"先于"和"后于"的置换，"$A \cdot B$ 先于 $A+B$"转换为"$A+B$ 后于 $A \cdot B$"。

④ N. Bourbaki, "L'architecture des mathématiques," (*loc. cit.*) pp. 40-41.

(b) 适合于 M 结构的条件是这些结构的公理，而在 G 结构中，那些适合该结构的条件包含在其运行过程之中，主体从这些结构中得不到任何公理系统。

(c) 这些条件是 M 结构中形式演绎的起点，也就是说，对于结构成分的性质没有任何假设，而在 G 结构中，这些条件形成了主体在推理过程中必须遵循的规则[主体无法确切表述这些规则，见(b)，并且，主体不一定会意识到这些规则，见(a)。这些推理本身也不是形式推理，因为在整个具体运算阶段，推理形式与内容仍然密不可分]。

尽管存在上述差异，两种结构之间也有一些相似之处：

(1) 虽然在一般性上要比 M 结构低[因为在(a)(c)方面的差异]，但是 G 结构可以作为许多不同种类的成分。

(2) 被认为是布尔巴基 M 结构中的"关系"对应于 G 结构中的"运算"，例如，"群"的结合律 $z=x\,\tau\,y$。

(3) 在 M 结构中的这些关系的"条件"是 G 结构中的"结合律"，是它们赋予 G 结构整体性的特点，例如，在类别结构中的倒置($+A-A=0$)体现出的可逆性以及关系类别中的互反。

在这种情况下，我们可以用描述布尔巴基矩阵结构 M 与三者基本的 G 结构之间的对应性的术语，这个术语并非形式上的同形性(从发生和效度的观点来看并不支持形式上的同形性)，而是发生方面的分析：

(α) 三个基本的 G 结构涵盖了所有的自然结构，而且数学家们只通过"自然"思维建构数学实在，他们通过一系列连续渐进的抽象而非源于经验客体(知觉等)，通过数学家本人施加于这些客体的动作和运算来予以完善。既然我们接受这一假设，那么，可以认为，这些数学实在的建构过程是由三个基本的 G 结构的特点所决定的。

(β) 接着，逐渐地进行"准归纳"的比较，以便确定那些已经形式化的不同数学理论的共同结构，布尔巴基学派的数学家将发现一定数量的一般"关系"并确定它们的"条件"[见刚刚讨论的(2)和(3)中的相似之处]。

(γ) 但是，由于从事这一反思性分析的出发点是结构的一个具体的理论，并且其目的是对这些结构进行公理化，所以，数学家从一开始就会倾向于最大一般性。另一方面，由于数学家不仅掌握通过自然的非数学的思维获得的少数基本的具体结构，而且还掌握大量的数学结构——它们之间没有明确的区分，所以，他会从这些结构中发生的动作和运算出发，立即达到较高的抽象水平。

(δ) 所以，有必要指出，从动作和运算出发的抽象(我们称之为"反省抽象")与来自感知的客体的抽象(我们称之为"经验抽象"——认为非知觉客体是运算的产品)是不同的。

事实上，经验抽象是从一类客体中获得共同的特点(通过对抽象的结合以及简单的一般化)，与经验抽象相反，反思性抽象从较低水平的动作和运算系统中获得某些特点。这一事实并非科学思维独有，它已经是整个智力从层级水平转化到下一个水平(我们将

在第五章，52—53 部分重新回到这个问题上，解释"纯"数学的心理发生问题）的整个发展过程的特点。简言之，反思性抽象通过重构与以前的结构结合并有所超越。

(ε) 所以，数学实在的建构是自然思维成分的扩展，M 结构的建构是对特殊的数学实在的扩展。M 结构比 G 结构更一般，这一事实并不能排除前者源于后者的这种发生关系。

总之，以上对于布尔巴基意义上的矩阵结构 M 与 G 结构关系的讨论，使得我们放弃了两种一般性的误解——它影响了从主体的行为中来解释数学的尝试。我们首先假设，如果逻辑数理实体依赖于主体的行为，那么在主体的自然思维的内省中去寻找就足够了。实则：

(1) 思考的顺序颠倒了建构的顺序：亚里士多德说"发生中首先出现的却在分析中最后出现"，克拉帕雷德在"意识实现律"中表达得更为清楚，对于动作中所使用的关系，如果它们越是原始和自动化，那么在意识中对这种关系的认识或者了解往往越是要被延迟（在没有遇到任何障碍的意义上而言，意识实现源于适应不良）。例如，一一对应在动作中是如此基本的内容，但是却在康托尔（G. Cantor）的作品中作为一个"反省"和运算概念进入数学领域；从感知运动水平就已经出现的群结构只是被伽罗瓦（E. Galios）等确立。

(2) 意识实现仅限于照亮完美的结构，不是对内心之光的投射，但是，我们已经发现，意识实现预设一种结构——在整合过程中，这种预设的结构会超越以前形成的结构，从而具有"映现"的性质。所以，将自然结构转化为数学实体的过程约简为内省确实令人难以接受，并且这些数学实体的发明者也许没有意识到他正在从自然思维中获得自己想要的东西，因为他正心满意得地利用（无须建构一个如何使用的理论）自己思维的无意识结构来进行建构。

另外，我们总是倾向于以唯心主义者的观点来解读对于数学创造的解释——其出发点是主体的行为，似乎主体能够与自己动作相联系的客体分离开，他只是相互作用系统的一端，而主体和客体在这一互动系统中仍然是相互依存的。这里不适合讨论这个问题，我们将在第十二章回到这个问题上，但是在这里有必要强调一下，如果发生论的解释不一定导致经验主义，那么它也同样不一定导致唯心主义的先验论。

第九章 逻辑数理思维的一般心理问题(续)

B. 自明性、直觉与发明

如果自然结构G存在,并且它们是布尔巴基的M结构的起点,那么我们就需要面对诸如自明性、直觉的多重形式以及发明还是发现等问题。

49. 自明性,它的变量与逻辑必要性

在第五章的结尾,贝丝提出了两个观点,这也正是我们开始讨论的起点。第一种观点涉及经验形式的多元性:除了不出现在纯数学中的实证经验之外,还存在一些特别的数学经验,他们形成了研究者智力构造的一部分,“以相同方式和相同主张——如他在其他不同领域中的经验一样”。比如说,习惯于用一种特定的方法解决特定种类问题的发明者将通过他的习惯性的经验来解决一个新的问题。在我们看来,这样的经历构成了数理逻辑经验的一部分——它们与“物理经验”相对,因为它们的抽象性特点涉及被试的动作本身,并且没有将客体排除在外(我们将在52部分重回这个话题)。

另一方面,贝丝在自明性的变量的可能性问题上与伯奈斯的观点一致,不过他设法逃避怀疑论的相对主义——我们也许设法从这个观点进行推断。贝丝提出了两种在理解方面的不同的整合,一种是“归纳的”或者是慢的,另一种是“抽象的”或者快的。贝丝强调了后一个概念在发生认识论中的重要性,我们将用自明性心理学的观点去重新考察这些重要性,事实上,这个概念与更广泛的数据相对应。

例如,我们很容易发现,处于前运算表征水平的儿童不相信关系的传递性:棍子A比B短,B比C短,但是问他们A和C的关系,除非让他们边看边回答,他们拒绝作出判断或者仅仅猜测,没有表现出所需的认知力。

类似地,斯梅斯隆(J. Smedslund)曾经在发生认识论中心研究涉及重量的运算是如何习得的,通过重复改变小的黏土球的形状——用天平称重——就会获得重量守恒,但

是运用同样的方法，他没有成功获得传递性。① 另一方面，在 7 岁时长度（一般而言要比重量的传递性稍微迟一点）获得了传递性，我们有时候在询问被试的过程中甚至能够观察到自明性的出现——我们称之为“顿悟”，贝丝称之为智力整合。

现在，在不等排序的传递性这种特殊情况下，很容易用结构——传递性与其相联系，即顺序排列（或者一列不对称的、相互联系的、可传递的关系）——的完成（或者说，闭合）来解释这种智力整合。我们已经看到（第八章，54 部分）顺序排列是儿童自己获得的系统群集之一。当给他 10 个左右的杆（10－16.5cm），要求按序排列，他开始（阶段Ⅰ）成对分组（一组小的，一组大的），或者每三个一组分组（不协调的），他不能够预先画出序列或者“阶梯”——他意欲建构的（无须实际动手建构）。那么，很显然在这一阶段尚未获得传递性。在阶段Ⅱ，他通过尝试成功地建构了序列，从 5 岁开始（50％的情况下），他预先画出了自己想要的序列，不过在实际操作中却运用试误法（画出是一种单向动作，而有效建构需要对关系＜和＞的协作运用）。在这个阶段仍然没有获得传递性，除非以一种貌似真实的或者可能预见的，但却是不必然的方式出现。最后，在阶段Ⅲ（6.5－7.5 岁），儿童发现了一种系统的方法：把最小的一个放好，例如 A（通过成对比较），然后是剩余客体中的最小的（B）（又是通过成对比较），然后又是剩余客体中的最小（C）。所以，被试预先就明白，任何成分 E 将在同一时间比已经放好的成分（A，B，C，D）要大，而比剩余成分（F，G 等等）要小。所以，在这一水平，对于传递性的理解是直接的，但是，就我们所知，按照结构整体的完成而言，其自明性对认知具有强迫性。

同样，我们可以引用一些与守恒有关的概念作为自明性的例子，它们尚未达到某个阶段：一组成分的守恒独立于它们的空间组织形式（聚在一起或者相互离得很远，等等），一组物体的基数的守恒与它们是否分为几个小组没有关系，棍子的长度的守恒与它是否运动无关，两个参照点之间距离的守恒依赖于它们中间的空间是空的还是多多少少被填充了，等等。自明性的形成与整体的结构相联系，尤其是与它们的可逆性相联系，说明这一点很容易：结构的形成是缓慢的、逐渐的，但是结构的完成或者闭合却是突然的、一时性的，其标志是建构过程的突然加速（依相对不连续性而定），这种加速也可以理解为新的自明性出现时新结构出现最终平衡的一种作用。

现在，如果从儿童的逻辑数理运算的形成水平来看，我们会看到自明性获得（或者失去）的情况与结构形成之间的关系，我们也许会认为它与思想史上的先验论相同。无须指向布尔巴基的结构，自明性总是毫无疑问地与一个系统或者与几个系统中的共同不变量绑定在一起，在此无须进一步讨论这个问题。

思维心理学和社会学本身可以为解决核心认识论问题有所作为，它们可以从标准事实的一般性、完全的相对主义，或者可以无须回到教条主义又可以避免怀疑论的中间

---

① Smedslund J.，“Apprentissage des notions de la conservation et de la transitivité du poids，” *Etudes d'epistemologie genetique*，1959，9：85-124.

立场等不同观点中让看到自明性变量的重要性。

首先,我们必须仔细区分两类问题——由自然性质的自明性所产生的问题和逻辑数理自明性所产生的问题,因为对一类问题的解决不能运用到另一类问题中。物理真理的特点在于可以用数学系统来描述其与实验数据的一致性或者矛盾性,那么,有时候一个决定性的实验就足够推翻一个被一直认为具有自明性的陈述:例如,迈克尔森(Michelson)和莫利(Morley)的实验推翻了绝对的、普遍的时间的自明性。但是,即使是在物理领域,在修正自明性的一系列实验中,偶然性扮演着重要的角色,但是这些实验的出现并不是偶然的:新的自明性更加符合要求,因为它成功地将以前自明性的一个方面整合了进来,例如,作为一个最初的近似值或者作为与特定的观察范围有关的事实。不过,关于物理自明性以前的例子很少,比如与亚里士多德的物理学(地心说,绝对位置等)有关的例子。

在逻辑数理领域,我们必须认识到某些自明性变量的存在,就贝丝而言,它追随伯奈斯讨论获得性自明性:例如,在欧几里得几何学的影响下形成并在19世纪以来一直被修正。但是,对获得性自明性的解释——被教条主义的绝对的、普遍的自明性所取代——在我看来,可以通过添加获得性过滤机制来避免陷入完全的相对论。如果我们将后者与儿童学习走路或者鸟学习飞行比较,这种比较会令人放心,因为这种获得问题是整合遗传行为的框架与种类的有机结构,但是先天在逻辑数理结构中的重要性甚微,我们将在51部分看到没有哪一类“直觉”可以逃出发展的规律。另外,如果我们将自明性的获得与个人习惯或者集体信仰的习得比较,我们会马上明白,我们面临的是完全的变化性。现在,我们无须求助于发生的和历史批判的方法来选择真实的自明性而排除假的(正如在27部分的结尾处贝丝所认为的那样),不过,我们可以从这些方法中期望得到一种先验分析,通过这种分析来表明自明性的获得以及不同类型之间的相继更替并不受不期而遇的实验数据的偶然影响(它可以为变化的学说辩护),而是遵循方向或者矢量规律——它们在事件之后可以重构。简言之,除了持续的状态以及偶发的更替,我们必须区分“定向的演变”(参见生物学中的直生论)与理性自明性——即使在心理发生和社会发生领域只有一个例子,它就是理性自明性:事实上,我们很难相信理性本身的进化不需要理由,理性进化的原因是除了理性之外的任何东西。

在明显的预期理由之下展现出这一假设——有一个事实表现出一般性,并且因此而依赖于历史和心理发生而非逻辑论证:这一事实是,自明性的新领域并没有完全废除以前的自明性,而是把它整合进一个新领域中作为二级领域。非欧几何的直觉并没有取消欧几里得的自明性,而只是限定了欧几里得的一般性。布劳威尔(Brouwre)在排中律以及归谬法中所证明的自明性危机并没有动摇与有限性等有关的、早期基于这些自明性原则的推理所带来的自信。简言之,多种自明性在逻辑数理领域中的更替并非一种简单的替换(在物理领域中,在某些情况下也是如此),而是一种整合,对一般框架进行扩充,赋予它一种无法预料的灵活性,并将以前的框架予以保留使其成为一个特

例。拉朗德(A. Lalande)区分了"构成推理"(constituted reason)——由获得性自明性构成与"成分推理"(constituent reason)——控制它们的发展,他发现,成分推理本身并不包含在先验框架中,相反,成分推理只具有我们刚才讨论的整合功能,并且这种推理无须提前清晰地说明整合所采用的形式[与拉朗德和梅耶森(E. Meyerson)的定义相反]。

所以,问题又回到了自明性实际获得的一般性上,并且只有在这一领域我们才指望能够从发生方法得到一点帮助。现在,从发生观点来看,我们知道只有四种可能的获得机制(在第十二章的68部分我们将讨论这一问题)。

(1) 由于内部神经系统的成熟而出现渐进的调整:例如,视觉与抓握的合作,行走能力的获得等[而且,每一个具体的例子需要因素(2)以练习加成熟的部分干预]。

(2) 学习作为经验,或者练习,或者经验和练习的一种功能:

(a) 作为一种身体经验的功能,从客体中抽象,例如,重量概念的获得。

(b) 作为逻辑数理经验的一种功能,从动作开始抽象:例如,发现总数与排列顺序无关(加法交换律)。这种功能(2b)通常在(4)之后出现。

(3) 获得作为一种语言概念,以及作为一种教育或者社会传递功能:例如,口头数数能力的获得。

(4) 通过逐渐的平衡获得自明性:例如,发现一个小面团的物质守恒——其形状是可变的,物质守恒先于重量守恒和体积守恒,这一点是无法用实验证实的。那么,这种自明性的获得源于这样的事实——被试并没有将自己仅仅局限在对形状的判断上,而是开始以越来越可逆的方式思考转换(在引入可逆性转换的意义上)。现在,涉及转换的推理本身成为平衡的结果,这意味着被试的反应可以抵消外部的变化(例如,通过想象相反方向的转换)。

这种平衡也许可以按照相继的可能性来解释(一旦前一阶段的反应已经形成,那么每一个阶段的反应将成为最大的可能),并且这种平衡通常是获得种类后的延续(2b)。

这样就很容易说明,如果逻辑数理自明性的大部分种类是通过社会活动巩固的[参见(3)],那么它们的发生则在社会生活之外,假设其源于一种从动作[参见(2b)]开始的抽象经验或者一种平衡(4)。例如,运动中的大小(长度或者面积)守恒,它是被欧几里得使用但非他所创造的概念,是不可能纯粹来源于社会活动(例如,在语法规则的意义上),即使它是通过教育传承来巩固的。这种守恒也不是以纯粹的经验方式形成的[在(2a)的意义上],因为没有一个测量可以保证我们的测量工具具有恒定性,如果我们已经有了一个补偿系统——恰如纪尧姆(C. E. Guialme)的"不胀钢"(invar),它可以保证塞夫尔的国际计量局的标准米制的准确性,那么相应地,我们仍然需要将这一补偿系统植根于初始的理论框架之中。儿童首先不相信运动中的长度守恒,假如我们顺着儿童的这种守恒的渐进发展路径进行研究,我们会发现,由于受到诸如(2b)(例如,包括把方向和相反的运动结合起来)这样的经验背景的鼓励,守恒只是作为平衡的渐进过程的结

果而获得。例如,当两个棍子 A 和 B,儿童已经确认它们长度相同,两个棍子在运动,起初他不能确认 A 在 B 的一头经过 B 时与 B 在 A 的一头经过 A 时它们是一样长的,后来,他突然接受了这种相等以及长度的守恒,并将之作为把握这种情景的最简单的"策略"。但是,这种想法只会发生在他开始用可逆性来思考问题的阶段,例如,当他确信从 X 到 Y 的距离与从 Y 到 X 的距离相同,等等。至于这后一种自明性是如何获得的,我们发现,只要这种自明性被分离出来时理解它的获得方式就会遇到相同的困难,一般性的答案总是以结构的整体为基础——它通过满足内在一致性和补偿的要求而获得自身的平衡,最终达到了心理上满意的含义,并且同时达成了与经验的兼容。

总之,逻辑数理自明性只能作为结构的功能而发展,并且结构的出现只能作为经验——涉及从动作中导出的抽象——与平衡相互作用的功能而出现,或者只能作为动作合作的简单平衡的功能而出现。这就是为什么连续的各种自明性不会源于偶然性,而是包含了矢量或者方向律——表现在需要把较早的结构和自明性整合到新出现的结构中。至于这个方向律,它不可能源于一个一般的先验结构,也就是说,伴随我们动作的最初协作中的自明性,不可能源于一个所有结构的预形式,这个预形式已经潜在地包含了它们。正如我们已经强调过的(第六章,43 部分和第八章,46 部分),心理的发展受到一系列重构的影响,这种重构的结构都超越前者。在这种发展方式中,如果结构的建构过程中没有绝对的起点,那么我们就不能认为,最原始的结构包含接替它们的结构。所以,在动作的协调中观察到的最早的结构毫无疑问来源于那些已经存在于神经系统中的结构。例如,在麦卡洛克(McCulloch)的一篇著名的文章中,他指出,神经元联结表现出的结构可以按照命题函数和布林代数来表达。但是,这并不意味着大脑预先包含了在发展过程中需要建构的结构:后者在"建构"的本意上建构了自己,即,已经在较低阶段被精致化的较简单结构在更高水平被"反映"了出来,然后在这个更高水平上,由于它们整合了较早的结构,新功能的潜在可能性而充实了这些结构。至于那些最初的结构,如果它们是天生的,那么生物结构领域会找到相同的问题。

50. 发明与发现

结构问题与自明性的获得问题产生了数学发明的性质问题,这一问题让心理学家困惑了很长时间,但是,如贝丝所说,他们没有提出什么有启发性的建议。也许,在我们再度讨论它之前,我们应该等待贝丝所期待的对于数学家的客观的分类的出现,但是对我而言,似乎发生观可以让我们用不同的术语来表述问题,也就是说,它认为在发明(或者自由创造)与发现(或者与外部真实的不期而遇)之间可能存在一个中间物(tertium)。

首先我们需要注意的是,贝丝在 27 部分(启发式与论证)和 39 部分(问题陈述与解决)中所使用的双重对分法与智力的每一动作的三个成分或者智力的三种功能恰好相

对应，例如，如果我们所指的是比奈或者克拉帕雷德的发现的话。在后者的术语中，智力包括(a)陈述问题，(b)做出假设，并且(c)验证假设(实证的或者演绎的)。在逻辑数理思维领域以及其他领域中都发现了这三种基本成分，所以这一事实促使我们去发现智力结构的一般机制。

Ⅰ. 就数学发明而言，必须区分两个问题：产生新想法的心理过程问题与这种新想法的性质问题(是作为一个整体创造的，还是仅仅是一个事实报告)。第二个问题是区分"发明"与"发现"的关键，而第一个则相对独立于这一分类问题。根据贝丝的观点，可以看出(a)"庞加莱和阿达玛所描述的准备阶段不能产生恰当的无意识工作，除非这一阶段的意识水平的工作是以有效的方式在进行"，并且(b)无意识工作并非是纯粹自动的，而是"有自身的方向"以及"在准备阶段就受到方向的影响"。

与贝丝的目的相同，我们认为，在思维领域，甚至在更高级的水平上(并且，我们相信也包括情感领域)，没有什么比区分意识和无意识更与问题相关。无意识只是对我们运用内省方法无力解决问题的一种表达。不存在被一个边界分开的两个心理世界，①只存在一个心理领域以及心理的相同活动，在这一心理领域中，即使我们处于极度清醒的心理状态，我们也只能了解其中非常小的一部分(主要是心理活动的结果而非心理过程)，并且对于心理活动，如果我们不对其加以控制，它会稍纵即逝，了无踪影。赶快回到我们刚才提到的问题、假设和证实之间的区分问题上来，我们对自己提出的问题相对有清晰的意识(之所以说相对，那是因为我们不总是能够把这个问题与无意识中与其相联系的问题完全分开)；我们对于证明或者证实的阶段有更加清晰的意识，但是对于研究假设的建构过程则几乎完全没有意识到，所以即使在最简单的问题中，这一过程出现在意识领域就会让我们感到非常神秘。阿尔弗雷德·比奈(Alfred Binet)曾经尝试使用诱导内省的方法来研究智力，他失望地得出结论："思维是心理的无意识活动。"克拉帕雷德曾经运用出声思维的方法来了解"假设产生"的机制，他得出结论认为，这一问题不可能在意识层面的数据中解决。

对于数学发明过程，划分为"意识"和"无意识"，这一做法与我们的内省方法的缺点有关。勒雷(Leray)作为一个类型学家，曾经通过自己的经验来定义发明，他甚至认为(在普林斯顿的一个讨论"高级学习的原则"的发言中)，如果仔细考察，新颖的想法——其新颖性是发现的特点——似乎只是源于被启发的瞬间的无意识之中，因为我们已经忘记了我们以前见过它。勒雷认为，创造性工作首先包含的是一系列在不同方向的尝试，我们对这些尝试的重视程度不是相同的，有些似乎更可信(符合经典的思路，但是事实上却不能引导我们解决问题)，另外一些则更具冒险性质(正因为这一方向是全新的)。在后一种情况中，我们起初对于正确的想法没有足够的重视，所以，在意识层面的

---

① 这种边界来自于弗洛伊德提出的"检查员"，其作用仅仅在于拒绝看清我们自身的某些方面而已。

工作变得越来越拥挤，就像一个黑板，每一个角落都写满了东西。然后，我们完成了准备工作，进入第二个阶段，其特点是探究的终止以及庞加莱所说的无意识工作的开始。现在，根据勒雷的观点，无意识在此刻扮演着负面的角色：它从黑板上擦去所有无用的信息，只保留那些重要的信息。再度回到意识层面解决问题，我们发现我们只剩一点点可以利用的信息，并且那些曾经被我们忽视的信息现在看起来要比以前重要得多：在这种状况下，我们快速找到了问题的答案，如果我们感觉这一答案非常新，那仅仅是因为我们忘记了我们曾经不经意地见过它。

即使我们在数学上从未做出任何发现，我们还是会不由自主地认识到勒雷所描述的反复出现的思维的加工过程。例如，我记得我曾经发现过一个新的想法，于是，我努力去寻找它，我在一些忘记的笔记本中寻找，发现我的新想法早就写在笔记里，只不过这些新想法并没有与无关紧要的其他信息有效分离开。对儿童来说情况也非常相似，我们在运用自由提问法研究问题解决时经常发现，被试在相信自己的答案是正确答案之前很久就已经发现了这个答案，只不过在仔细考察了其他不太可能的假设后才又回到这个答案上而已（他并没有意识到这个可能性其实他早已发现，现在只不过是重新发现而已）。

但是，如果勒雷的观察指出了意识与无意识之间的界限具有变幻不定的特点，这一点似乎并没有使我否认无意识的存在：第一，因为从黑板上分辨出有用信息和无用信息的无意识给思维活动提供了证据，第二，因为在意识层面通过试误法所产生的假设却源于无意识。

我们必须充分认识到，无意识本身毫无疑问在表征思维水平（与纯动作无意识相对）没有创造出任何东西：由于思维的每一个过程都需要一个意识层面的搜索以及无意识的机制，如果想知道创造是有意识的还是无意识的，这只能让问题变得更糟。有趣的问题是去更加准确地定义（1）“意识实现”出现的环境，以及（2）缺口或者甚至是针对所有内省的系统性错觉（后者包括努力去促成意识实现而不是任其自发地出现）。

Ⅱ. 我们现在理解了为什么数学发明是真正意义上的发明（即，由被试的思维所创造），还是发现（即，被试遇到了在他搜索之前就已经存在的实在）这一问题不能够通过数学家的内省来解决。①

首先，在情感领域，内省有两个与自己的特性有关的缺点：（1）它是不完整的，因为内省经常无法觉察到在特定的历史时刻所体验到的情感的历史根源（参见心理分析）；（2）它是有偏见的，因为它在评价自己时常常要么对自己比较宽容（自我辩护），有时候又对自己过于苛刻（自卑感），大多数情况下二者兼而有之。至于智力领域，我们首先要记得，所有的行为，包括对最抽象的定理的证明，同时是认知的（对真理的探究）和情感

---

① 这并不是说，内省可以被忽视，否则发明问题以及大部分的数学问题都无法提出。但是，内省只能提出问题却不足以解决问题。我们将在总结论中再回到这个问题。

的(兴趣、努力、热情、沮丧、疲惫、美感等等)。但是,即使只考虑行为的理性方面,内省也同样表现出两个方面的缺点:(1)它是有缺陷的,因为它的研究机制逃避意识,这与它的方向(问题)、它的结果(假设的出现)、部分还是整体、回溯性证明(论证)相反;(2)它是有偏见的,因为被试在内省自己的思维时会多或少无意识地受到自己偏爱的信仰的影响。那么,这些信仰往往越持久就越基础(柏拉图主义、唯心主义、唯名论等),在针对诸如发明与发现这样的核心问题上,无论内省在论证数学实体之间的关系在真假方面有多可靠的论证力,我们都很难接受用数学家的内省作为论证的工具,因为数学家也许在推理这些数学实体之间关系的同时却忽略了它们的性质。

因此,如果我们在尚未掌握目前未知的关于创造性数学中思维实际发生的事实的情况下,想要从心理学上解决这个重大的问题几乎是不可能的。相反,如果我们从现在开始就承认,在发明和发现之间并非一个简单的界限,而是同时存在第三种可能性甚至更多的可能,那么对于解决问题也许会更有助益。

正如在之前讨论的一样(第八章,48 部分),我们假设,每一个"反省抽象"是在更高水平重建更早的结构,使之整合进更大的结构。在这种情况下,就心理活动而言会出现无尽的回归,而且我们首先应该在神经结构中寻找这些结构的起源,最终在一般的组织结构中去发现结构的起源,这种结构至今尚无实验研究,但却向观察开放,他们展现在其他的形态发生中。

现在,关于这个问题,我们必须认识到组织结构有许多可以用数学方法描述的特点。每一个生物都是根据不同的对称图来组织的。研究已经发现,在鱼类、贝壳类、软体动物等的进化过程中存在大量的令人惊讶的几何转化(拓扑的、投射的、仿射的,等等)。① 一定量的反应遵循全或无的二值法则。简而言之,似乎我们有可能早晚要用类似于数学物理学的方式一种组织结构的代数学和几何学。

但是,我们必须说明在物理结构与组织结构之间的新生关系:(1)我们只有通过外部经验才能了解第一个结构;(2)同样,我们只有通过外部经验才能了解第二个结构(绝对不是通过内部经验:既不存在对神经结构的内省,也不存在对我们的有机体结构的先验);(3)另一方面,组织结构的存在是被试思维功能的预备条件,也是后续的与神经和组织结构有直接联系的感知运动结构②的预备条件;(4)同样地,物理结构的存在并非被试思维功能的预备条件,如果在开始阶段不是这种情况,我们可以进行思考,而无须外部客体、无须依赖于经验(参见"纯"数学);如果组织结构以物理结构为先决条件(例如,因为前者从后者中分化出来),它是通过有机体的中间物而非外部经验才使得这些物理结构成为思维的预备条件。

如果组织结构是思维的心理逻辑功能的预备条件,那么从认识论的观点来看它们

① Thompson D. W., *On Growth and Form*, Cambridge, 1942.

② 事实上,思维的"运算"是内部的动作,其根源是感知运动。

也有预备条件的特点;这只是意味着“内省抽象”不涉及绝对起点,通过“内省抽象”方法较高结构的成分从较低结构中分离了出来;并且感知运动结构(正如庞加莱在替代的情况中所说,该结构已经包含了“群”的基本形式)本身脱胎于更基本的结构——通过类似于内省抽象一样的过程。

相反,这些发展乍看起来与数学发明问题相去甚远,但是这种发展似乎使我们认识到在发明和发现之间还存在中间物的可能性。

发明是对新的自由组合的创造,之前在任何地方或者在被试的头脑中没有存在过,即使参与组合的成分在之前是已知的(也许经常是这种情况):例如,蒸汽机车是一个发明,而蒸汽和车辆在两者结合起来之前就已经存在。同样,我们必须在这个意义上来讨论世界语的“发明”问题,它也是同时具有新颖性和“自由”组合的特点,即,它们本来就非常不同。

发现是主体找到对他而言他不知道的客体的方式,这一客体其实早已存在:例如,发现美洲。我们甚至用同样的方式谈论内心的发现,意指被发现的是主体的一个成分或者特性,直到发现之前,这些成分或者特性都存在,但是一直没有被注意。在这一层面,可以存在对心象或者观念联合的发现。最后,我们可以通过推理而发现一个客体,就像勒韦里耶发现了海王星,进一步而言,没有什么理由阻止我们去发现抽象的实体。

已经界定了这些概念,那么我们将会看到出现一个新的数学结构,要么是作为发明,要么是作为发现,要么是作为中间物,留给我们的问题是确定它是否是同时二者兼备,还是其中的一个。

首先让我们区分那些由已知定理的新证明构成的发明,这些发明包括那些在已知实体之间确立了新关系(新定理)的发明与那些包含了建构和描述新的数学实体的发明。所以,有理由推断,三类中的第一种易于划分为发明(以刚刚界定的概念为依据),而把第二类划分为发现。但是,这种做法很武断,因为新的论证也许仅仅只是对那时为止尚未发现的关系提供了启发,只能被看作是“发现”。至于那些与未发现的关系相关的定理,它们可以源于理论或者甚至源于一个新结构,这样就导致了另一方面的问题,即“发明还是发现”的问题无法确定,而且会导致第二类与第三类之间很难区分。

所以,此时讨论第三类恰逢其时。将抽象平方根的运算一般化以便将之运用到负整数中,建构虚数$\sqrt{-1}$,这个方法是人工发明的一个典型(这就是为什么会用数字术语“假”,“虚”等的原因),同时后来的复值函数的历史倾向于将这种发明归类为发现。康托尔(G. Cantor)认为超限数(transfinite number)是真正的发现的典型,而对于埃尔米特(Hermite)而言——贝丝在前文提及(30 部分)的庞加莱的引用——它只是一个亵渎性的发明,因为它要——同时也失败了——获得无限实体的本质。

现在从心理学的观点来看似乎很清晰，如果通过“内省抽象”①建构新的数学结构，那么我们既不能将之归类为发明，也不能归类为发现。那么，我们必须把中间物看作是同时参与两个过程的思维活动吗？新实体部分是“被发现的”，因为它是从较早的结构中衍生出来的，同时新实体部分是“被发明的”，因为这一较早的结构只是给了它最早的发展，只是提供了可能性，而并非新实体蕴涵在较早的实体之中。出于两方面的原因，我们无法简明地说明其中的道理：

(1) 首先，内省抽象不是发现，因为结构或者“被内省”的实体与导出它们的那些不是一样的。从心理发展的观点来看，首先需要记住的是，不仅内省抽象与“内部经验”不同(例如，赫尔姆霍兹认为，从意识状态的接替中他能够在内部经验中发现序数或者顺序的观念)，而且从动作出发而非从客体来抽象经验(一种经验形式——内省抽象经常与之相联系，尽管在没有客体的情况下内省抽象的功能不受影响)出发——也与“内部经验”不同。由此可知，当儿童通过经验发现了他的动作的结果，例如，加法的结果与顺序无关(它是结合动作和顺序动作的一个特性，而不是客体的特性，它既不包括总数也不包括独立于施加于它们的动作顺序)，那么，内省抽象就是将一系列有形动作转化为一系列内心运算，其转化规则同时施加于动作。所以，这不仅仅是一个发现，因为在一个新的功能不同的心理水平发生了结构的重构，并且这一重构产生了更为一般的结构。所以，被发现的客体被发现所充实，根据我们的定义，这就不仅仅是一个发现。

就数学家的创造而言，如果其过程也是通过“内省抽象”进行的，那么就更有理由认为也是这样的情况。在与直觉有关的一篇文章中(51 部分会讨论)，当茹瓦(A. Denjoy)在聚焦到数字序列的有限成员上的直觉中寻找无限的起点(阿喀琉斯逮住了乌龟等)，他将直觉先后赋予先天的以及实证的特点，但是它们都以动作为起点的抽象经验为基础。如果我们认为康托尔的起点是这些直觉以及一一对应，那么发现无限就不仅仅是前述定义层面上的“发现”，因为新结构已经远远超越了它出生时的母结构。关于康托尔的柏拉图式解释，它甚至无须说明将会有一个“发现”，但是在这里我们要求自己说明中间物的可能性而无须在三种假设中做出抉择。

(2) 但是，如果通过“内省抽象”建构的结构不仅仅是发现，那么也不可以把它简化为一个“发明”——前文定义的一个新的和自由的结合，因为在它们也许是不同的这一层面而言，那些进入新发现结构中的新成分绝不是“自由的”。世界语是严格意义上的发明，因为这种人工语言的词汇和句法源于新的结合，并且那些结合是“自由的”(证据是沃拉普克语和伊多语使用其他语言成分)。相反，数学结构的根本性质——就事件之后数学结构被看作是有效的这一层面而言(在考虑到心理发展时，结果被运用到较迟的

---

① 这意味着所有具有“科学”特点的数学创造在更高水平超越了心理发展。按理说，这样一个拙劣的假说需要严格的考察，我们将在第十章一第十一章中着手这一问题。但是，此处我们只是想说明中间物的可能性，而无意谈及它的基础，原因是没有足够的数据，我们只能期望早日有所突破。

阶段，或者在考虑到科学创造时，结果通过系统变异而体现出来）——在于其自由度只与论证和形式化相关的方法有关，而基本定理赋予自身必然性。在克罗内克(Kronecker)看来，自然数是上帝的恩赐，所有其他种类的数都是人类的作品，不过，直到目前看来关于人类作品的说法仍然是真实的，因为，它们不可能有其他出处。

从心理观点来看，数学结构以及创造的根本特性似乎既不能约简为发现也不能约简为发明，但是可以约简为结合过程——一个无限的在同一时间内新的已经确定好的系列可能性的结合。那么，问题就是搞清楚我们是否可以在纯粹的可能性层面来讨论一个“系统”以及“必须的规定”，换言之，我们是否可以在已经变为实际的运算之前——即在停止表现出其他可能性之前——对它们的有效性进行推理或者认定。只有在结果之后，也就是在实际的建构过程中，我们才能认识到新的结合是必须的而非随意的。另一方面，希望在实现之前就知道各种可能性，势必需要建构有效的运算以便预测各种可能性，这就等同于让整个过程实际运行了一遍。理所当然，这也不能阻止我们将这些纯粹的可能性与某些信仰相联系，诸如柏拉图主义（这就等同于将这些可能性变为理念实体）或者先验的或者上帝——其自身已经包含各种可能性。

但是，这些只是信仰，因为人类的主体不具备认识这些理念或者先验实体的方法。概而言之，对于可能性与它们在新的逻辑数理结构中的实现之间的关系，我们所能说或者证明的是，一个在特定发展水平观察到的结构所蕴涵的可能的普遍原理（例如，通过加以限制或者抽象出一种转换）多于主体所感受到的。例如，当麦卡洛克(McCulloch)在神经连接中发现对应于命题函子（· ∨ ⊃ | = 等等）的各种结合时，显然，他并没有因为这个原因赋予大脑具备 16 个命题二值逻辑二进制运算，256 个三元运算以及65 536 个四元运算的特性。但是，只要起点确定，这些结合是可能的。所以，除了已经实现了的结构，我们必须区分那些隐含却未被主体发现的可能性：后一阶段的“内省抽象”将以此为目标通过建构一个新结构来分开它们。但是，在一般意义上来推论所有的可能性却是另一回事情，在这些文字的一般意义上而言，如果强迫我们相信数学结构既不是发明也不是发现，这是不合逻辑的观点。但是对于一个独特的变化过程，我们无法给出确切的说法，除了我们知道从组织和结构发生的开始，逻辑数理结构在发展的所有水平上都是天生的。

51. 数学“直觉”的多元形式

对于心理学家而言，没有比理解数学家所说的直觉更难的事情。其原因很清楚，数学家——从来不相信直觉本身——没有创立关于直觉的理论并且认为直觉依赖于常识或者哲学研究或者心理学研究，所以数学家认为他们没有分析直觉的必要。但是，常识在心理学中的作用不及在数学中的作用，并且，常识是内省心理学的结晶，它既不是批判的，也不是发生的，它面临我们已知的各种困难，甚至是有效内省的可能性问题（第七

章，43 部分）。至于哲学，它不能告诉我们任何关于直觉的东西，也不能给我们提供有关这一问题的事实数据，对事实数据的证实将使哲学委身于科学心理学。所以，只有心理学可以利用，但是心理学家却在理解数学家所说的直觉时有着诸多困难。所以，我们必须从提出三个基本问题开始：

（1）对于我们所说的“直觉”的不同形式，存在一些共同的过程或者特点吗？

（2）直觉的不同形式的差别在于它们的历时性（＝发生的）特点，还是共时性特点，或者二者都有？换言之，直觉的发展阶段具有数量有限的特点吗？即直觉具有数量有限的不同功能水平（知觉、具体运算等）吗？或者直觉是否是一个一般功能，它在发展的所有水平都出现并贯穿其所有发展阶段？

（3）如果直觉是一个一般功能（例如，贡塞斯，他在所有水平发现了三部曲：经验、直觉和推论，或多或少的形式化），那么这是否表明在发展过程中存在渐进的或者回归的现象？例如，当实验和推论技术在持续发展，在这一发展历史中以及个人的智力发展过程中（持续到老年期的智力衰退或者仅仅到学业结束的年龄），我们是否观察到了直觉在广度或者在性质上的优化或者直觉的任何一种变化形式？或者，相反，我们是否观察到直觉发展为或者是一方面是实验性证实，另一方面是推理性验证，或者是直觉作用在逐渐减少？

在回答这些问题之前，也许考察诸如时间、空间这些特殊的“直觉”更为有益。

Ⅰ. 时间直觉。詹姆斯的观点（意识流）引发了研究者的思考，产生了一些模模糊糊的看法，柏格森的绵延（durée）直觉仅仅具有心理学方面的意义。它主要受到两方面的影响，一是想要证明一种“直接所与”（immediately given）的认识论，二是关于直觉一般概念的非理想主义或者更确切地说是反理想主义。事实上，时间心理学是非常复杂的。

如果我们考察关于时间的发生数据①以及相关知识的不同水平，我们会发现实际上存在以下几个阶段：

（1）首先，存在感知运动时间②，它有两个方面，一个是连续的顺序（例如，在开始另一个标志着到达终点的运动之前，开始一个运动以作为一个手段），另一个是持续（例如，等待时的耐心）。

（2）第二，知觉时间，它无疑从属于感知运动时间：对于连续和同时性的知觉（充当判断固定点、距离、速度等的功能时具有各种系统误差），以及对从属于连续知觉的持续知觉，其平均准确性在中点的 0.6—0.7 秒上下波动，但是存在对低端数据的系统性低

① 参考 J. Piaget, *Le développement de la notion de temps chez l'enfant*, Paris, 1946 和 P. Fraisse, *Psychologie du temps*, Paris, 1957.

② 参考 J. Piaget, *La construction du réel chez l'enfant*, Neuchâtel-Paris, 1937, Chapter 4.

估现象和对高端数据的系统性高估现象①。

(3) 在恰当地知觉时间与知觉具体运算阶段之间存在一个完整的区域,柏格森很确信地用纯"绵延"来指代和描述这个区域,我们也可以称这个区域是时间居住的区域。这种时间既不是纯粹的知觉结构,也不是运算结构,但是它已经在以准结构的形式存在,在儿童(小于8—9岁)估计物理时间时,我们也会发现它。在空闲、无聊、疲劳等情况下,这种时间似乎持续更长,当活动、有趣时,它又似乎变短。

但是,水平(3)的时间并非直接的或者简单的直觉,它要相对复杂一些。为了理解它,我们必须清楚,首先,速度的知觉与概念与持续的知觉与概念相独立,并且它们只意味着空间和时间顺序。② 相反,持续在心理意义上像速度的一个协调,即,持续要么用速度相关的经过的距离来测量,要么用努力有关的完成的工作量来测量。所以,时间的系统性错觉有可能穿越了不完整的协调结果,其原因要么是对完成工作或者活动导向的考虑,要么是对兴趣、努力,或者疲劳占主导地位的考虑(这表达了运用个人精力、兴趣和努力增加效率等的途径等)。

(4) 物理时间经历并且持续直到某一个点,并且按照运算——在理解任何计时方式之前自动出现,并且仅仅是这一运算就可以产生对计时方式的理解——对时间予以结构化。这些是保证事件顺序的最重要的序列运算(对于这一点,我们必须强调一些事实,即与柏格森和弗洛伊德对记忆的解释相反,后者并非是对事件的自动保留顺序的真实记录,而是一个主动的建构过程,它通过准推论的途径引入系列顺序)。接下来是持续的追越。然后,通过序列顺序的综合以及间隔的追越,产出一个自动的时间度量标准——体现在流行音乐、诗歌韵律以及语言的长短音中等等。这时,运算的持续 $t=e/v$ 才作为速度的协调形成。

所以,注意到这些事实后,我们才发现与时间直觉概念有关的困难。如果我们将直觉的特点定义为"直接的"知识(并且我们从这一概念中期望它有这样的作用!),我们将这种情况与水平(1)和(3)相联系,但是我们会遇到三种困难:(a)这些直觉已经是复合的;(b)就它们具有系统性误差这一缺陷而言,它们在本质上具有迷惑性;(c)它只是一个短暂的阶段问题,其组织形式倾向于达到形式(4)的平衡状态。另一方面,如果我们

---

① 参考 P. Fraisse, *La psychologie du temps*, Paris, 1957.

② 事实上,直到某个年龄之前,速度是通过顺序上追越的概念来理解的,这与持续是无关的。应该指出的是,有可能将这一心理学的观察结果运用到物理学中(见 Piaget J. *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, Paris, 1946)。所以,两个物理学家,J. Abelé 和 Malvaux (*Vitesse et Univers relativiste*, Paris, Sedes)为了避开速度和时间的恶性循环,他们成功地重构了相对论的基础概念:为了达成这一目标,他们从追越发生的最初概念出发,他们运用对数定律和阿尔贝群定义了这些追越的加性函数,重新发现了速度成分的相对律:然后,他们通过在两个等速之间引入"运动距离",最终以洛仑兹转换有关的不变加速予以表达,尤其是对于运动的一种独特表达:以此导出了光速的无向性定律。

将形式(4)的结构称之为直觉的,那么再也没有“直接的”知识,而只有一个运算直觉(operational intuition),其本质特点是拥有自身的内在逻辑——找到其在技术和科学计时学中的完美实现。

这些困难尤其表现在试图将数字约简为时间“直觉”中的一些模糊特点中,例如,从康德到赫尔姆霍兹,再到布劳威尔都是这样尝试的人。赫尔姆霍兹曾经充满自信地提出了这一假设的心理学版本,他试图从意识状态的时间顺序中导出序数。赫尔姆霍兹认为,由于我们通过直接的间隔经验了解这一顺序,所以,对我们而言,通过常见的标志来区分连续的状态就足够了,以此来获得数字的顺序系列,并且以此出发获得序数加法和两个序数数字等式的定义——将这一加法和等式建立在连续序列的基础之上。

但是,这一努力的核心困难在于,将在数字置于时间序列的经验直觉的基础之上,不存在“经验”或者经验上的直觉,只包含来自客体(即使这些客体是内在的,并且由意识状态的序列所形成)的序列顺序以及包含在它们自身之中。换言之,我们无法知觉或者设想一系列事件中的序列顺序,除非以我们知觉或者设想的方式通过每个动作的中介引入它。例如,为了感知在时间顺序上事件 B 在事件 A 之后发生,或者在空间位置上客体 B 在客体 A 之后,就要将 B 的知觉和 A 的知觉置于序列关系之中,或者从 A 看到 B 等等,这种知觉动作的内在顺序是事件或者客体的顺序知觉的基本条件。而且,当意识中出现相继的 n 个意识状态时(即,在出现时两两之间可以比较先后的意识),假定这种出现序列的知识依赖于记忆,但记忆并不包含“记录”(noting)或者已存顺序的记录,而是积极地去重构顺序。简言之,在直接理解的意义上而言,并不存在时间顺序直觉,只有在建构或者重构的意义上,才有所谓的时间直觉,它意味着对动作顺序的初步引入导致了建构或者重构的发生。

在一般意义上而言,顺序,尤其是时间顺序并不是直觉材料。对客体的抽象(即使这些都是意识状态)不能让我们得到顺序,而是对动作——为客体赋予顺序——的抽象让我们产生了顺序。那么,这种顺序属于那种“反思性抽象”,即,为了意识到这些动作的类别,有必要在更高水平(表征等)建构一种顺序,它是这种顺序的复制品或者模型。这正是为什么感知运动时间、时间知觉、前运算时间等迟早会扩展为运算时间,在运算时间水平产生顺序的更一般运算的原因。所以,有理由相信,从时间顺序中产生数字是不靠谱的想法,而对顺序的运算则是一个足够好的出发点,如果能够通过其他途径对这种运算加以完善的话,情况会更加乐观。(见十一章56部分)

所以,布劳威尔用“多对一”的直觉代替时间直觉是顺理成章的事情,这帮助他建构了自然数。但是,在用何种方式准确说明可以将这些种类的自明性看作是直觉时,问题就来了,因为这与 $n+1$ 的基础直觉或者庞加莱相信的循环中的基础直觉有关,这一问题也切中了运算直觉的整个问题,其本质与知觉直觉或者与想象有关的直觉都是不同的。

Ⅱ. 空间直觉。许多作者都认为我们对于空间的知识限于三类:一类是与客体或

者绘画有关的经验性知觉，它代表了事物的轮廓线；另一类是被抽象的本质，它们可以被形式化；第三类是介于二者之间的几何学直觉，我们必须确定它是否来自于知觉或者经验数据，对于公理系统的建构是否是必需的。

我们首先要引用发生学数据，①它们要简单得多，并把空间直觉的各种类型与这些数据联系起来。据此，我们可以区分以下几个阶段：

（1）首先是感知运动空间，在这个空间中，我们已经区分了六个阶段（从出生到18个月期间）。我们只考虑两端的情况，感知运动空间的发展始于一些并无联系的空间（面颊的、触觉-动觉的、位置的、视觉的以及听觉的空间），每一种空间都指向身体本身（身体本身并非空间的全部）。在这一发展阶段的后期，上述各种各样的空间可以在一个空间中相互协调，其中包括客体与身体自身（当一个客体处于其余一些空间中时），此时，这些空间的特点具有一些基本结构：当客体离开视野时，客体具有永久性（客体永久性不是天生的，但是可以在长期的建构中获得，期间，客体变得与其他同类一样具有了不变性），可以协调地对一群实用的类型进行置换和定位（无须在思维中进行表征），但是可以认为此时已经获得了相对于身体本身而言的客体的一般独立性。

（2）然后是知觉空间，起初还包含在前一阶段中，但是分化的程度逐渐加强，逐渐可以理解形式、维度、位置和距离。此时的空间包含某些先天成分，我们很难将它们与获得的或者建构的成分区分开。另一方面，由于受到作为整体的动作的影响，这种知觉结构持续地得到丰富[例如，苛勒发现如果长时间地佩戴一个呈现上下颠倒的画面的眼镜，由于受到与动作整体性相关的自传入感觉的影响，或者因为智力运算（例如，知觉的协调性）的结果，几天后我们看到的物体就会重新恢复正确的方向]。所以，我们在讨论成人的知觉空间时必须非常小心，因为这会涉及许多非知觉起源的成分。

为了把我们的讨论限制在纯粹的知觉数据中②，我们发现这些数据遵循来自几何学甚至逻辑学的一些规律。庞加莱对空间的思考以及苛勒对知觉的研究都让我们注意到，知觉连续体包括诸如 $A=B$，$B=C$，$A\neq C$ 这样的情形。更一般地讲，每一个我们所知觉到的关系都是一种“变形”（通过对比或者想象的均质化）。如果用 $B(A)$ 来指代知觉到的大小 B 相比于知觉到的大小 A，用 B 来指代没有任何比较的知觉到的大小 B，那么，如果 $A<B<C$（客观地）：

$$B(A)>B;B(C)<B,\text{据此 } B(A)>B(C)$$

同理，如果 $B=A+A'$ 是不等长的线段 A 和 A' 合并后成为直线 B，并且如果（—）是它们的分离，那么我们的知觉是：

① 见 Piaget, *La construction du réel chez l'enfant*, Neuchâtel-Paris, 1937, Chaps. Ⅰ-Ⅱ; Piaget and Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris, 1947; Piaget, Inhelder and Szeminska, *La géometrie spontanée de l'enfant*, Paris, 1948.

② J. Piaget, *Les mécanismes perceptifs*, Paris, 1961.

$$(A+A')-A'\neq A$$

这些扭曲的大小长短关系和非加法的结合与非均质以及各向异性相对应，所以，当其余的外围成分与它们形成对比时，我们眼睛盯着的每一个成分都会扩展。有时候即使我们在比较相互等长的成分时，也会发生这种变形和扭曲，但是在这种情况下，相似补偿会部分抵消这种变形。

另外，一系列的知觉活动——包括探索、空间和时间的不同距离的协调（替换、变换、预期）、参照（方向和定位）、格式化等——依据某些相对稳定的形式——大小和形状的知觉"恒常性"、（欧几里得几何）"好形式"的知觉格式、知觉的协调性等——最终将这些变形以部分核对和空间图形结构化的方式保存下来。但是，我们必须认识到，这些知觉活动本身受到来自高于知觉水平的加工过程的产物（感知运动格式、具体智慧运算等）的定向。

以上两种思考的结果是如果我们想要讨论空间的知觉"直觉"，我们要么指代的是初始效应，这些效应被系统误差削弱并且多少具有误导的作用；要么指代的是知觉活动，这些活动的结果与理性空间更接近，但是在这种情况下，我们认为空间"知觉"——尽管仍然非常基本并且有非常小的结构——已经不再是纯知觉了。

(3) 然后是一个表征空间，这一空间的出现始于符号功能的出现（2—3 岁），特别是心理表象的出现，这一空间不仅仅是对知觉的扩展，还包括内化的模仿。这种想象的空间在 2—8 岁时还非常粗糙，它的发展相对更晚，起初是以相当一般的方式发展，然后是在个人差异的基础上（取决于特殊领域的个人天资）不平衡地发展。也就是说，从其源头而言，我们可以把"几何直觉"能力称之为想象视觉形象并进行转换的能力。

但是，如果我们要建构一种关于这种直觉形式的理论，那么有必要认识到这种直觉并非源于我们关于空间的"自然"知识，否则的话会很容易去（最终会成为误解的源头）反对将这种视觉直觉的特殊种类划归为公理体系的正式空间，并得出结论认为，后者与自然空间背道而驰。为此，必须注意以下几点：

(a) 首先，心理表象通常只是一个符号，它本身并不是一种知识。① 例如，我们知道，点的表象是不够的，因为它有表面，线段的表象也是不充分的，因为它有宽度。从几何学的观点出发，这些仅仅是一些符号，它们用来指代或者表征，而不是相应的概念。现在，对这一问题的理解在各个水平上都具有相似性，即使被试被自己的符号论所误导：作为内化的模仿，表象只是动作的符号，这种内化模仿要么是画一个轮廓（通过依葫芦画瓢的方式），要么是对这个轮廓图进行转换。所以，对于空间形式而言，重要的是动作系统或者运算系统，其中的表象表征仅源于符号论。

① 我们知道，心理表象不是一个概念，也不需要添加一个观念到它那里，它仅仅是对以前感知过的客体或者事件的模仿。例如，视角表象与绘画大概相对应，其原因在于这一表象源于那些现在无法看到的客体或者事件。

(b) 最为重要的是，我们必须再次用表象形式来说明直觉——我们已经讨论过知觉动作：某种程度上它的扩充依赖于外部成分，最终它不是源于自治知识源泉，因为它仅仅局限于对来自于外部的信息进行符号化。例如，我们观察到，与具体运算水平相比，具体运算前表象的空间特点相对更贫乏和静态，这一发现具有非常重要的启发价值。所以，5－6 岁的儿童发现很难去想象一个直的棍子的水平位置和垂直位置的中间位置，不过，他们可以进行 90^{0} 的转动。他们也很难想象一个弧（一条软线的）和直线的中间位置，尽管他们可以通过强化第一个来弥补第二个的不足。假如一个 5 厘米的正方形（从硬纸板上剪下来）放在了另一个同样大小的正方形上，然后移动 2－3 厘米，在这种情形下，他们甚至不能想象正确的结果应该是什么。总之，被试很容易想象他们刚刚看到的东西，但是却很难想象任何的转换。相反，在 7－8 岁的水平，儿童可以进行基本的可逆运算（分割、替换、度量等），同时表现出因为群集不同而出现的差异（距离守恒等），他们可以想象转换，但是仅仅作为对这些运算及结果的内部模仿，而非运算的基本条件。

但是，如果一旦被运算所引导，我们的想象就可以在空间领域获得一种灵活性及一定程度的精致化能力，这要大大优于其他领域所取得的进步，这也正是为什么在相当长的时期内人们认为"几何直觉"比其他类型的表征更具认知价值的原因。我们在这里无意将这种能力还给它，因为我们刚刚已经承认它源于运算本身而非表象，而且后者只是符号而非空间知识的成分。但是，既然承认了这一点，我们仍然需要理解为什么空间心理表象虽然仍然有一定程度的不准确性（参考一个点、一条直线、维尔斯特拉斯的无导数连续函数等等），但仍然可以获得一定程度的准确性并且要远远优于一般心理表象所拥有的准确性。

无疑，这主要有两方面的原因。首先，如果我们将表象称为"符号"，被这个表象表征的实体称之为"符号化"，我们首先会发现，对于空间表象而言，符号具有空间特性，这与实体符号化时的空间特性相似：正方形的形象与正方形的表象相似，有四个相等的边等等。时间表象与时间事件（乐曲花费一定时间来播放的听觉表象）之间的比较也是以上这种情况。但是，在诸如分类或者数字这类不可以感知的情形中，情况就完全不一样：我可以想象通过画出两个欧几里得圆来说明一个亚类包含在一个类中，也可以想象排成一行的五个棍子是 5，而无须画出来。但是这些是空间中的图形而非类或者数，尽管它们之间可能存在一一对应的关系。所以，它们是被分类或者数数的客体的表象，而不是类别或者数字，同时，正方形的表象——无须一个完美的正方形——仍然是一个空间图形，我可以想象它的线条越来越细，相互之间的面积越来越相同（这使得它趋近于正方形的形状，而五个棍子的表象则无法趋近于数字）。其次（这一点也很重要），如果我们区分（用这个词的一般意义以满足我们的需要）两种状态之间的转换以及转换发生时的状态之间的不同，我们会发现，只有空间表象可以被当作空间状态并按照同样相对准确的方式被想象，而其他领域的转换都不具备这一特性。例如，很容易通过变调将一

个听觉-时间表象进行转换：我们可以按照新的调子想象这首乐曲，但是我们无法在想象中通过空间表象来用一个音符替换另一个音符完成对听觉-时间表象的转换。同样，我们也许会听到一些音符以相反的顺序出现，但是我们在心中听到的是倒置的结果而非将倒置看作转化。另一方面，如果我们试图想象一个数字或者一个类别的转换，例如6除以2，我们会轻易地在心中"看到"集合的转换，例如六个棍子变成了每三个一组的两个集合，但是这种替换仅仅是分割的空间符号，而远非分割运算的转换，因为六个棍子来自于数字6。所以，转换的表象只与状态的表象等同（六个的集合与两个有三个成分的集合），因为这两类表象同时是空间性质的，又是事物符号化的不充分的代表。相反，在真正的几何表征领域，"状态"的表象是空间图形，被称作直觉空间"转换"的表象也是空间图形，所以，转换的表象与状态的表象是同质的。例如，图形 A 延伸到图形 B 中，图形 A 仍然是一个空间图形，它仍然保留了 A 与 B 之间的直观同质性（顺序、边界关系、耦合点、相邻与分离关系等都保持不变）。剖面与投射（具有透视线等）、仿射转换（保留了平行线）、尺寸变化（保留了相似性）、位移（保留了长度等）等等是如此多的空间图形，我们既可以通过视觉方式进行想象，也可以通过它们自身的状态进行想象。

相对渐进的准确性（想象一个越来越薄，以至于没有厚度的线段）和转换的表象与状态的表象之间的一致性赋予了空间表征特殊的地位，我们也因此称之为"几何直觉"。但是，如果后者的启发作用是清晰的，那是因为对它的认知功能有两方面的考量：(1)空间想象的进步是由于被试的主动运算而产生的定向与塑造，通过这种方式，其图形方面变得越来越附属于思维的运算方面，并且只提供符合这种附属性质要求的相对充分的信息；(2)就其最适合的形式而言，空间直觉就是符号，也就是说，它通过通常是不完美的（无论怎样去改善提高它）符号，来表达一个由抽象概念和运算概念所构成符号化的事物系统，尽管它具有空间性和几何性。

Ⅲ. 运算直觉涉及离散成分。时间直觉和空间直觉都具有亲历特点（替换的经历等）或者以表象形式出现（声音表象等）。除了这两种直觉外，还有一些自然能力可以称之为"直觉"，它们的初始阶段也具有亲历的特点，其后是它的转折期，其运算具有越来越多的从物质动作中进行"抽象"的特点（通过"反思性抽象"），但是这种运算越来越独立于表征的任何形式，它们是涉及离散客体的运算直觉。我们可以引用几个例子，庞加莱运用"$n+1$ 直觉"来证明所谓的数字循环的自然特点；布劳威尔的多对一直觉假设综合运算的存在；当茹瓦的超限直觉（在序列 $1+1/2+1/4+\cdots$ 中收敛到极限），①以及在一般意义上而言，在处理类、关系、数字时，所有我们称之为直觉的东西都与非连续成分有关。

这种运算直觉在"自然"思维中扮演着非常重要的角色，但是我们必须清楚，这种直觉

---

① A. Denjoy, "L'innéité du transfini," in F. Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, 第188—196页（本文的"先天"一词采用自然思维中的天生的意思）。

与时间和空间直觉有一定程度的不同。的确，我们已经看到，在发展的特定水平，时间和空间直觉需要增加运算，所以，在这一水平，它们也是运算直觉。但是在这些运算阶段，它们仍然伴随着表征，即使后者由运算来定向，并且这种图形特点是如此明显，以至于许多作者认为这是此类直觉的本质特点（康德据此将它们归类为感觉的先验形式，而非理解，这一点与我们现在所持的发生进化观点相悖）。另一方面，与离散客体有关的运算直觉要么独立于所有的表征，要么由它们相伴，但是就个别符号而言，它们缺乏一般性。

例如，很显然，如果我们问被试它们是如何表征直线的一部分或者一个正方形，或者一列自然数，或者狗这类动物，在回答第一类问题时，答案非常相似，都是表象，第二类则是各种不同的符号（数字被一条直线上的棍子表征，或者通过添加的柱状物的单元数来表征，或者通过楼梯的图形来表征等等，狗则是通过无组织的集合或者一个大的圈来表征等等）。我们也许可以这样来解释它们的不同，存在物理空间或者客体空间，①并且我们的空间表征不得不考虑这一点，因为不存在实际存在的物理数字或者类等等，只有当被试以分类、协作以及计数等形式操纵他的活动的时候，逻辑-算术实体才是存在的。但是，我们现在尚无法展开这一讨论，我们现在只能说由于心理表象在本质上是空间-时间性质的（作为知觉模型的一种内化的模仿），在空间表象与空间实体或者转化之间存在一种紧密的对应关系。而在空间或者数字或者类的空间-时间表象，独立于时间和空间的运算概念的产物与这个数字或者这个类之间是异质的：据此产生了空间表象的一般特点和数字表象的特殊属性。

结果，与离散成分有关的运算直觉自主地影响我们的表征，即使这些运算的逻辑-算术形式与这些运算涉及客体的知觉内容或者表象内容之间的分化在以后的阶段才能逐渐出现。举一个运算直觉的例子可以帮助我们理解这种分化以及它的反向特点。从直觉出发，在有限的情况下，如果 $A'(=B-A)$ 不为零，那么类别 B 的扩展比亚类 A 的扩展要大。在前运算水平，儿童即使在 A 和 B 的可能的知觉比较中也不能接受 $B>A$ 的关系这种事实，因为如果他从整体 B 中抽取了部分 A，在他的心目中，整体 B 已经是破碎的，他只能对 A 和 A' 进行比较。然而，在具体运算水平，他可以轻松地理解 $B>A$，例如，在 $B=10$ 个花朵（在桌子的卡片上画出来的）以及 $A=5$ 个报春花的情景中，他会说，“与报春花（A）相比，有更多的花朵（B），因为报春花（A）也是花朵（B）”。另一方面，如果问题不是报春花和花朵，给儿童 5 个燕子和 5 个其他的鸟，平均而言，儿童会推迟一到两年才能够说出鸟比燕子多（他们接受了燕子也是鸟这一事实）。原因就是，从空间观点尤其是行为观点来看，花的集合比燕子或鸟的集合更直观，因为我们对花的

---

① 从这种观点出发，在空间直觉之间存在重要的心理差异，这同时对应于被试的建构以及客体经验（物理空间）和时间直觉——与物理学或者生理学内容（速度或者力）相分离。这就是为什么相对于纯粹的几何学而言，没有纯粹的计时学，进入运算时间结构的运算毫无任何关于时间特点的成分（分割、序列以及测量）。

第一印象就是一束而不像燕子和鸟的表象那样分散。但是,最终运算直觉会将它们从自身的象征意象中分离出来,而且在假设-演绎运算水平,它们逐渐独立于自身的内容。通过反省抽象而脱胎于动作,运算直觉从与客体相关的动作中(后者内化到了运算中)获得了完全的自主性。这是很容易解释的,因为在任何水平,它们并非源于这些客体,而是源于操作客体的动作:它不是同一个东西。

Ⅳ."纯"直觉。最后让我们来认识一下直觉的各种不同形式(预期我们会在纯粹数学的起源这门课程的某个章节中有很大程度的发展),它们与动作不再有任何关系,它们只与思维中发生的运算结合有关系。

例如,在讨论非欧几何的空间时,弗罗伊登塔尔(H. Freudenthal)写道:"康德主义者曾经试图弱化这一发现的重要性。康德承认,非欧几何空间是可以理解的空间,同时直觉空间依然是欧几里得空间。这个表述引发了一个问题:'直觉的'是什么意思?数学家已经学会用不再与欧几里得空间相似的客体进行直觉的运算(我们的斜体字);有时候,与欧几里得空间的特点相比,人们对这些客体的直觉特征强调的要多一些。谁能解决直觉是什么这个问题呢?一个未开化的人或者一个还未被我们的几何文明影响的婴孩……?"①这段话用发生学术语对问题进行了非凡的陈述,首先是因为它肯定了通过运算学习发展新的直觉的可能性,其次是因为它对儿童直觉与这些新直觉予以明确划分的做法进行了质疑。而且,在同一篇文章中,弗罗伊登塔尔认为,黎曼在1854年所做的著名的就职演说不是受到康德的启发,而是赫伯特的启发:"我们应该说,首先注意到的是拓扑空间,这种空间是心理空间,它要先于欧几里得空间。"②

同样,布利根德(G. Bouligand)用"延长的直觉(prolonged intuition)"来描述我们的直觉的发展方式,即我们从三维到四维再到 n 维与我们认识二然后又认识三的方式类似,并且通过一般化而从认识有序偶到三重序。

但是,不仅仅在空间领域直觉可以变为"反式直觉"(transintuitive intuition)(温特的表达方式),因为它不像人们通常所认为的那样,来源于心理知觉,而是来源于动作以及其内化于运算的结果,这使得它逐渐独立于知觉模型。尽管康托尔将他的超限集结构归于柏拉图直觉,但是也可以将其解读为对于对应与秩序的基本运算直觉的宏大概括。事实上,令人吃惊的是像康托尔这样的柏拉图主义者首先将这种前科学起源的基本运算概念——即一对一和相互对应——纳入数学概念系统中,布伦茨威格早已注意到这些基本的运算概念的存在,因为在原始社会,人们已经在使用一对一的交换,而且也可以在儿童的认知活动中看到这些基本运算概念的自然性。但是,在这里由于它是一个动作的格式问题或者运算格式,而非知觉格式,所以,我们有理由对运算进行一般

① H. Freudenthal, "Le développement de la notion d'espace depuis Kant," *Sciences*, Vol. 1, No. 3, 1958, pp. 3-13.

② *Ibid.*, p. 9.

化的概括，并且允许它为诸如数字的幂等一样抽象的概念赋予直觉意义。

Ⅴ. 结论。以上几条评论将足以带我们回到本部分开始的三个问题。

(1) 数学家认为具有“直觉”特点(一般地或者偶然地)的知识的各种种类不具有共有的正向的特点。事实上，在更广的层面而言，直觉这一术语涵盖了所有那些没有被形式化的东西。所以，如果我们在开始时不对“直觉”的各种形式进行分类——不是通过它们的内容(时间、空间、数字等)，而是通过它们的结构——那么，我们就不可能建构关于直觉知识的合乎逻辑的心理学理论，尤其是不能回答问题(2)和(3)。鉴于此，我们建议以下的二分法(特别要引用那些在Ⅰ—Ⅳ中被提到的内容)。

首先是经验直觉，它们与客体的物理属性有关，或者与内省经验的心理特性有关(例子：重量直觉或者独立于任何时间运算的经历过的关于持续的直觉)，以及与动作或者运算有关的直觉，这些动作和运算是否与客体有关(包括经历时的意识状态)或者它们是否与客体分离(例子：顺序直觉、重叠直觉、一一对应直觉等等)。

第二个二分法将这些运算直觉(仅从逻辑数理观点来看是有趣的)划分为两类，一类是与实际运算(几何直觉)特点相类似的表征所伴随的，另一类是没有表现出这一特点的(与离散客体有关的运算)。

在谈到几何直觉时，由于我们常常更多地想到的是它的表象方面而不是它的运算方面，我们将在运算直觉中再次引入表象(或者符号化)直觉与严格意义上的运算直觉(因此指代被符号化的事物)之间的区别。所以，后一种二分法并没有扩展第一种二分法，但是从另一个角度考察了相同的成分：在空间直觉的情况下，符号化直觉与严格意义上的运算直觉同质，而在涉及离散客体的直觉时，除了一些一般性的用法，诸如以类的包含与拓扑重叠为基础的欧拉圈，符号化的直觉仍然部分地保留其独有的特点。

(2) 由于前述的一些分类都具有同时性，所以需要注意一些历时性的划分，这种划分都有其自己的进化规律。

(a) 经验直觉作为实验发展的函数而进化。

(b) 严格意义的运算直觉依赖于智力本身的机制，经过三个大的发展阶段：与施加于客体的动作相联系的直觉，与内化于运算形式的动作相联系的直觉(但是仍然可以运用于客体)以及最终与独立于所有可能动作相联系的运算的直觉(参见Ⅳ)。

(c) 符号化直觉的发展与严格意义的运算直觉相关，并且处于从属地位，后者提供表象(尤其是空间表象)，它们的流畅性以及相对准确性。

(3) 从发明的观点来看，尽管在所有阶段直觉是有效的、一直具有基础性，但是在发展过程中，直觉的认知功能逐渐消失(在相对意义上)。经验直觉被严格的实验所取代，符号化直觉越来越从属于严格意义的运算直觉。至于后者，它们的发展没有受到限制，原因在于反省抽象。现在，如我们所见，根据双重过程——同时是进步的与追溯的——对演绎技术持续改善有一种内在的指向形式化的倾向——无须将自身与其直觉根源切断——这一过程逐渐限制了直觉的范围(在非形式化运算思维的意义上)。

第十章 “纯”思维的心理学问题

一些逻辑学家和数学家疏远或有时不信任心理学，其中一个原因是，按照他们自己的观点来看，发生分析被认为只与“直觉”思维有关，这些“直觉”思维被认为是“自然的”思维。形式化是一小部分精英（相对于其他绝大多数人，他们都有“直觉”能力）的特权，它的出现被看作“人工的”东西——如果不是“与人类本性相立”，在同样的意义层面，在科学社会学出现之前，卢梭认为社会制度是外部自然（通过契约自由设立），而个人则被认为是“自然的”。但是，从另一个方面来看，那些精英的想法至少要比研究人类思维发展的大多数心理学家的思想有趣。另一方面，由于发生研究的对象不是内省意识，而是引导儿童走向成人心理水平的连续建构的机制，所以，在得出结论之前，我们必须深入研究是否从直觉思维到公理化这一阶段并非以上述的发展为基础，特别是那个被填补的空白是否如此巨大，以至于我们的社会中婴儿的感知运动思维与假设演绎思维之间的差距都不能与之相提并论。

52. 纯数学的发生学根源

在纯数学领域，尽管公理或者定理独立于任何经验的客体，或者甚至它们与任何直觉内容都没有关系，但是，公理仍然被人们接受，定理仍然保持有效。所以，尽管约旦曲线或者圆的拓扑图形无法画出来，这是事实，但是，从纯数学的观点来看，它表现出的真实性一点也不亚于基本的欧几里得几何图形的真实性。同样，从效度的观点看，n 维空间、非欧几何、弗雷谢（Frechet）的“抽象空间”、各种各样的无穷数、一般化数论等等与传统数学的最简单最直观的结构并无二致。

Ⅰ. 问题的现状。数学的物理客体，或者数学基本形式的空间直觉或者运算直觉给数学带来了各种各样的限制，数学家们努力把数学从这些限制中解放了出来，所以，首要的问题是数学家的这些努力是否改变了数学的性质，或者这些改变是否只是影响了数学领域内的数学家们（受到各种影响，有些是超出数学本质的）对于数学的解读。这个问题并不简单，因为在科学史上这样的例子比比皆是，学者致力于他所接受的反对科学中的一般解读所暗示的东西。所以，梅耶森提供了大量的此类矛盾的例子，这类情况有时发生在前言与正文之间，前言是用实证主义风格写成，而在正文中，作者致力于围绕“现象形成的方法”展开调查，其中完全将实证主义排除在科学领域之外。同样，在

数学领域，我们不禁要问，在亚里士多德方法论绝对依赖自明性的时代与纯数学从各种外部起源的限制中解放出来的时代之间有没有一个清晰的分割线，或者，与此相反，通过各种努力来促成一种持续性的转变，期望在数学家运用"纯"方法开展的工作与数学家事实上已经超越的哲学之间找到和解与妥协。

但是，另一方面而言，我们必须注意的是，就一个理论概念或者哲学概念可以影响科学的主体而言，它通常是在狭义层面而言。之所以这样是因为这些概念源于对以往有效工作的追溯反思，除了猜测——起于对最初阶段已经发生的倾向性的认识——的极少数情况。这里有一个哲学或者方法论概念强加于数学的典型例子，希腊几何学家要从各种可能的图形中选出一些作为合法的严格意义上的几何概念的图形：这些图形必须服从一些限制条件，它们必须是用尺子和圆规做出来的图形。从这个标准来看，那些被称作"机械的"曲线（螺旋线、摆线等等）被排除在几何学之外，至少在欧几里得几何原本体系中，它们不属于几何学。现在看来，这一结论更加奇怪，因为当时的希腊几何学家对一些机械曲线（希庇亚斯的割圆曲线、尼科梅德斯的螺旋线和迪奥克莱斯的蔓叶线）就已经非常熟悉。所以，它们所遭遇的贝壳放逐法① 并非几何直觉内在发展缺陷的

---

① 知道点世界文化——贝壳放逐法。

雅典的民主制为后人垂青，多半出自它实行的贝壳放逐法。

所谓贝壳放逐法，类似于我们现在所说的公民投票法。它起源于民主派领袖对独裁统治的恐惧。公元前 6 世纪，雅典人在好几代民主领袖的带领下终于彻底消灭了贵族势力，建立了雅典公民共同当政的民主制度。为了防止贵族统治的复辟，捍卫民主思想的地位，优秀的民主派领袖克里斯替尼创制了贝壳放逐法。

每年春季，雅典的国民大会都要在全体公共场所中征求意见，看是否有在思想上、行为上会危害民主政治的危险公民。这种活动一般采用无记名的方式，让每个公民把他认为会危害城邦安全和破坏民主制度的人的姓名写在贝壳或陶片上。投票分前后两次，最后一次获投票最多的人，就要被大会决定放逐，放逐一般一年一人，期限是 10 年。在实行的过程中，被放逐者不得回雅典，也不得与雅典人有接触，但他不被看作是罪犯，其公民权和财产也被保留，放逐期满后可自行回国。

类似的无记名投票放逐本邦人的作法，在当时的小亚细亚也存在，其他的希腊城邦也有，不过，只有雅典把它直接与民主制挂上了钩。关于它的实行情况，我们可举出几个事例：

塞米托克利是强大的雅典海军的创始人，在希波战争中，他率领雅典海军打退了波斯军队的进攻，保卫了雅典的安全。而他回国时，雅典人并没有用鲜花和掌声来道欢迎他，在他们看来，塞米托克利在战争中集中了太大的权力，这对雅典民主制是一个强大的威胁。于是公民投票，塞米托克利被确定为放逐对象，只好流浪他乡。

雅利斯太德为人正直，一心为公，很多人都称他为公正的雅利斯太德，并为此让他当上了执政官。在对待波斯人的问题上，他与海军统帅塞米托克利发生了意见分歧。大敌当前，领导人内讧对雅典是危险的，于是进行公民投票，要放逐他们中的一个。在当时的投票现场，有位不识字的瞎子到处找人帮他写上他认为要放逐的人的名字，很巧，他找到了雅利斯太德。他告诉雅利斯太德，让他帮其在陶片上写上雅利斯太德的名字，雅利斯太德边写边问："雅利斯太德做错了什么吗？"瞎子说：（转下页注）

产物，而是出于严格的哲学的外部考虑的结果，这与亚里士多德区分“自然”运动与“暴力”运动或者源于“偶然性”的运动的方式相类似，只有第一种运动依赖于物理学（依赖于有限的物理学，在语源学意义使用这个词，作为哲学框架的一个功能）。①

从这些评论可以看出，即使纯数学——源于较早时期的发展——的出现带来了数学哲学领域的矛盾与危机（最著名的例子是由非欧几何所引发的危机，当时由于数学家们接受了康德的观点，认为空间直觉是感觉的一种“先验”形式），但是这一点并不意味着数学本身的根本改变。相反，我们可以认为纯数学——并没有预先包含在早期水平的数学中——沿着早期确定的方向在发展。例如，当希腊人用理性论证代替了埃及人的经验命题（empirical statement）时（他们对毕达哥拉斯定理的一些特例非常熟悉，度量发现直觉三角形的边是 3，4 和 5，却不寻找一般性的证明），这已经表明了纯数学发展方向的关键一步。当欧几里得通过出众的直觉，将他的第五公设从他认为具备自明性的公理中区分出来，这多少降低了它的效度，但却为其他几何学使用他的公设打开了方便之门。当笛卡尔发现分析几何时，他引入了几何与代数的新关系，但却没有意识到这开创了各种数学分支之间相互同化的不间断历程：这也似乎是为什么纯数学开始意识到自身的原因吧。

总之，纯数学有两个主要的特点，(a)在基本水平，它独立于经验客体与直觉（想象的或者具体的运算系统），和(b)日益增加的同质性，因为不同的数学分支之间相互吸收，日益打破了几何与分析，或者拓扑学与数论之间的传统壁垒。现在看来，在十九世纪中叶引入并推广这两种趋势倒不是什么根本上的革新；从整个历史发展的观点来看——包括希腊人之前的以经验和技术为特点的数学时期（考虑到我们对“希腊奇迹”出现原因的无知，即克里特岛数学——可以与埃及和中东数学相媲美）——纯数学的出现可以看作是人们敏锐意识到数学的一般倾向并将其变为现实的结果。我们只需记住一点，某门科学的一般倾向并非由适用于其发展的所有水平的概念通过统计学方式来确定，而是由其进化规律所决定。换言之，科学有其特定的方向，其发展阶段可以通过回溯来发现，当然，无须我们运用外推法从其指向未来的发展蓝图中获得。

既然这就是我们要确立的假设，那么紧接着就会出现一个心理学问题，对这一问题

（接上页注）“没有，但是我受不了别人老把他叫作公正者。”投票结果，雅利斯太德被放逐。

早在当时，苏格拉底就称民主政治为暴民政治，认为它极其荒唐可笑，投票者完全凭感觉投票，必定会毁了雅典，所以他主张进行贵族统治，由哲学家来治理国家，这或许不无道理，但它无法否定雅典民主的精神。这也许就是近现代许多政治家推崇雅典民主的原因。（译者引自：http://tool.xdf.cn/zhidaodian/ 912.html）

① 也可以对笛卡尔给予类似的评论，正如亨利·贝格勒所指出的，他在《几何学》中接受了蔓叶线，却拒绝了对数螺旋线。关于这一问题，请见 Jules Vuillemin 的佳作：*Mathematiques et métaphysique chez Descartes*，Paris，1960，特别是第一和第三章。

的解答必须作为一个反演打样来证实或者证伪别人提供的解释。就纯数学符合数学发展的一般倾向而言(从刚才提到的两个特点出发),我们只有对最基本的数学概念的心理发展历程进行研究,才能够揭示纯数学的成因,或者理解数学概念的起点。相反的情况下,心理分析会引导我们在物理意义上为基本数学概念赋予一个经验起源,或者在知觉意义上赋予一个直觉起源,我们必须得出结论认为纯数学是对自然数学的反动的结果,并且与自然数学的早期阶段的方向相悖,对此可以用胡塞尔的"转变"(conversions)来形容,或者说是与学科自发行为的一种彻底决裂。

所以,此处需要解决的问题就是本书的目标:简言之,从心理学角度解释为什么纯数学已经成为一种可能,这就表明一个人对逻辑数理实体与被试行为之间的联系持支持态度还是反对态度。事实上,我们在一定程度上认为心理学无法解释纯数学,所以,我们沿着柏拉图主义的方向在努力,或者依赖于本质上是社会实在的一些概念(语言、约定主义等),这些做法切断了与主体行为的关系,或者使得后者仅仅从属于社会传播。但是,另一方面,如果不忽视主体的存在的话,我们要尝试用一个反对自然思想的运动来解释纯数学,我们要通过重复主体的行为来获得结论,而不是区分经验的类型或者智慧结构的形式,这一点可通过观察和系统的实验而证实,但是如果是在隔离两类被试——心理学研究所能得到的被试与依赖于特殊认知功能的超验的被试——的意义上而言,那么无法从心理学上来证实我们的结论。但是,如果我们成功地说明以纯数学的出现为终结的那些倾向是在数学活动的最基本源头发挥作用,那么逻辑数理实体将与被试的活动联系起来,而非源于一般意义上的经验。尽管客观的发生分析法在历史上传播甚广而且被人们合理地歧视——在现实中由于缺乏内在的需要而表现得特别虚弱——所以,这种方法没有走向对知识的经验主义或者心理主义的解释。

Ⅱ. 基本的逻辑数理经验。所以,对问题的考察必须从最基本水平的逻辑数理经验开始,以便确定这种经验是否能够归纳为与客体有关的外部物理经验,或者是与内部心理经验层面的意识状态有关,抑或它是否是一个另一类经验的问题——涉及动作的结果以及它们之间的协作——也就是说,它只存在于以我们关注运算结果的方式的这些结合的结果中,这会让我们迟早用运算演绎代替经验。

首先我们必须认识到在发展的初级水平——后来它会产生直接的演绎自明性——逻辑数理真理起初只是通过经验证实的中间物而被接受的。但是,正如我们刚才看到的,这仍然不能证明所发生的经验的任何性质,现在的问题是限定它们。首先,我来举几个例子。我们来看交换律:$2+3=3+2$,或者 5 个成分,从左数到右与从右数到左是一样的。对儿童来讲,只有通过证实才可以接受交换律,因为总数与顺序无关这一规律对他们而言尚无自明性,而在迟后的阶段,他们就会理解只要不减不加,总数就不会变这一事实。同样,如果一个包含 K 个成分的集合可以被 2 分割(通过一一对应来证实可以分割),儿童在特定水平会认为 $K+1$ 个成分的集合不再可以被 2 分割,然而在稍

后的阶段儿童会通过推理认为再增加一个成分会破坏两组个体的一一对应。① 但是，如果这两个例子与两个运算水平——前运算水平（7—8 岁之前）和具体运算水平的开始阶段（7—8 岁及以上）——是等价的，我们可以认为这与许许多多的更加有难度的各种自明性是相同的，我们发现大约在这一阶段稍迟的时候，在儿童能够直接进行推理理解的阶段出现之前，通过实验核实是必需的一个发展阶段。例如，儿童面前有一组已经编序的物体，有 20 个或者 30 个，然后我们给他呈现两组物体，分别有 m 和 n 个成分，它们被一个中间物分割开（例如，$m=7$，$n=12$，儿童自己动手重新，要求一组比另一组多一个）：那么，问题来了，$(m+n)=(m+1)+(n-1)$吗？现在，我们发现，在通过推理得出结论之前，还存在一个阶段（平均在 9 岁以上），即儿童仅仅通过数数核实后就可以得出结论。②

总之，我们观察发现，在到达下一个阶段，即能够进行推理之前，被试总是需要通过实验来观察结果是否是预料的那样，只有通过这个亲眼看见的过程他才愿意接受推理结果是真的。在前运算水平阶段，被试对于自己发现的逻辑数理真理都持这样的态度，包括那些最具自明性的真理，如等式的传递性。在具体运算水平阶段（7—12 岁），被试对一定数量的判断可以通过直接的推理来确认它们的真实性，但是，只要问题稍微超出他们的直接推理能力之外，他们会立即回到实验核实的阶段，即使稍后他为了获得对问题的理解还会再使用推理来重新解决一遍问题。我们发现，在较高的思维水平，被试至少会通过“心理实验”来核实自己的推理是否正确。

但是，从另一方面来看，即使没有理由否认存在一个经验数学的初始水平，我们还要强调一个事实，这种逻辑数理经验有别于早期的物理经验。事实上，对于逻辑数理经验的分析不仅能够帮助我们理解为什么它会这么快地让位于推理本身（在物理经验领域内这一现象发生在非常迟的时期），而且能够理解其初始阶段如何让纯数学成为可能。这正是我们要说明的。

(1) 关键的事实是，如果物理经验与客体有关，主体从这些客体出发通过抽象而获得知识，那么逻辑数理经验必然与主体施加于客体的动作有关。所以，知识的获得源于抽象，其起点是这些动作，这一点我们必须承认，因为主体发现的特点正是动作所开始的地方。

例如，孩子发现大石头比小石头重，这是一种物理经验，为了获知石头的重量，儿童有所动作，他发现了一个在他的动作之前就已经属于石头的特性：他抽象了石头之间的重量关系而非色彩关系，它也是一个源于客体的抽象问题。另一方面，如果他将五个石

① P. Gréco, “Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant,” *Etudes épist. génét.*, Vol. XI, Etude V, Paris, 1960.

② P. Gréco, “Le progrés des inférences fondées sur l'itération numérique chez l'enfant et l'adolescent,” to appear in a future number of *Etudes épist. génét.*

头摆成一排,发现从左到右数还是从右到左数,都是5,这一经验是逻辑数理经验,因为它与石头本身没有关系,而与排序动作与发现总和之间的关系有关。事实上,线性顺序在被试将石头排列为一排之前是不存在的。至于它们的总数也依赖于动作:一方面,加法的动作忽略了桌子上的其他石头与物品,另一方面,动作没有漏数这一排石头中的任何一个,也没有重复数任何一个。所以,儿童发现的不是石头本身的特性(无疑,他也证实了它们的现状不能改变,在数数过程或者排列过程中没有石头会消失,但是这些不是他关心的问题):加法运算的结果与排列顺序无关,这才是他发现的事实。所以,有一种抽象源于动作而非客体,即使对动作结果的核实需要客体。

(2)但是,这种逻辑数理经验(与主体的动作而不是客体有关)不是"心理经验"——在我们通过内省而发现与我们行为有关的规则这一层面而言:例如,我们长时间工作后感觉累了,休息一会后,工作的进度会更快。事实上,逻辑数理经验与心理经验存在两个根本的差异,我们将在(3)中讨论第二个差异。先看第一个差异,心理经验把主体看作是内在的客体(就像物理经验对待外部客体一样),通过内省或者注意动作的主观特点(在个人范围内)。另一方面,逻辑数理经验不将动作看作个别的过程,而将动作的结果看作是客观和必需的。所以,在逻辑数理经验中,不存在与动作的主观特点相关的内省经验:例如,排序动作容易还是困难这一事实与是否伴随心理表象有关等等。与动作有关的就是它的客观结果(与个人相分离,对所有完成相同动作的每一个被试一视同仁),这种客观化是如此重要,以至于主体要通过向客体施加动作来核实结果是否正确,即,结果是他们所找寻的。① 至于结果的必然性问题,被试会对自己说他找不到反例,但是观察者也许会将这一事实解释为必然性的开始,因为在接下来的水平,被试将不再需要通过实验来核实结果并且直接推导出结果,认为这是不证自明的结果。

(3)逻辑数理经验与心理经验的第二个不同在于后者包括任何动作(例如,笑、打喷嚏、拿一束花等),而前者则只包括那些一旦内化后(在下一水平,逻辑数理经验变得毫无用处,并且让位于演绎)可以转化为"运算"的动作。正如我们已经看到的(第八章,45部分),一个运算是一个动作,它是可内化的、可逆的,并且总是依赖于其他的运算,可以形成一个结构,其特点是遵循整体性规律(例如,与"群体"有关的规律,框架,"分类"等)。逻辑数理经验只涉及那些可以转化为运算的动作,这一事实表明这种形式的运算只是一个预备阶段,其作用是建构未来的结构。一旦这些运算组织为结构,演绎就会成为可能,经验随即变得无用。但是,为了精致化这些运算结构,动作之间就需要协作,主体必须以归纳的方式发现自己运算的特性,以便于内化特性并按照演绎的方式操作它们。由于这些特点都不依赖于一般的心理经验,所以我们再次发现逻辑数理经验与心理经验的不同要甚于其与物理经验的不同。

---

① 并且非常仔细地寻找,因为内省的缺场(所以它在逻辑数理经验中没有任何作用),被试可能相信他所发现的是客体的物理特性,而没有怀疑正是他的动作赋予了客体这些特性。

(4) 我们也许可以这样来总结逻辑数理经验与心理经验之间的不同[参考(2)和(3)]，后者涉及原因且后者动作内省发展，而前者涉及的是动作的“格式”。根据定义，动作的格式是这一动作一般化特点的结构化的群，也就是，这些特点容许相同动作重复或者这一动作可以作用于新的内容。现在可以看出，动作的格式既不是知觉的(我们可以看到一个特定的动作，但是并不是它的格式)，也不是直接的内省，除非通过重复动作并比较其结果，我们才可以了解其含义。就这些可以内化为运算的动作而言，它们的格式包括最一般的特点，即，协作的特点本身。事实上，诸如合并(或者分离)、排序(以一种方向或者以互补的方向)、一一对应地摆放、从类和关系的基本运算的观点出发的动作等，不是可以简单地施加于外部客体的动作：它们是最基本的动作，其格式表达了所有动作的一般性协作，因为构成相继动作的顺序或者是由各种成分结合的每一个动作(从简单的反射到习得的动作，诸如摘一枝花或者点燃烟斗等等)意味着协作中的至少一种动作。这就是这些格式拥有完全一般的意义的原因，也是为什么它们不仅仅是某个个体某一动作特点的原因。但是，这也是为什么这些格式在没有通过“反省抽象”而转换为运算之前，它们总是处于无意识水平的原因。所以，很自然地在发展的前运算水平，演绎不可能一下子通过这些格式及它们的蕴涵而出现，其原因在于尚缺乏对它们的意识层面的认识，只有到那时，并且仅仅到了那时，在心理学意义而言，逻辑数理经验才成为补充演绎的必需。但是，如我们所见，这并不意味着关于类别、关系、数字等的基本运算源于物理客体，也非源于个别的心理学被试，因为逻辑数理经验从动作的最一般的协作中分离了它们，其规律与个体的特殊动作是独立的。

(5) 这种“经验”的结果是通过什么机制来抽象的，这个问题需要进一步详细地阐明。当我们讨论经验的时候，我们常常想到的是被试描述的简单的感性认识，而事实数据需要被试从他的所谓与它们最“直接的”接触出发来进行解读。这里无须说明有效的解读甚至发生在内省意识领域，在这个过程中有可能在提供准确信息的同时产生系统的误差。在物理经验领域，无论这些经验多么初级，除非借助于逻辑数理框架作为中介，我们是无法理解这些经验的。例如，假设一个木质方块的重量是一定的，为了发现两个相同木方块重量是一个方块的两倍，孩子需要数字和相等关系，甚至数字加法与代换运算的知识；如果孩子要知道较大方块的重量更重一点，那么他就需要不等式以及对应运算。总之，在所有阶段，物理经验指向数学框架，即使后者仍然是初步的。至于逻辑数理经验，它不仅包括[如我们在(1)中所见]客体的物理特性，还包括动作的结果，即，动作引入客体的新特性，例如被排序或者相加的事实。现在，如果物理特性的这种“注意”已经预设可以让这种“注意”成为可能的逻辑数理框架的存在，那么当问题是观察被试的动作对客体的结果时，例如，它们的顺序、总和以及总和与顺序无关，这时的情形还是一样的吗？然而，这也许有点似是而非，类似的情况会出现，除非在这些情况下，初级框架与观察到的结果不再在同一水平。这是因为替代框架的正是动作的“格式”本身，这一格式的逻辑数理经验具有刺激意识认识的功能。事实上，如果不通过排序——

这种动作本身就是用来证明顺序存在的——我们不可能在客体中间证明顺序的存在：例如，我们可以通过自己的眼动——一个接一个地看过去——得出顺序，或者通过手指一一清点的动作来获得顺序。同样的道理，如果我们在加法或者计数的动作中不使用求和的格式，我们无法确定总和。

主体从他的动作或者动作的协调的结果中获得知识的过程是：(a)逻辑数理经验包括观察施加于任何客体的动作的结果；(b)施加于客体的动作的格式决定了结果；(c)但是，为了观察(或者“注意”)到这些结果，主体必须使用相同的格式来完成其他的动作，其结果必须得到检验。然而，(d)对主体而言，获得的知识是新的，这样的话(尽管原则上而言，简单的推理也许已经代替了经验)就意味着经验告诉它什么是他预先没有意识到的。所以我们的结论是(e)抽象过程，通过主体获取自己动作结果的新知识的方式，包括一些建构，这种知识对于主体的意识而言是新的，这一过程的作用是将格式及其含义转化为前运算或者意识运算的术语，后者将允许主体通过推理来替换经验或者实证过程，被替代者也随即失去作用。

这种建构性抽象正是“反省抽象”，我们发现它有一个重要的特点，其作用会变得越来越重要(如我们在第八章48部分看到的一样)。从自己的动作中获取新知识包含的不仅仅是在意识层面认识到未经调整的基本组织——直接从无意识进入意识过程，还是一个对基本组织进行一般化并在心理学意义予以表征的过程——其形式是可以同时被自动构思的运算的较大模型。事实上，动作的格式仅仅是一系列动作的形式，它们相继发生而无须知觉到其整体。另一方面，反省抽象将它提升到运算模式形式，即一个结构，当使用其中一个运算的时候，通过反思而超越眼下的动作，使与之联系的其他运算通过演绎方式而运行成为可能。

对于(1)到(5)的结论，似乎已经很清晰了，初期的逻辑数理经验的存在绝不会为数学的经验主义解释辩护，相反却会从起点处去解释纯数学的可能性。实际上，由于这个经验并不涉及物理客体，而涉及的是施加于客体的动作，我们会立即明白，在后面的水平上数学可以在不需要这些客体的情况下发挥作用，由于反省抽象——从被试的动作中得到第一个概念——将后者转换为运算，并且这些运算迟早会被符号化地执行，而无须注意那些客体。贡塞斯曾经写道，逻辑是任何客体的物理学。我们接受规则，如果它可以置入“施加于任何客体的动作协调”的形式中的话。源于动作的反省抽象并不意味着心理学意义上的经验主义解释，因为我们讨论的问题并不是个别(或者心理学的)被试的特定行为：它们是每一个动作系统的最一般的协调，所以表达的是适用于每一个被试的内容，所以代表的是普遍的或者认知的被试而非个别的被试。从数学的源头开始，它似乎就受内在规律的支配在努力摆脱个别人意愿的武断。如果每件事都不是从开始的时候就预先形成，如果只有经历一个漫长的建构过程才可以产生纯数学，那么建构主义就不包括一系列自由的创造或者多变的惯例：它并非源于虚空而是源于系统的动作格式，毫无疑问，其根源可以追溯到被试的神经和生物组织那里；建构只是在意识思维

领域展示了自身而已，其方式是将包含在格式中的各种最初的关系进行了强制性的合并。并且在每一个新的阶段，较早建构的结果说明了一个事实，那就是系列建构遵循方向性规律，并非因为每件事都已经确定，而是因为合并的需要本身包含了一种连续性——只能通过内省可以感知，但是连续性本身反过来又影响自己。所以，逻辑数理经验没有绝对的原点：作为动作的内部组织与运算结构的起点之间的转换阶段，其本身就非常有价值。但是，它们的重要性只有在以后的发展中一步步地展现出来，即处于此阶段的明显的经验主义与彼阶段的纯数学之间。

Ⅲ."具体"运算和假设演绎运算。源于主体动作的"反省抽象"产生了一定数量的初级运算系统，这些系统使得演绎替换了经验。但是从经验转换为演绎的过程不是一蹴而就的，在前运算水平到可以处理纯假设的演绎水平之间存在一系列的转换。这些中间过渡阶段是非常有趣的，因为它们令人信服地展示了逻辑数理概念的有效起源，这与有些人提出的纯逻辑学起源说或者语言起源说大相径庭。但是，这也不能说语言在动作到运算的转化过程中无足轻重：毫无疑问，语言在这一转化过程中是不可或缺的条件，但不是充要条件，因为没有动作，就没有可被内化为运算的对象。

对这些转化的中间物进行最清晰定义的群包含我们所说的"具体运算"，它们有以下两个特点。从结构观来看，这些运算只接纳有限系统形式，此类形式源于"群集"的结构(见第八章 45 部分)，并正是通过这些限制而受益。这就是对类和关系的群集，也是数字结构的起源(见下文第十一章 56 部分)。在此之上还添加第一个空间群集(拓扑顺序和重叠，投射"视点"的协作，欧几里得线与面的结合)，同时测量开始出现。① 在这些领域中，群集的出现以基本演绎概念的建构为标志，而在前运算水平则不存在群集：这些概念是守恒的概念，它们形成群集前的各种变体(集的守恒，长度的守恒等等)。从功能的视角看，这些具体运算表现出一般性的限制特点，这一特点非常有用：它们只在客体出现时发挥功能，当客体被操作的时候，或者以表征形式出现时，只要客体继续可能的操作，这些具体运算就会发挥作用，当客体被简单的语言陈述假设替换时，这些具体运算就会变得毫无用处。

具体运算拥有受限制的结构以及只有客体被操作时才有用的双重特点，所以这一特点清楚地表明在中间阶段其运算形式在尚未完成而处于转化的情况下仍然在将自身与内容分离开来。分离过程是有起源的，因为结构有其建构过程，对于结构的形式方面有待逻辑学家研究以便提供结构的充分形式化的知识(见第八章 45 部分 J. B. Grize 的"群集"的形式化)。但是，在主体看来，这些形式仍然不能工作，除非它们与其内容相联系，因为第一个演绎的出现仍然需要对客体的操作：以类的重叠的转换为基础的演绎，或者以对称关系(或者排序的非对称关系)的转换为基础的演绎等等。与逻辑数理

① J. Piaget and B. Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris, 1947; J. Piaget and B. Inhelder and A. Szeminska, *La géométrie spontanée de l'enfant*, Paris, 1948(*op. cit.*).

经验仍然是必需的那个阶段相比，这种对形式与内容的初步分离则标志着思维独立于客体的重要阶段的开始。但是，到目前为止，还仅仅是直觉的运算阶段，仍然非常粗糙和初级(在西方社会中平均7—12岁出现)。

下一阶段是思维独立于客体的决定性阶段。从平均12—15岁(在我们的社会中)，儿童可以对于简单的口语陈述的假设进行演绎推理。此时出现的假设演绎推理归因于新的“反省抽象”。但是，这些新的“反省抽象”是从具体运算转化而来的，其本身通过反省抽象从逻辑数理经验转化而来，转化的方式与具体运算的形成方式相似。我们已经在上文看到(第八章46部分)新的格结构以及四种转换群INRC同时被建构，因为推理以假设演绎的方式开始发挥作用，所以我们没有必要再考察这个问题。但是，我们已经深入研究过，从我们目前讨论的问题来看，我们需要理解一个丰富强大的结构何以从一个简单弱小的结构发展而来，因为它是这个一般化过程的机制，它将解释纯数学的形成，所以，它对于是否可以用心理学来解释这一机制至关重要。

从具体运算到假设演绎运算的转换是反省抽象的一个绝佳例子，因为它展示了我们通过在较低运算中抽象它们的内容是如何在现实中基于先前的运算而建构新的运算。这源于一个简单的事实——从动作或者运算而来的抽象并不仅仅包括分隔或者简单地注意被分隔的成分，而必需一个重构的过程——通过将降低水平的成分投射到或者“反映”到较高的水平的方式。事实上，另一方面，布尔代数实际上蕴涵在类别的群集中，因为我们只需要概括性地将这些(通过替代)运用到所有可能的类别(从特定成分中形成)中来得到布尔代数。但是，另一方面来看，这一联合系统产生了这一结果，并且儿童在同一水平建构他的第一个命题间运算(蕴涵、析取等)时发现了这一联合系统，这一联合系统最终形成了新的运算。尽管它只包含类别的一般化过程，但是它仅通过对所有的类别(对于2、3、4等成分)进行分类(即，建构与前运算有关的运算)就可以解释这种可能性。其特点是：它们是对运算的运算(或者二次幂的运算)，相对于具体运算而言，这是假设演绎运算的基础性的心理新产物。我们在被试使用反演(inversion)和互反(reciprocities)群(INRC)时发现了同样的特点，当他问自己一个蕴涵 $p \supset q$ 时，它是否是真的，或者它的反演 $p \cdot \bar{q}$ 是否是真的；或者它的互反 $q \supset p$ 是否是真的或者它是否通过自己的反演($\bar{p} \cdot q$)而失效，这在任何情况下都与 $p \supset q$ 一致[它与(C＝NR)是相关的]。所以，否定N，互反R，相关C或者互反的否定是运算 $p \supset q$ 执行的运算，它本身是与类、关系和数字的前运算有关的一个命题运算。

现在，这个反省抽象并不仅仅包括前运算基础上新运算的建构：这些新运算更加抽象，并且是在更高的顺序水平，从这一事实可以看出，它们容许我们从较低的系统(直到变得与新系统无关为止)中借用成分，或者从尚未完全被隔离的这些系统中借用成分，以便形成新的整体。所以，四种转换INRC群(如我们在第八章46部分强调的)将反演和互反结合为一个系统，期间，直到更高的系统形成之前，二者都是不兼容的，反演对于类的群集是特有的，互反对于关系的群集是特有的。

53. 纯数学的心理学问题

以上我们对具体运算到假设演绎运算转换的发展进行了举例说明，这个例子似乎可以被一般化地概括总结。事实上，这一转换的特点可以系统地简化为以下几点：(a)为了从更具体和特殊的结构中建构更抽象和一般的结构，首先必须从前结构中抽象出特定的运算关系，以便在后续的阶段对它们进行一般化处理；(b)但是，这一抽象过程和一般化过程预设抽象出的关系应该能够在思维的新水平反映(在本意上)出来，以便形成它的一般化的答案；(c)至此，这种"反映"包含了与前运算有关的新运算，而且是对前运算的延续。所以，这些新运算对于抽象前运算的关系是必需的，这一过程形成了新系统的新颖性，同时，源于前运算的抽象保证了两个系统之间的连续性。最后，(d)这些新运算容许系统——直到结合前它们一直是分隔的——结合为一个新的整体。

如果运算发展的初级阶段是这种情况的话，那么没有理由认为这样一个通过反省抽象而进行的结构过程会终结。另一方面而言，毋庸置疑的是基于运算系统的假设分析无论多么初级，它们永远不会终结，因为没有一个系统会有一个绝对的起点。所以，总是有可能从一个系统中抽象出新概念并通过新运算"反映"它们：例如，这就是康托尔的方法，他对非常初级的一一对应运算的蕴涵予以隔离。另一方面，在两个运算系统中，反省抽象总是可以对于它们共同的东西能够提取出来或者能够找出它们之间互补的东西，以便建构一个能够"反映"这些相互关系的新运算：从分析几何到现代的代数与拓扑学的相互作用，这一方法一再地被使用。

数学朝着纯理论的历史发展归因于其系统的内部多样化和外部的一体化。但是，心理学观点可以帮助我们理解为什么纯数学将会是一种新的思维形式，与其最初的直觉形式的发展方向相比，它走向了不同的方向，从这种心理学观点来看，多样化和一体化都不能在相同的建构水平作为初始系统发展，它们各自必须在与对方的比较中进行多样化和一体化。如果抽象和一般化的发生如我们所想象的那样，那么问题自然不会以这种方式出现。我们通常把抽象看作是一个简单的分隔，而把一般化看作是对有共同特点的几个客体的简单观察：例如，"绿色"的概念可以通过感知草、树等，辨识它们的形状、大小，发现共同的颜色。但是，即使是在这样一个例子中，也会有一组类别运算出现，尽管如此，在这种情况下，抽象概念"绿色"还是在"草"等初始概念的相同水平上出现了。另一方面，如果源于动作和运算的抽象必须具有反思性的话，也就是假定运算成分的重构形成新的运算，那么系统的分化——通过对其最初蕴涵的分析——也将会产生新的更加抽象的系统。在"反思"意义而言，由于这种系统更加抽象，所以它处于另一个结构水平，并且包含一些心理层面的新思维形式，合并较低的形式，但是有时候却与初级直觉相矛盾。例如，自然数的直觉使得我们认为，整数是基本的，分数是对自然数的分割的结果，而在对分数经过反省抽象而获得的有序对理论中，整数只是这些数对中

的一个特例而已。至于通过与已经分隔的系统的关联而建构新系统这一过程而言，这无疑会导致结构的系列水平的层级化。

基于以上分析，产生了以下三个重要结论，我认为它们是纯数学何以可能的心理学原因：

(1) 首先是运算发展的完全自治。从逻辑数理经验水平——此时从类似于物理证实的方法得出第一个前科学的数学概念（错误地，正如我们强调的）——出发，通过抽象——从被试的一般动作出发，独立于具体的物理客体以及被试动作的主观特点等——建构运算。在后续的发展阶段，新的运算持续地在前运算的基础上建构，这一过程不再参考运算结构本身以外的成分。毫无疑问，数学史上盛产源于物理问题的启发而发现的例子，从无穷小的微积分学开始。但是，在物理经验中通过抽象在客体中获得概念是一回事，而通过新问题的激励有所发现则是另一回事。在后一种情况下，实验数据仅仅与以前的逻辑数理结构相似，正是这些数据与解决方案有所区别：在分析历史早期的特殊情况下，我们经常看到代数以新的无限大的代数的子学科的身份出现。

但是，如果客体和个别被试都不是运算结构进化的决定因素，那么我们还能够说集体的被试——即，社会或者文化因素——也不是决定因素吗？具体而言，我们必须将教育因素归因于儿童的逻辑数理结构发展的关键因素吗？我们将在结论部分重新讨论这一问题（十二章）。但是我们必须首先要注意的是社会因素的角色问题与心理因素的作用问题非常相似：问题是人到底是一个社会人还是个别被试，我们需要区分(a)动作的运算结构（公共的动作、社会交换等等）以及(b)伴随他们的主观状态（信念、观点等等）。现在看来，集体信念对于运算发展的影响不比对个人内省的影响多。至于进入社会交换（知识分子等）和协作中的集体运算，它们与那些动作协作所依赖的东西完全相同：结合、交集、顺序、对应等等。显然，逻辑数理运算从儿童期开始就已经处于集体因素与个体因素相互作用的循环之中。事实上，如果教育因素加速了儿童的运算发展，他必然使用运算来同化所接受的教育影响，这又回到了集体因素与个体因素的循环之中。但是，这种循环和运算的混合性质——发生在任何社会思维中——都不能削弱运算发展的自治性，因为公众意见和内省意识都不能解释为什么被试认识到 $2+2=4$ 或者如果 $A=B$，$B=C$，那么 $A=C$，因为这些事实依赖于动作的协作律，它与动作的集体性还是个体性无关。

(2) 这种运算结构的自治性发展以脱离直觉内容形式的影响为终结。在此我们不讨论导致形式化的原因（将在 54 部分中讨论），以及源于论证的日益紧迫的原因，我们要讨论的是纯数学因为其更高水平的抽象而有别于经典数学的普通事实，其途径是纯数学要么通过对直觉的逐渐分隔，要么用精致化的或者“纯的”直觉形式替换表象或者普通形式。但是，无论这一事实如何为人们所熟知，我们还是有必要在这里讨论，因为它经常被一些人拿来作为证据，认为数学越来越与其心理联系分离开，就自然数的发展或者欧几里得三维空间而言他们愿意认为是这样的。现在，如果人们接受前述的分析

模式，那么可以认为与所谓的自然直觉有关的抽象和分隔加工是源于起点发展范畴的事情。如果我们坚持心理发生三阶段论，即，感知动作、具体运算和假设演绎运算，期间初级结构被确立，然后通过后续的合并重构为新的更一般的结构，那么我们会发现，反省抽象正是这些重构过程的推动力，而它们的结果则是新的运算，其包含前运算或者动作。所以，从“自然”阶段开始，就有一个结构被抽象化的倾向，结构与客体逐渐被隔离，也就是说直觉性越来越少。我们要注意的是在这些水平，即使所使用的运算越来越处于意识水平，结构的整体仍然与被试的意识反映相异。① 在科学结构的水平，数学家为了建构理论而重新发现了在前科学思维中已经出现的结构，接下来，无论他的科学的初级结构是多么具体(例如，在希腊几何或者阿拉伯代数的水平)，反省抽象与运算层级重叠的相同过程将会在同样日益增强的抽象迫切性以及同样从直觉中解放出来的迫切性中终结。

(3) 这种发生学解释的第三个结果是形式出现的普遍性，表现为形式和内容的各种层级重叠。让我们将问题限定在我们讨论的自然思维阶段，我们首先会假定，“形式”仅在运算水平开始后出现，在具体运算水平形式与内容尚未分开，在假设演绎运算水平才出现形式独立于内容的情况。以此看来，前运算思维与感知运动思维完全通过动作的协调而进行，它忽略了形式的机制，并包含了简单的内容操作。现在，情况不一样了，在感知运动水平，形式机制就已经存在，这并不是说在这一水平这些形式可以独立于它们的内容而被结合，而是说它们可以调整自己的内容，产生可以指导行为的各种实际含义。这些形式包含相同性质的相继动作的结构“格式”(格式可以同化新的内容，通过格式蕴涵本身为它赋予新的意义)。所以，不存在这样的认知状态——无须形式的中间物而可以得到内容，并且从知觉开始，知觉格式(格式塔等)为感觉内容赋予形式。至于感觉，它从来不会单独存在，但是正如格式塔心理学家已经表明的那样，感觉只能作为结构化的内容出现，而不可以作为形成结构的因素出现。如果是这样的话，实际的情形就不是自然思维所描绘的简单的二元性，一方面是通过直觉直接获得的内容，另一方面是通过语言或者假设演绎思维所提供的形式：实际的情形是一个连续的层级系统，某个水平的认知结构总是同时扮演双重角色，一个是担当与较低水平结构(也是形式)相关的形式角色，另一个是担当与较高水平结构相关的内容角色。所以，具体运算结构是与感知运动格式相关的形式(这些具体运算所涉及的客体已经被感知运动格式或者知觉格式本身的格式化)，但是它们却又是与假设演绎运算结构相关的内容。

现在，从以上可以得出这样的结论，形式的优化渗透在自然思维之中，早在科学数学模糊地放大这些形式的大量存在之前，它们就已经在起作用。首先，要承认的是形式与内容的区分不是绝对的。例如，与埃及数学等相比，希腊数学的形式化令人惊讶，但

① 普通意义上的反省思维，在其初级形式，反省抽象可以将抽象成分“反映”到新的运算中而无须被试意识到。

是，我们所熟知的运算发展的情况是在十九世纪末期，人们觉得希腊数学似乎本质上是直觉的，需要为它建构形式化的更高水平的基础。所以，当数学与所谓的自然思维（我们知道它以乘法和完全分化的阶段的形式出现）相比较时，我们的核心问题是：尽管以上讨论是为了数学的发生过程与历史发展之间可能的和谐，那么形式化是否如这一术语的当代含义所表达的那样，它本身是自然思维的延续，还是如帕斯所认为的那样形式化朝着相反的方向前进。

54. 形式化的心理原因

导致形式化的逻辑学原因是清楚的，在此无须赘言（见贝丝的第三章）。让我们简单地与发生学方法尝试联系起来，探讨一下形式化思维是对发生过程的延续还是沿着相反的方向前进。

欧几里得将数学论证区分为可以被演绎的命题，或者定理，以及不可证明的命题，或者公理和假设。

但是由于公理是不可证明的，所以他只选择了那些由于其直觉内容而具有自明性的命题，这就意味着通过纯形式并且以直觉为基础而放弃了论证。① 所以，迟早人们会感觉有必要建构公理系统，其公理将由逻辑实体构成（莱布尼茨已经拟定了规划，弗雷格和罗素-怀特海开始着手工作），或者最起码由命题构成，它可以通过纯粹的逻辑形式体系而演绎出它的定理，据此可以证明这种结构的矛盾性（帕斯或者希尔伯特的规划）。所以，一个公理系统变成纯粹的形式系统，不再涉及它与直觉的关系。哥德尔危机之后，完全形式的理想已经失败，此处暂不讨论（十一章 57 部分将讨论这个问题）。尽管形式化的抱负受阻，但它仍然是当代数学的一项基本技术，并且毫无疑问是纯数学的显著特色。所以，从这一观点出发，我们试图发现是否这一倾向与已知的发生过程具有内在的一致性；或者是否与其相反——如它所展现出来的，就它牺牲直觉自明性而垂青越来越人为化的形式主义而言。

Ⅰ. 首先我们要注意的是（见第九章 50 部分）智力的一般功能有三个：提出问题（质疑），通过预期—想象假设（发明）解决问题，以及证实假设（证明）。现在，如果问题和假设逐渐确定，并且还包含对于直觉的必然诉求，至少具有结合的特点（即使新的问题和假设源于任何抽象的结构），那么，证实或者证明必然预设一个部分后退的方向。假定的解决问题的方法应该用假设来系统地表达，正是这一事实意味着我们需要回到原点，而且，证明的性质本身就意味着要回到问题的起点，以便推进假设检验的过程。但是，推进问题解决的每一步都被一个规则所控制，它决定着解决问题思维过程的效度。效度问题不是心理学问题，这一点并不重要，在心理学层面而言，证实紧随回归顺

① 这并没有阻止对非直觉的、有人为特点成分的引入，见贝丝的 31 部分。

序之后，以便回到起点，从这里有可能证明假设。

那么问题是：如果证明过程所预设的回归顺序在解决问题的心理结构中再次出现，同时向前与后退——每一个智力活动的特点——我们必须区分回归的两种可能的含义：(a)在心理学层面，它与重新发现如何得到假设有关，这意味着回溯得到假设的历史；(b)在逻辑学层面，它与回溯到以前确立或者认可的事实有关，目的是找到假设的证据。所以，现在的问题是确定在回归的这两种意义之间到底有没有关系，换言之，是否公理回归与相反的发生顺序之间有关。

第二个发现是必需的。我们已经反复观察到，基本的发生过程是"反省抽象性质的"，它容许在之前的结构之上建构新的结构。这一过程包括，从较低的结构中获得一些成分以便在新结构中反映它们，对它们进行一般化以进入更高的结构。然后，我们发现，这一过程本身同时是前进的(新的运算和结构)和回溯的(从较早的结构中进行抽象)。我们也许得承认，正是在这样一个反省抽象的框架中形成了假设，假设的作用通常是填补空白。但是，公理与发生回归之间的关系问题仍然悬而未决。

现在要说明一下这一问题的两个根本困难。第一个是，现代公理方法致力于将数学约简为逻辑公理，从至繁到至简，其最初的目标大概与发生顺序一致(但是对于保留问题我们将在十一章58部分讨论)，对于公理的选择已经变得自由。结果是，例如，同样的理论，同样的命题逻辑，但是可以通过非常不同的多样的公理系统进行建构，有些所依赖的公理有直觉自明性(罗素-怀特海的五个公理，后被约简为四个)，另外一些则依赖于完全人工的公理[尼克德(Nicod)的单一公理或者波兰逻辑学家们的单一公理]。第二个困难并没有这么宏达：公理与定理的区分只与选择的系统有关，一个命题在这些系统中的某个之中可以被当作公理而在另一个中则被当作可被论证的。

所以，形式化的回归进展导致了公理的发现，这与发生的最初成分一一对应，要说明这些是荒谬的事情，我们也无意去尝试。事实上，如果确实存在这样简单的一一对应，那么，另一方面而言，也就意味着我们可以将公理回归提交给包含事实的证明过程，这与形式化的精神是相悖的；另外，我们可以对发生过程进行公理化的约简，这又与历史发展的性质相悖。

相反，我们坚持认为，在两种回归分析中，存在某种一般性的或者适应性广泛的分析，尽管它们之间没有任何直接的相互作用，因为事实问题与效度问题仍然是不可约简的(见第七章41部分)。为了证明系统的效度，公理学家试图将它约简为最少最弱的几个公理，以作为系统必需却充分的条件；所以，他就用一定数量的基本命题来解决问题，这些命题之间相互独立，并且互不矛盾(对于独立性和非矛盾性的检验受测试模型的影响，测试模型要逐一满足所有公理而非一个公理的要求)。可能的公理系统的多样性并不排除对系统充分必要条件的搜寻，尤其是对这些公理系统的比较可以让我们确定哪一个是最简单的(=最弱的)可能性条件，以此可以对系统进行约简。另外，为了解释结构的发展，心理学家从事一种回归分析以改组被试在建构这一结构时所使用的反省抽

象。当心理学家发现了最基本的结构是从基本结构出发可以衍生出新的结构以及运算是通过这种运算来影响转换，这时候他们就找到了解释。所以，在公理重构和发生重构之间存在这样一个一般性的或者适应性广泛的分析，其目的是寻找可以解释一个系统或者结构最基本的条件。不过，这一分析尚未蕴涵任何结构性对应物，因为公理条件容许系统按照效度来进行约简，而发生条件只容许事实性的或者因果性的重构。

Ⅱ. 但是，我们假设至少有一个启发性的问题存在，可以这样来表述。让我们将“基本的公理性条件”称为公理，把“基本的发生条件”称为初始的结构以及动作或者运算——它们已经将这些结构转化为那些我们需要解释的结构。然后，问题就是确定在每一个个别情况下，在基本公理系统和基本的发生系统之间是否存在关系，这样就可以用前者的知识推进对于后者的分析。

值得注意的是，我们是用一种片面的方法陈述问题。这不仅仅出于谨慎(因为一个心理学家清楚他该如何使用逻辑学家的形式分析方法，但是他却无法判断互惠是否有可能，并且有充分的理由来怀疑它)，更是出于以下原因。因为发生分析解决的是事实性问题，所以它对解决效度问题没有多大助益。另外，发生过程中出现的事实有两类：(a)行为事实，有因果顺序，以及(b)标准的事实，即被心理学家作为事实所观察到的，但是在被试看来这是与真实和虚假有关的反省数据，从被试的立场来看，它们具有标准意义(尽管与逻辑学的形式化标准不同)。现在，当我们研究发展过程中出现的反省抽象的加工过程，它们的产生与种类(b)的某一阶段有关。如果是这样，那么在初级公理系统的研究将有可能为发生过程中出现的标准事实特点提供有价值的启发。

举几个例子，首先让我们来看一下已经提到过的令人惊奇的事实(第八章 47 部分)，儿童几何结构的建构顺序与历史顺序(欧几里得结合，然后是射影几何，然后是拓扑学)不一致，但是却重演了理论建构的顺序(拓扑直觉，然后是射影结构和欧几里得度量结构，在它们之间有出现仿射结构及类似的结构)。

第二个例子会涉及拓扑概念。我们知道在这个方面至少有两种形式的公理系统，一类是从点的概念出发，以便定义连续对应(同拓扑)，另一类是从封闭和开放概念出发的公理系统，它们与库拉托斯基(Kuratowski)和巴贝尔的工作有关。现在，从发生观来看，这二者的知识非常有价值，因为它们可以帮助我们理解早期的拓扑直觉。事实上，从发生观来看，最基本的概念，一方面似乎与封闭以及与它们(与边界有关的内和外)衍生的概念有关；另一方面似乎与点一类的概念无关，而与亚历山德罗夫(Alexandrof)和霍普夫(Hopf)所说的“接触点”有关，从“接触点”衍生了一些临近的紧随“分隔”等的概念。在这里，理论重构又一次为发生分析提供有价值的线索。

第三个例子比较明显。对于自然数的发生发展的分析，比较数的不同的公理系统是非常有价值的，从皮亚诺的五个公理出发，与类的概念、传递的不对称关系、级数本身以及递归等相结合；接着是原则(Principia)的形式化——它通过将其约简为类别的类别而独立地出现在基数中，通过约简为不对称关系而出现在序数中；然后是奎因的公理

化——它以演替概念为基础。然后,我们立即发现这些不同的模型对应可能的相互非常不同的发生过程,所以,如果我们以比较各种不同形式化的蕴涵开始我们的研究,那么就可以更加精确地描述数字的发生发展问题。所以,在罗素-怀特海看来,基数独立于序数、数列本身,任何基数可以独立获得,无须之前已经获得的较低水平的基数。这一点可以通过苛勒训练的穴鸟和麻雀认识5个成分的数来证明,不过这些鸟在区分4个对象与3个对象时失败了(无须新的特殊的训练期)。但是,在皮亚诺看来,序数和基数必然是一一对应的,并且从第一个成分开始就意味着递归,这为我们提供了一个在儿童中已经证实了的发生学描述。就此打住,在十一章56部分将重新讨论数字问题。

Ⅲ. 眼下我们要做的是确认形式化——无论它如何具有人为性——假设公理化为其探索各种可能性所预设的自由能够保证它的形式有效性——在现实中是一个不可替代的概念分析的工具,其目的是展示概念的含义或者结构上的关系。现在尽管仅从效度观点进行的回归分析并不简单地与回归发生分析相对应,它独立于效度,并且只是设法发现实际概念形式化的条件;所以,第一个促进了第二个,这又反过来提出了我们在开始时提出的关系问题。

我认为是贡塞斯在他的专著《数学与现实》(*Les Mathematiques et la Realite*)中第一次提出这个问题,他用"格式化"一词来描述直觉的过程,并且他进一步将后者命名为"公理格式化"。他这样做的目的是为了说明在逻辑数理思维的每一种形式中,无论它们如何具体,知识的增加不是通过对现实的复制而是对它的格式化;并且抽象的起源与所有的格式化是内在一致的,抽象的归宿迟早也是较高水平的格式化,即公理化。尽管我们的观点与贡塞斯的观点相近,但是在我们看来,他的观点过于经验主义,以至于他没有区分物理经验和逻辑数理经验。因此,他的格式化几乎意味着对客体本身的格式化,而我们所说的格式化则是从施加于客体的动作开始的抽象;如我们所看到的,这就可以解释整个逻辑数理运算的自治特点。

但是,如果用反省抽象替换贡塞斯的公理化格式化,我们就可以更有理由坚信(这次是如Ⅰ中所说的从被试的观点,而不再如Ⅱ中的心理学家的观点)形式化是概念建构的较高形式之一。事实上,根据反省抽象的规则,形式化按照之前(非公理化的)阶段的新结构(这次是公理化的结构)进行重构;它是通过抽象必要的成分,通过新的运算(证实的过程)方式与它们结合而重构它们的。

事实上,我们可以将形式化思维的特点约简为三个,可以忽略形式化的技术本身:(a)它反演了指向建构的自发顺序,目的是寻找可以支持证明重要性的公理,并将证明规则外化;(b)它最大限度地限制了对于直觉的依赖与诉求,以便从它们的形式本身来考察命题,而不关注它们的直觉内容;(c)它致力于将数学事实尽可能地约简为逻辑事实或者至少在二者之间引入一个完整的连续体。

现在,就特点(a)而言,在自然思维与形式化思维之间没有本质的差异,因为任何证明的努力,在任何水平都已经意味着已经颠倒了结构建构的顺序。在形式化这种情况

下,所不同的是回归分析的努力延伸到了证明本身的过程中。但是,一旦反省抽象的过程开始,就没有理由在这一边界内停下来;如果形式化突破了这个边界,它会回到基本结构的阶段继续重构,即使重构倾向于完成,它也会记录在自然思维所勾勒的框架内。

特点(b)只是对纯数学的基本倾向的一般化,我们已经从逻辑数理实体结构的最为经验主义的形式中观察到这种倾向的基本表达形式。

至于特点(c),从历史发展的角度看,如果我们将当代公理系统与满足希腊几何的公理系统——它们是直觉的与纯逻辑相异的——比较的话,它毫无疑问是最新的,如果我们坚决地用发生方法代替反省方法的话,从形式化与自然思维比较的观点来看,只能在不能保证准确性的水平上得出结论。以普通成人的内省为基础的常识观点来看,逻辑是一回事,代数是另一回事,几何则又是一回事,并且如果我们可以把第一个运用到第二个,前两个运用到第三个,后两个约简为第一个(在简单连续体的意义上,对所谓的结构以及约简的微分)是无效的。在这种情况下,形式化(c)似乎与自然思维的倾向相矛盾。但是,如果我们从发生学的角度来考察几何结构或者代数结构是如何形成的,在 5 岁到 7—9 岁的儿童中,在排除学校教育的影响之外,我们却观察到无论是代数还是几何都深深地植根于基本的逻辑因素结构中(类别和关系),无论是数字问题——其成分是逻辑的,但是其综合却是新的(见十一章 56 部分)——还是空间问题,它不仅涉及直觉,即以连续体的表象形式,作为部分重叠的运算的结构,在性质上相互协作,也涉及顺序等等,其结构整体内在地包含了基本的逻辑特性。所以,在重塑逻辑与数学的封闭连续体时,形式化的方向与发生分析所揭示的方向绝对一致,尽管它们是在完全不同的水平,并且所采用的方法都是多少有点"人工"性质的技术,从发生观来看它们之间是最简单的联系。

总之,就形式化是"反省抽象"的最精致化的变体而言,我们认为形式化与自然思维之间并非完全不同。的确,在较迟的几个建构水平,形式化走出了一条超越少数几个重构的一条好路子,就发展的条件而言,它影响之前的水平和重构——如我们看得的,重构是规则。但是,如果在性质上超越了它们,那是因为它的目标是完全的重构而非部分重构。但是,因为它的目标是完全的重构,所以,它是准确地,这种重构适合形式化,它与通过分析方法所揭示的某些基本的、基础的关系是相同的,我们将在十一章讨论其他的例子。

55. 普通思维的形式化如何让发生方法与公理方法结合起来

对自然思维进行结构化面临两方面的反对。第一种认为这个目标无法实现,因为自然思维缺乏公理化必需的严格性。例如,塔斯基(Tarski)认为形式思维与"朴素理论"(naive theories)之间无法形成同构,这一看法排除了以形式思维作为模型将自然思维形式化的可能性。第二种认为,由于逻辑思维是形式化的,而自然思维不是形式化

的，所以产生了二者的差异，如果对后者形式化，我们得到的是逻辑科学思维，自然思维将失去其特殊的性质。但是，这两种反对意见能够成立的条件是，要么我们首先承认根本的不可约简性，要么承认自然思维形式到形式化逻辑的完全可约简性。这两种观点都首先假定逻辑学是我们所认可的形式化的模型，逻辑学实际上是公理化的，即使逻辑学建构的目的不仅仅是为自然思维提供模型，更不要说是为数学提供基础。

我们的目的与上述观点不同：我们的目标只是精确地确定自然思维在发展过程中的一些具体特点，并了解自然思维与逻辑学之间的差异而已。例如，我们假定，对于类的初级“群集”和关系在发展中发挥重要作用，并且如我们马上会看到的（十一章 56 部分）它们出现在自然数建构的起点处，那么我们就会有趣地去对“群集”的结构进行形式化，而不是为了把它同化进布尔代数、点阵等等，这样我们就可以说明逻辑学家能够理解的这个形式的具体限制条件，当然，这对于发展学家也是有用的。

在说明如何将发生分析与公理分析结合起来之前，我们首先要认识到它是可行的。格里兹（J. B. Grize）是国际发生认识论中心的成员之一，逻辑学家和数学家，他对“群集”的概念进行了形式化——仅仅以严格的假设来表述“群集”的自然限制。在第八章 45 部分我们已经讨论过了。我们还会看到（十一章 56 部分）格里兹如何从类的群集和关系出发将自然数的结构进行形式化，与发生分析所揭示的“综合”类型相对应。

以下观点支持我们。

就发生分析而言，我们首先要注意的是这种形式化可以帮助我们准确地判断在某个水平缺失了什么，一般得到一个完整的结构，例如，布尔代数。但是，我们还发现（这一点也许对我们有指导意义）如果形式化是一个过程——它似乎具有人为性，因为它是一个反思技术，它使用某种编纂方法和特殊的符号系统——那么这一过程的结果没有什么人为性，因为它可以被用来形式化，即使是对 7－12 岁儿童的思维中所发生的结构！所以，从心理学观点来看，没有什么能够阻止我们认为形式逻辑是自然思维的某种形式的形式化，形式逻辑既不是儿童的思维，也不是成人（非逻辑学家）的思维，而是逻辑学家本人作为被试的思维——他仍然是人，具有特殊的才能（同样的道理，作为一个不愿停留在流行音乐水平的作曲家，不会因他在那个人为的系统中写作乐谱而成不了超级人）。

至于公理分析的观点，它对“群集”概念的兴趣也许是零。但是，兴趣也许会慢慢增加，康托尔就是这样，数学上最简单的一一对应运算获得了当时认为的重要价值。当我们在等待这样的不大可能的事情发生的时候，我们也许仍然在问自己——就像当年在“中心”的会议上，当格里兹公布他的结果时，贝丝所认为的那样——是否不存在其他的建构的数学过程。简言之，一旦一个结构被形式化，它就有可能提出问题。但是，必须注意的是，如果它提出的是逻辑学家需要回答的问题，那是因为它是形式化的结构，而不是自然结构，其原因是它与一个自然结构相对应，对于这一信息的内在效度它既没有添加任何东西也没用减少任何东西。这就像对于心理学家而言，每一个存在物自然地

包含了逻辑学家的思维，所以对于逻辑学家而言，每一个形式的东西都是有效的，它包含了自然思维结构的形式化。

一旦重新认清了逻辑学与发生心理学各自的功能，这种并行不悖的研究（不再混淆事实问题与效度问题）也许会走向认识论水平，而非逻辑学或者心理学水平，这会使得两种研究在更高水平上相互协作，以便厘清我们称之为基本公理学与基本发生学之间的关系。事实上，如果基本公理学代表了我们证明的所有权重，而基本发生学只是创造或者建构的实际起点，那么它们似乎井水不犯河水。但是，基本发生学包含自己的蕴涵——确定其以后的建构方向，所以会导致新的发展——这会通过填补它们之间的空白来完成最初的结构。所以，我们也许会问，是否基本发生学不是一个基本理论系统的弱化版的“表征”（在数学意义上），或者可能会假定任何其他的解决方案——赋予基本发生学——拥有用一种或者另一种形式反映后一种系统的特性。我们并不主张任何的解决方案，我们只是强调这样一个事实，即存在这样一个问题。现在看来，最基本的可能的自然结构的形式化也许在这个方面发挥指导性作用，它会同时探明这些结构与基本理论系统的关系、它们之间的空白以及填补空白的途径。

第十一章　形式分析与发生分析的会合

在这一章中，我要列举一些发生分析与公理调查之间会合的例子，假如以我们所知的被试动作为基础的话，这些例子可以说明能够在心理学层面解释某些形式分析的一般性结果。

56. 自然数的建构

从弗雷格和皮亚诺到《数学原理》(*Principia Mathematica*)，从怀特海-罗素到奎因、丘奇(Church)、冯·诺伊曼以及许多其他人，逻辑学家已经提供了各种各样的自然数系统的形式化，也许将这些结果与现在我们所知的数的心理建构做一比较是非常有趣的事情。

Ⅰ. 在这个关系方面产生了初步的问题，涉及这个问题的比较具有指导意义。与公理学家将数字约简为逻辑成分(类或者关系)的努力相反，庞加莱和传统的直觉主义者布劳威尔认为，数字不可能约简为逻辑实体：庞加莱认为，$n+1$ 的直觉或者循环将同时是基本的，并独立于逻辑，所以，在讨论数字约简为类或者关系的种类是什么这一问题之前，我们最好检查一下最基本的问题，数字和类或者关系之间有关系吗，或者数字是否可以约简。

就这一最基本的讨论而言，发生数据为我们提供了渐进的数据。

(1) 数字的发展并非发生于类(分类结构)或者不对称传递关系(序列结构)之前，相反，却存在一个同时的类、关系和数字的结构的建构过程。为了说明这一点，我们最好选择一个数字获得的最小标准，因为言语标准(例如，知道 10—20 之前数字的读法是远远不够的)：例如，一个儿童可以数到 10，却不知道 5 个客体被分为两部分后它们的数仍然是 5。所以，在这里我们考虑的是获得数字的最小标准，而不是儿童能够口头数数的条件(因为从操作的观点来看，这太模糊了)，它们是(1)儿童可以通过一一对应来均分两堆小数量(5—7 个)的物体，(2)在不增减物体的情况下，他能够认为这两堆物体的数量是守恒的，即使我们调整了物体的空间布局。然后，我们观察到以下内容：

(a) 处于第一阶段的儿童，当看到一排有 6 个成分的放置比较稀疏的东西时，他们认为这一排与自己摆放的有相同长度的一排的东西的数是一样的，他不会考虑一一对应(例如，8 个东西紧密地排列成一行)。在第二阶段，孩子选择一一对应作为相等的条

件,只要两排的个数一一对应(视觉对应):我们只是需要将两组物体摆放的距离拉近一点或者放开一点即可,因为儿童不再把它与另一组看作是相等的(总数的不守恒)。[①]最后,在第三阶段(平均7—8岁)对应确保等值,并且在视觉对应不存在的情况下,仍然认为相等。

(b) 数字建构的这三个阶段与分类的三个阶段相对应。当我们给儿童一定数量的客体让他们分类(几何形状,或者普通物体,或者花,或者动物等等),我们发现在第一阶段,被试可以轻松地进行分类,他们可以部分地考虑到性质上的异同。但是,他必须考虑限制条件(没有清楚地描述)——形成的分类结果应该按照某种空间形状(线、方块)组织起来,所以,这些"图形集合"[②]给类引入了空间形态的原则,正如数字发展的阶段一为数字量引入了空间大小的特点。在阶段二,儿童划分的集合不再是以形状为标准,分割或者加法取而代之,二者最终走向重叠,正如在类的分层包含中的情况一样。但是,(1) 这些重叠不是可以根据整个计划能够预期的,而是通过试误法建构的;(2)它们并没有人们认为必要的量化过程相伴随,以至于如果A和A'包含在B中,B中的成分多于A或者A'中的成分。在阶段二,最终会获得预期和数理化这两个特点。

(c) 关于非对称性传递关系的序列问题,我们在实验中发现了三个类似的阶段,例如,对10个客体根据大小升序排列。在第一阶段,儿童不能对各个成分进行排序,最后的结果是成对分组(小的/大的)或者分成许多小的组,对每一个组内的物体进行排序,他们不能进行协调。在第二阶段,被试经过几次试验后可以完成排序。在第三阶段,被试发现了非对称方法,他会将所有物体中最小的放在一个地方,然后将剩余物体中最小的放在其后,以此类推,所以,他们提前就知道物体E比它之前的物体要大而比它之后的物体要小(这一事实让他们明白了传递性,正如我们在第八章45—46部分所讨论的)。

数字进化中类与序列之间的这种并行性是支持它们独立性的一份证据,同时它也反对数字发展的最初的自治性。

(2) 当我们仔细分析被试在第一阶段和第二阶段在数字领域所犯的错误时,我们得到了更有力的证据。对这些错误结果的分析显示,在类别结构与关系结构的建构中所出现的错误之间并未出现分化。例如,经常可以发现,有两个集合,M(20个个体)和N(50个个体),以及两个子集合,M'和N'各有7个个体(M'的每个个体是左手从M中一个一个取出来的,N'的则是右手从N中逐个取出的),儿童认为N'比M'的数量多,因为N'来自N,而N比M的数量多。在这种情况下,"数量"属性是从内涵方面,而非

---

① 格雷科进一步发现,在一般的不守恒(第二阶段的开始)与守恒(第三阶段)之间有一个中间阶段,这个阶段的儿童期望发现相同的数字(在视觉对应被破坏时),但是仍然拒绝承认数量是相同的。见"Quantité et quotité,"in *Etudes épist. génét.*, vol. XIII, Etude 1。

② 见 Inhelder and Piaget, *La genèse des structures logiques élémentaires*, Neuchâtel-Paris, 1959, Chapter 1。

外延方面——通过对集合的这两个方面的未分化形式——进行理解的。现在看来，这种未分化正是类别发展处于阶段一和阶段二的特点，同时也是对阶段一的“图形集合”一般性的解释(此时的外延仍然是空间特性形式，这与数字发展阶段一的形式一样，但是这种属性出现在集合的内涵特点中)。① 同样我们观察到了数字方面的困难，这些困难源于序列的进化：例如，将含有 30 个个体的集合一个一个地减为 0，被试似乎不能确定在逐个减少的过程中他必然经过 15 个个体的集合这一阶段，似乎可以突然从 16 跳到 14，而可以略过 15 一样，或者似乎在 16 和 15 之间有一个中间物，或者在 14 和 15 之间有一个中间物：换言之，在这一阶段数字序列与其他的任何序列是相同的，并且这一数字序列的连通性(每个数字通过乘以 1 而与其他数字区分开)与任何其他的连通性是相同的(每一个成分比其他集合中的成分大或者小)。②

这些错误以及我们发现的许多其他的例子都表明，在获得数字、类和关系的具体特点之前，对于它们的结构还没有产生分化的认识。

(3) 另一方面，由于(2)中讨论的这些未分化的存在，在清晰地意识到循环和递归过程的意义上，我们没有观察到初级阶段的任何 $n+1$ 的直觉。数字集合守恒的缺失[在 1(a)中的阶段一和阶段二]无法让我们认为这种直觉是原始的。发生学方法对于交换律(即使对诸如 $2+3=3+2$ 这样的等式)、奇数与偶数的交替出现、像 $S(Sn)=n+2$(数字 $n+2$ 的后继者的后继者)这样简单特性的概括等的分析清楚地表明，这种直觉的精致化具有延迟的特点。③

所以，从这些不同的事实我们可以得出结论，在自然思维领域，从形式化的观点来看，数字建构源于类或者关系的逻辑成分，并且不是基于直觉——它们同时具有原始性与独特性——的独立的精致化过程。

Ⅱ. 但是，对于这个初级问题的回答至今尚未得到证明，就自然思维而言，数字约简为类或者关系的哪一种形式的问题仍未解决，甚至是一般意义上的还原论也无能为力，因为整数也许是由逻辑成分构成的，即使同时需要这些成分间新的特殊综合。

就这一问题而言，让我们从自然思维的观点出发来考察著名的约简——是由《原理》所提出，以及基数约简为类的类，它们之间通过双向对应而对等——的重要性。首先，这种约简似乎非常“自然”，它为一一对应运算提供了最基本的、早期的特点，这在年幼儿童中是如此自发和广泛。所以，我们也许假定儿童通过对对等集合的精致化——通过双向对应——而建构了数字。然而，整体而言，这一点在有保留的条件下是真的。

从心理学的观点(也许甚至可以从逻辑学的观点)来看，这种约简模型的根本困难

---

① Inhelder and Piaget, *loc. cit.*

② 见 A. Morf, “Recherches sur l'origine de la connexité de la suite des nombres,” in *Etudes épist. génét.*, Vol. XIII, Etude II.

③ P. Gréco, *loc. cit.*

在于存在两种不同形式的一一对应：

(A) 合格的双向对应，它以性质上的相似为基础：例如，被试面对一列不同形状的图形时，由方块、圆、三角等组成，他会使这些物体与另一列中的方块、圆、三角等一一对应。

(B) 任何类型的双向对应，其组成是抽象性质以及对第一个集合的任意一个成分与第二个集合的任意一个成分进行关联：例如，在上述例子的两列图形中，假若第一列的一个成分与第二列中的一个成分相对应，那么第一列中的方块与第二列的圆或者三角或者方块是相对应的，反之亦然，每一列都不能有例外和遗漏。

现在，我们再强调一个事实，即一一对应可以通过纯粹的逻辑术语来定义，它只是蕴涵着逻辑的"一"(单位元素)而不是算术的单位元素，罗素和怀特海使用的是一种任何类型的对应，而非合格的对应：当一年的十二个月、耶稣的十二个门徒、拿破仑的元帅①以及十二星座的标志相互对应时，数字 12 作为这些类的类从它们中抽象了出来，这不是因为在二月份、门徒彼得、内伊元帅以及巨蟹座的标志之间存在性质上的对等性，而是因为这些类的一类中的任一成分可以与这些类的其他类的任一成分相对应，与它们的性质无关。

暂且不论这种情况是否与实际的逻辑演绎有关，但是它却提出了一个心理学问题：如果我们承认最早的类系统(基本的"群集"：见第八章)只包括"合格对应"(例如，在乘法群集或者二因素表中)而忽略"任何类型的对应"，那么核心问题是发现被试如何在两种不同的对应形式中从第一种到达第二种他通过抽象所有的性质而非常自然地做到了这一点。那么，事实上所有的个别成分都相互变得对等，但却保留了它们的不同。这种一般化的对等性与保留下来的不同性的双重特点将它们转化为算术单位元素(因为仅使用逻辑单位元素会消除差异，从类的系统观点来看，差异只能以性质的不同为基础，而性质的不同是抽象的结果)。从心理学观点来看，如果仅仅借助于任何种类的对应，那么从类到数字将会陷入恶性循环，因为任何类的对应认为存在算术单位元素，进而产生数字，数字又被引入类而不是源于它。如果仅用合格对应，这一过程也是不充分的，因为性质对应的两个对等的类产生一个合格乘法类，而不是产生一个类的类——仅从它们的外延的观点来看，类的类是对等的。

Ⅲ. 当我们在心理学事实的领域中想要解决从类到数字或者任何种类的对应问题时，我们发现最核心的问题是如何使得性质已经被忽略的对等成分仍然可以区分开。例如，奇异类 A_1，A_2 等是通过它们自己的性质相互区分开的：一旦性质被取消，我们面临的问题是，因为没有相互区分的性质，$A_1=A$，$A_2=A$ 等等，为什么被试不可以用恒真命题 $A+A=A$ 结束自己的运算？但是被试仍然得到的是循环 $A+A=2A$，因为他知道其中的一个 A 尽管去掉了相互区分的性质，但是这个 A 仍然与其他 A 是不一样的。

① 拿破仑的元帅，一般认为有 26 位，而非 12 位。——译者注

我们该如何解释这一事实呢？具体而言，问题可以简化为，例如：有一组筹码，每个筹码之间的颜色是不同的，我们用另一组各个维度都相同的筹码替换这一组筹码，被试将如何区分它们(在使它们"以任何方式对应"的运算中)？

答案显而易见：在抽象的情况下或者区分彼此性质缺失的情况下，只有一个办法可以区分每个成分，那就是以某种方式给它们排序(以空间或者时间顺序，或者通过数数等)。并且，事实上，如果要求任何一个儿童在面对一个成分相同的集合时还能够区分它们(例如，将它们与另一组成分的集合做到"任何种类的对应")，儿童将按照线性顺序对这些成分进行排序，或者按照时间顺序对它们逐一进行替换，等等。

从心理学观点看，从类到数字的转换过程必然从系统之外引入一个因素，它源于类，这就是系列顺序——它源于非对称传递关系的群集。我们从以上(在Ⅰ中)讨论已经认识到，为了与逻辑学家的形式化过程中产生的假设相符，数字是逻辑成分的心理产物，这与庞加莱的直觉主义假设相矛盾。但是，从我们刚刚看到的结果来看，似乎相反，数字形成了一种新的综合——它不属于逻辑结构——在数字发展的这一特殊水平被试可以自由使用它。所以基数不可能仅产生于类的结构，而是蕴涵着这些结构与那些序列的综合。那么，对形式化的考察能够让我们陈述问题，而不是解决问题吗？让我们进行更为细致的考察。

Ⅳ. 在对整数序列的建构水平，儿童可以自由使用下列两种"群集"。

(α) 提供单个的类 A，A'，B' 等，被试可以将它们结合成以下形式：$A+A'=B$；$B+B'=C$ 等，及逆运算 $B-A=A'$ 等，取消 $A-A=0$；恒真命题 $A+A=A$，以及限于非恒真的加减结合律。

(β) 给被试一些成分，从同一特点(大小等)来看它们是相互不同的，他也许会按照 $A(a)A'$；$A'(a')B'$；$B'(b')C'$ 等关系对它们进行排序。这就是它们——$a+a'=b$；$b+b'=c$ 等，及逆运算 $b-a'=a$ 等，取消 $a-a'=0$；恒真命题 $a+a=a$，以及限于非恒真的加减结合律——的来历。

这两个群集被限制在它们的排序中，如我们已经看到的(第八章 45 部分)，原因在于它们的连续性特点(逐步地排序)以及它们缺乏联合系统。而且，它们二者均不可以运用到相同的成分中，假如后者是有限制的：要么是从这些成分的部分等值的观点来考察它们，在这种情况下它们产生一个群集(群集 α)；要么是从它们的序列差异观点来考察它们，这样的话就产生一个序列(群集 β)；但是不可以同时对它们进行分类和序列相关，即，结合的过程中同时满足独立于一个序列(A 和 A'之间，B 和 B'之间)并且还要被排序的这样的条件。

另一方面，一旦性质被抽象，我们就有了以下必然结果，我们认为这足够解释自然数的形式化。

(1) 两个群集中的任何一个离开另一个就无法正常工作，即，它们必然要合并为一个系统。事实上，如果我们暂且不去区分 A，A'，B' 等的性质，我们就不能够区分它们

(这会产生 $A+A=A$ 等),除非以 $A\to A\to A$ 等形式来组织它们(在这里→是后继关系):结构 α 的存在需要引入结构 β。但是如果我们想要对成分排序,对于性质的抽象会使得所有成分对等,其形式是 $A\to A\to A$ 等,从顺序本身的观点看,区分第一个 A 与第二个 A 以及第二个 A 与第三个 A 等的唯一方式就是将第一个 A 看作是一个空类的后继者,第二个 A 是类(A)的后继者,第三个 A 是类$(A+A)$的后继者,等等:所以对 β 结构的利用就预设了对结构 α 的引入。

(2) 对性质的抽象必然产生两个群集的合并,从另一个角度看,这事实上也抑制了对群集予以限制的条件的作用。其结果是:

(a) 假如成分被置换,形式 $A\to A\to A$ 中被排序的 A 们保持相同的顺序,也就是说,总是有第一个成分、第二个成分等等,即使我们变换了它们的位置:这样产生的顺序叫作"代替顺序(vicariant order)"。

(b) 假如 A 们被替换,类 $A+A=B$;$B+A=C$ 等仍然是不变的,这意味着任何 A 可以与类别 B 的种类中的任何一个成分结合,而无须进一步考虑连续性或者逐步排序(基于代替顺序而产生的重叠)。

(3) 所以,单位成分 $A\to A\to A$ 等的序列(其中,$A+A=B$;$B+A=C$;等等)表现出数字序列的所有特点,这就意味着,首先,它是一个序列,另一方面,$A+A=B$ 等等值于 $1+1=2$ 等等。

但是,必须注意的是这不再是一个数字约简——从这些逻辑实体出发通过对数字的演绎——为类或者非对称性关系的问题,而是一个自然数的综合,它既包含了基数也包含了序数,从两个群集出发,将二者结合成一个系统,并拥有自己的新结构。在这种情况下,我们必须得出结论认为心理发生——因为它与《原理》的形式化不相符——不可以约简为任何的形式化吗?当然不是。相反,我们注意到(在第五章中)刚才总结的发生过程已经引导格里兹发现了一种形式化,以及(第六章中)从发生数据与形式化结果之间聚合的观点来看非常有趣的一个事实,即,自然数的所有形式化已经利用了类和关系,其利用形式通常更加内隐而不是外显。

V. 在第八章45部分,我们已经看到,考虑到对于结合的限制问题——这一结构的自然练习蕴涵这一问题——格里兹通过选择引入某些限制性假设来对"群集"的结构进行形式化。

基于这些认识,格里兹从类的重叠的群集(假设其中的基本类都是独特的)以及非对称的传递的连通关系(排序)出发,他从它们的形式化以及它们的自然功能的观点出发,向世人说明,这两种群集同时联系在一起并且不可约简,因为等价的类(a,b,c,d 或者 b,a,c,d 等等)可以对应于不同的序列。

另一方面,如果我们通过将这些群集的成分转换为单位元素来抽象性质,那么就会有特定的结果。第一个结果是,所有与这些成分相对应的奇异类(singular classes)可以相互代替,因为恒真命题$\{a,b\}=\{a,a\}=\{a\}$,所以似乎可以将这些类的群集的约简

运用到两个单独的类，空和$\{a\}$。但是，同样的代替运用到序列群集中并不能消除所有的顺序，它只是引入了一个“代替顺序”。所以，尽管有这些替代，总是有一个成分$\{a\}$，它不可以出现在任何其他成分之后，然后是成分$\{b\}$，它可以出现在后边的成分之后。所以，结果是，如果类的群集的奇异类都是等价的，我们就可以通过它们的替代顺序区分它们而避免它们的重复。这就等于将类和关系的两个群集进行了综合，赋予了这个新系统自然数的形式属性。

事实上，将两个群集综合成一个新系统蕴涵着对定义D_1和D_2特别是假设G_0和G_8的改变——在第八章45部分已经讨论过。

因为根据假设，所有的奇异类是等价的，让我们保留其中两个，譬如$(m)(n)$，并且假设：

(定义一) $\pi = \mathrm{df}\{m\}\neg < \ulcorner(n)$

关系π像序列($<$)的群集的关系一样是非对称的、传递的以及连通的。而且，它是一对一的。

(定义二) $\leqslant . = \mathrm{df}\pi^*$

其中π^*表明关系π的祖先。所以，这一定义意味着如果x和y是两个客体，并且$x\leqslant y$，那么x与y相同，或者$x\pi y$，或者有一个z，那么$x\pi z$和$z\pi y$等等。

假设有系统$(N, \leqslant, +, -)$，其中N是一个非空集，$\leqslant$是大于关系，$+$和$-$是两个二进制的运算。字母x, y, z是变量，它们从N中获得自己的值。我们可以进一步得到：

(定义三) $x = y = \mathrm{df}x\leqslant y \wedge y\leqslant x$

这一定义与D_1相对应(第八章45部分)。

然后，格里兹回到了假设列表(G_0到G_8)(第八章45部分)，并且确认了引入单元所引起变化。G_0保留了自己的作用，所以在N_0中找到了自己的对应。至于$G_0(b)$和(c)所表达的限制，它们可以通过成分之间的性质差异予以解释，这一点在这里不再是问题。接着，运算$(-)$因为其他原因被限制——这一点依然有效。所以我们有一些假设：

(N_0) 如果$y\,\varepsilon N$并且$x\leqslant y$，那么$(a)\,x\,\varepsilon N$

如果$x, y\,\varepsilon N$，那么$(b)\,x+y\,\varepsilon N$

如果$x\,\varepsilon N$并且如果$x\leqslant y$，那么$(c)\,y-x\,\varepsilon N$

结合律、交换律和单调律没有改变。

(N_1) $x+(y+z)=(x+y)+z$

(N_2) $x+y=y+x$

(N_3) $x\leqslant y . \supset . x+z\leqslant y+z$

假设G_4表达了群集的属性特点——被限制的客体与它们自身相加得出$A+A=A$。所以，我们用G_4来代替它：

(N_4) $0+x=x$

一旦 G_4 被拒绝，施加于 G_5 的限制也会消除：

$$(N_5) \quad y=x+z. \equiv. y-x=z$$

现在，G_6 让位于一个定理，所以，变成了一个无用的假设。

$$(N_7) \quad \text{有一个 } 1\,\varepsilon N\text{，所以 } x\pi y. \equiv. x+1=y$$

它表达了单元成分的假设。最后，我们得到的是：

$$(N_8) \quad \text{有一个 } 0\,\varepsilon N\text{，所以 } 0\leqslant x$$

从这些假设的改变出发，格里兹得到了一些定理和六个元定理，其中前五个元定理与皮亚诺的五个公理相对应（包括递归的公理），第六个定理为加法提供了一个递归定义。反过来，假设在以下条件下得到满足，即“如果 x,y,z 是自然数，并且如果运算拥有它们的通常含义。所以，我们能够断定系统（$N,\leqslant,+,-$）是自然数的系统，包括 0（93 页）”。

VI. 所以，格里兹的形式化表明，在儿童的数字建构中所观察到的自然过程也许对应于形式结构。当然，仅仅从形式结构与自然过程聚合的这一事实出发，自然过程并不能获得更高的形式价值，不过，它还是至少表明了这样一种聚合。现在，这一事实更加明显，因为按照通常的模型，这种形式化并不包括将类或者关系“约简”为数字，而是相反，它包括对数字的解释——通过对类的重叠的群集与序列的群集进行综合；并且更确切地说，黑格尔使用了“综合”这一术语（类和关系$\leqslant$构成了数字的“环节”，后来“环节”在“扬弃”的意义上“超越”了自身）。

也许我们可以说不再有任何发生过程与普通形式建构之间的聚合，因为格里兹的形式化已经抛弃了它。但是，情况正是这样（并且对我而言，就数字建构的特殊却核心的问题而言，这似乎为更好地理解聚合带来了可能性），假如我们深入考察经典的约简，试图从关系实体中约简出数字，我们发现每一个经典约简都有一个对于类和关系（$<$）的双重诉求——这与我们所期望的发生观相一致，也与格里兹的形式化所外在地展现出来的相一致。

在这个方面，我们要再次考察怀特海和罗素在《数学原理》中所提出的基数约简为类的结构的问题。暂且不管种类理论，首先只有类（或者类的类）出现在这一约简中，数字和合并运算（$\cup$）被吸收到这一过程中，加法（$+$）又被吸收到这一过程中。至于一一对应运算（忽略我们在Ⅱ中所强调的可能），它只能依据类的扩展以及逻辑实体的扩展来定义。但是，假设 A 是一个数字类，我们如何来解释 $A+A\neq A$ 而 $A\cup A=A$ 这一事实呢？我们通过发生学的解释是，只有通过引入序列 $A\rightarrow A$ 我们才可以区分两个等价的成分，也才能够得到 $A+A=2A$（格里兹曾经以对应的方式进行了形式化）。事实上，怀特海和罗素以这种方式进行过探讨，但却是以一种相当隐晦和内隐的方式。他们的方案旨在说明两个数字类 A 和 B——代表和的说法——从来就不是相同的成员，为此他们只是简单地引入序列的差异。

例如①,假设 $A=\mathrm{df}(a,b,c)$ 并且 $B=\mathrm{df}(a,d)$。运算 $A\cup B$ 将成分 A 和 B 结合起来并产生了 $C=\mathrm{df}(a,b,c,d)$。运算 $A+B$,它产生了 $A'\cup B'$,其中:

$$A'=\mathrm{df}[(a,o),(b,o),(c,o)]$$

并且

$$B'=\mathrm{df}[(o,a),(o,d)]$$

由于 A 和 A' 具有相同的效力,B 和 B' 也是一样,所以我们可以从数字观点断言:

$$(A+B)=(A'\cup B')=[(a,o),(b,o),(c,o),(o,a),(o,d)]$$

并且我们绝对不会遇到任何有相同的成员的类 A' 和 B'。

简言之,我们发现,要实现 $A+A\neq A$ 的路径包括从 o,a 中区分 a,o,即通过有序偶来替换 a 成分。现在,如果这个方法是人造的,那么它事实上会诉诸顺序概念——它超越了纯粹的类结构,并且它以自然思维的方式引入一个参考,通过排序来区分两个不同却等价的成分的方式相似。

另一方面,初看起来,在奎因的《数学逻辑》中他似乎将加法约简为单个的顺序概念。假如 n 和 m 是两个数字,并且假如 s 是后继函数,我们可以从奎因的第 46 定义中导出以下公式:

$$m+n=S^{n}m$$

即,$m+n$ 与第 n 个 m 的后继相等。但是由于分开地考察所有分层,m 和 n 也是类,所以我们又面临类与关系的结合问题。

在冯·诺伊曼对数字的形式化中,他通过前件集——它们每个都有一个前件——来区分数字。例如,如果 m 对应于 $m-1$ 并且 n 对应于 $n-1$ 这些前件,数字 m 和 n 是可以区分的。我们无法更清楚地表达这一事实——数字的结构蕴涵着序列的顺序,并且另一方面而言,除了将两个成分的前件的集合并进类,没有其他更好的方法可以区分一个先于另一个的两个成分。

简言之,通常的形式化与自然建构的过程之间的主要差异——我们认为我们对这一问题带来了有益的建议并且已经被格里兹形式化——在于,在自然建构的过程中,我们外显地处理类的重叠与序列之间的综合问题,而在与综合的或者辩证的相对的明显的演绎类型的形式化中,我们既依靠类又依赖非对称关系;或者,像罗素和怀特海一样,我们首先以其中一个结构作为起点,然后又以一种说明策略或者解说为指导偷偷重新引入另一个。所以,这种观察同样支持自然过程与形式化之间聚合的看法——格里兹的形式结构表明它与观察到的发生格式相对应。

57. 逻辑还原论的困难

从莱布尼茨到罗素,逻辑学家的传统(见第三章)一直是努力将数学还原为逻辑,一

---

① 见 Grize, *loc. cit.*, p. 95.

般而言，就是从高级的或者复杂的系统还原为低级的或者更基本的系统。将数字还原为类或者关系时遇到了巨大的困难，它是追求还原论理想的路上遭遇抵抗的第一个例子。[①] 但是，还原论提出的问题似乎被哥德尔在一般意义上给解决了，他证明了确立算术的非矛盾性或者任何演绎理论的非矛盾性是不可能的，他所使用的方法是从这一理论或者更弱的系统如逻辑中借来的。

沿袭这一论证，根岑(Gentzen)证明我们可以从较强的系统出发来确立基本算术的非矛盾性，这一证明过程包含了超限递归的形式化。但是，哥德尔的结果仍然完全禁止从高级到低级的约简，特别是，贝丝强调(20 部分)，它为我们提供了一个将层级形式置于较强和较弱系统的工具，所以提供了较高和较低概念的一个客观标准。

现在看来，这样一个结论具有认识论方面的重要价值，它可以让我们对逻辑数理实体以及它们与被试之间的关系给予几种可能的解释。这种不可约简性得出的第一个重要结论是独立地认可一般的认识论解释。它是对某种逻辑原子主义的禁止，逻辑原子主义与心灵的自然倾向观点相对应(倒不如说是一种人为的，但却广为流传的思想)，这种思想要求我们打破复杂的系统，使之成为简单的系统，再使得简单的系统成为自己存在的基本成分。只要我们让较低的系统从属于较高的系统，并考虑到它的非矛盾性条件，就能够保证系统整体性的自洽性存在。那么，这些适合它们的存在类型到底是什么？

首先，我们会理所当然地认为，我们可以从哥德尔危机中得出一种新的论据来支持柏拉图主义：一旦较低的系统从属于较高的系统，并且考虑到它们的一致性保障问题，那么，逻辑数理的知识结构，一方面，似乎独立于被试(由于他不能证明他已经适应的系统的非矛盾性)，另一方面，处于至高无上的地位(假如我们可以以这种方式将它置于这个位置)，因为较低水平只能从较高水平获得它们的内在一致性。

但是，在这种特殊情况下，柏拉图主义的解释遭遇了前所未有的困难。柏拉图主义面临的一般性困难是很难产生结构的完整形式——我们已经发现似乎通过渐进的建构才可以形成这种结构——除非将这些结构看作是源于外部现实的我们的经验的产物：但是，如果是这样的话，为什么这些发现要遵守类似于建构规律的连续规则呢？现在，在这种特殊情况下，我们让较低水平的非矛盾性服从于较高水平的非矛盾性并不能让这一困难局面有所好转，由于较高水平的非矛盾性并不受它们自己的非矛盾性论证过程的影响，它们仍然要服从于更高级的水平。当这个序列包含部分实体的一个层级(例如，超限序数)时，我们就可以理解柏拉图主义如何将无限的序列置于一个无限大的实体——预先包含了它——之上。但是，当这一序列是一个将系统的非矛盾性置于比自身还高级的系统之上的序列时，我们只有引入有效的动态性才可以想象这一序列的存

---

① 关于一般的逻辑还原论的困难，见 S. Papert，"Sur le réductionnisme logique，" in *Etudes épist. génét.*，Vol. Ⅺ，Etude Ⅲ。

在，因为假如一个系统作为一个独立于被试的实体而存在，那么所有水平的非矛盾性状态才是它能够存在的条件。如果这种非矛盾性特点依赖于它对较高级系统的服从，那么这种服从是由什么——如果没有它的话，较低的系统将面临矛盾的威胁——组成的呢？简言之，从柏拉图主义的观点来看，通过服从于较高级别的系统而获得的哥德尔的非矛盾性概念，可以被看作是与我们人类有关的、理解数学实体的有限方式，而不是对独立于我们的这些“实体”的内在属性的一种表达。除非我们将这种实体看作是超验主体的建构，而在这种情况下，这个超验主体将一直忙于通过在较高水平的创造来保证较低水平的非矛盾性。但是，这种诉诸主动的超级主体的方法将使得我们越来越远离柏拉图主义，而与被试本身却越来越近。

相反，在发生建构主义的观点来看，较高级别到较低级别的不可约简性不仅符合“反省抽象”的框架，而且直接导出了建构的根本原因。事实上，发生学解释所面临的主要困难在于解释为什么渐进的建构一个接一个出现，特别是为什么它们获得新的形式。通过对较低结构的成分进行抽象而得到一个较高的结构，但是，这种抽象过程假定这些成分是通过新的运算——转换它们时的重构——而被反映的。那么我们必须解释这些运算如何同时是新的，并且预先被较低的结构所决定。答案是由于这种结构是有限的，其空白需要一个可以完成它们的建构。但是，有无数多的方法可以完成一个未完的结构，所以我们必须解释为什么选择了最简单最可能的那个方法。

现在，哥德尔的结果为这一问题提供了第一个回答：结构发展的不确定是因为没有一个系统是自足的，不是因为其他方面缺乏自足性，而是因为它缺乏足够的内在一致性以确保自身的非矛盾性。所以，每一个系统必须按照可以不断强化自己的内在一致性的方向前进。这将是心理学从不可约简性——从较高水平到较低水平——获得的教训，我们希望表明的是新的运算——进入反省抽象时就有保证这一反思的目标——不仅仅趋向于扩大初始结构或者概括它，而且要沿着强化非矛盾性的方向去努力。由于在心理学层面来看，被试所获得的非矛盾性源于他思维的可逆性，这就意味着一个结构的扩展倾向于促进可逆性的发展。这实际上是我们从群集到群 INRC 转化中引用的例子。

但是，反省抽象律使得我们能够理解为什么只要涉及一个系统的非矛盾性，它就绝不是自足的：假如一个较低的系统通过变成较高系统的一部分而完善自己，那么它的形式化天生就不能保证它的非矛盾性。

简言之，这个从较高水平到较低水平的不可约简性的例子似乎更多地支持形式分析与发生分析之间聚合的观点，而不是支持静止的对于数学事实的柏拉图主义的解释。对于一个可能变得更弱或者更强的系统——根据较高系统是否保证较低系统的非矛盾性——的层级排序的简单考察，这一过程本身就已经让人很感兴趣——从可能的聚合观点来看，因为发生学结构不可能始于最强的系统，同样，由于不同却类似的原因，公理结构始于最小的条件而非预先准备了所有的条件。

58. 形式化的局限

我们可以将刚才提到的这一基本规律看作是形式化的基本限制之一，由于这一限制，我们不能通过它自己的方法或者较弱的方法来论证演绎系统的非矛盾性，所以，我们不打算回到这个问题上。但是，我们现在必须强调，有两个更加常识化的理由来限制形式化，因为它们同时强调形式系统和自然结构之间最明显的差异，以及它们之间深藏于差异之下的最深刻的聚合。

正如帕斯卡在他的《沉思录》中所强调的，我们不可能定义任何东西或者论证任何东西，因为演绎系统必然从不可定义的概念出发——它们用来定义其他概念，论证则是从不可论证的命题出发——它们被选择作为公理并用来论证可以论证的命题或者定理。而且，我们知道概念被划分为可以定义的和不可定义的，命题被分为公理和定理，这种划分只是一个选择问题，而非内在属性。但是，无论选择了什么系统，总是有一些无法定义的和无法论证的，假如这两种在形式化系统中作为形式结构的起点被表征，那么，它们并非从形式上产生或者建构自己。这就是我们所说的形式化的最低限制。

另一方面，现在我们知道，严格形式化的条件之一是区分，一方面，形式系统本身是句法系统，它源于元语言（或者语义学），为成分赋予意义。现在，如果这种元语言按照可以被"解读"的条件①被形式化，那么它不能用语言本身来被形式化。所以，这就是我们所说的形式化的上限。

以理论 A 为例，它被某种方式形式化。然后我们必须区分句法 A，或者 *Syn*(A)，即，名称的集、谓词、关系、与字母有关的判断、A 的不同记号和公式，以及 A 的语义，或者 *Sem*(A)，即，涉及 A 这一符号解读的所有东西。在这些条件中，包括 *Sem*(A)和 *Syn*(A)的元语言只能通过比 A 的步骤更强大的程序来形式化：例如，贝丝写道，②"如果 *Sem*(A)和 *Syn*(A)共同被认为是 A 的元系统 *Met*(A)，那么两种结果（上文已经确立）共同表明 *Met*(A)必须超越 A——在表达方式以及论证方法两方面"。结果是，为了对 *Met*(A)形式化，我们必须引入元元语言*Met Met*(A)，它必须包含更加强有力的程序等等。

在继续之前，我们需要进一步注意的是，形式化的上限并没有以任何方式限制它的价值。一方面，正如希尔伯特和伯奈斯③特别强调的一样，总是有可能建构一个兼容系

① 我们会说我们已经解读了 A 在 A 中的语义，如果 X 是 *Sem*(A)的任何一个命题，并且 X′是替换 *Sem*(A)中的所有概念——用它们的定义代替——所得到的结果，X′同时与 X 一样是真的。

② E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam, 1959, p. 340.

③ *Grundlagen der Mathematik*, Berlin, 1939, Volume Ⅱ, p. 268.

统。另一方面，正如格里兹在“发生认识论中心”①的《求索》(*Etude*)中所强调的，正是通过这些限制，形式系统才对于知识是有用的。

总之，如果形式化在开始的时候就需要受到限制，那是因为必须给出定义，为了做到这一点，必须从某处找到这些限制(通过回归最终会以普通思维终结)。系统来看，形式化在结束的地方受到限制，因为无论我们要建构的兼容系统的数字到底是什么，我们总是不可避免地要使用库里(Curry)所说的U语言的，或者交流语言——它的表达被认为可以被读者理解。

自然思维正是由于它不是形式化的，所以忽略了这种区分：它不需要与公理和定理(或者不可定义和可定义的概念)类似的两种成分，它没有与语言和元语言相对应的两个不同领域，但是却将两个方面在同一平台上结合了起来。

自然思维和形式系统之间的明显差异首先被对应于两种行为的区分功能或者“意向”来进行解释，二者的差异如此明显以至于认为它们是根本的差异，它几乎完全掩盖了二者之间事实隐藏起来的聚合。形式化专门指向论证，这也是为什么它要经历演替顺序的原因，即，线性模式：首先是公理，然后是定理，最后是元语言。相反，自然思维开门见山并且有必要的创造功能，即，扩展获得的知识系统。现在，这种系统是循环的，它同时解释由形式化所划分的不同阶段之间的不同“自然”区分的缺乏现象，以及通过引入这些区分以及线性顺序形式化既被来自较低水平又被来自较高水平的规则限制的事实。

每一个知识的自然系统应该是循环的(除了在有些情况下，有一个论证的开始，即，思维引入一个部分线性的顺序，它具有形式化的特点)，对于这一点，既可以从所使用语言的意义的关系去理解，也可以从我们行为意义之间的关系去理解。事实上，依附于语言词汇的意义是相互依赖的，索绪尔(F. de Saussure)已经说明在语言进化的每时每刻词汇的意义如何形成一个独立于历时性的共时性系统，其中的多重关系，尤其是对立关系之间相互制衡。所以，我们并不期望在语义之间发现一种线性顺序，正因为如此，词典定义经常是循环的。至于动作系统或者运算，也存在相同的情况：每个成分依赖于其他成分，所以常被理解为相互作用。如果我们采用发展的观点，我们会经常遇到鲍德温(J. M. Baldwin)所说的“发生循环”(genetic circularity)。一个恰当的例子是概念与判断之间的关系：概念是判断行为的产物，这似乎让我们将判断放在优先位置；但是，每一个有效的判断是由概念的联结构成的，这又让概念的地位超越了判断。

总之，具体现实，或者自然行为或者思维的每一种样式都是以整体的形式出现的，其中的成分之间相互依赖，所以很难截然分开。由于直觉相对具有同时领悟的特点，它有时候可以成功地把握语义并且在这种相互依赖的关系中领悟各自的含义。相反，当

---

① J. B. Grize, "Remarques sur les limitations des formalismes," in *Etudes épist. génét.*, Vol. XVI, pp. 69-97.

为具体目的而清晰地表达定义时就遇到了问题，例如，教学的(词典等)，此时，引入了线性顺序特点的句子开始——以部分线性序列的形式，而无须完全避免循环性。首先，在证明或者论证命题时，也需要引入部分线性序列，从已经被认可或者判断为具有自明性的命题出发(这暂时扮演了形式理论中公理的角色)，但是这些部分序列只是线性的，因为尚未被论证的起点是在回归分析中人为选定的。至于形式理论，由于它们涉及论证或者最大验证的问题，它们需要引入严格的线性序列，因此，所有循环都被看作是方法上的失败。但是，这依赖于下列条件，这些条件的后果不能在论证中蕴涵任何恶性循环，但是可以在系统的起点与系统的完成之间重新发现蕴涵在自然思维"整体"特点中的循环。

这些条件中首先是引入一定数量的定义——这种引入过程可以单独发生在系统之中，对于这些定义可以考虑它们独有的明确的性质，而无须顾及可能的内在的意义。但是，这些被定义的概念依赖于未定义的概念，无穷回归的不可能性让这种不可定义的存在成为必然：现在，这些不可定义的概念显然依赖于从属于元语言的成分——它已经表明了循环情况的存在，从论证的观点看避免了恶性循环的风险，但同时也未得到一种绝对线性顺序的可能性。

所以，问题就变成了选择最小数量的公理——它们同时是相互独立并且非矛盾的。这又产生了一个问题，因为非矛盾性毫无疑问地排除了绝对的独立性。为了确定能够做出什么推理，所需的与系统有关的独立性仍然有效，这种独立性通过重构系统——无须使用公理，其独立性需要我们论证——而得以确立。所以，从形式建构的观点来看，没有困难，但是从形式上而言，由于系统的非矛盾性不可以通过它自身或者通过"较弱"的方法来论证，所以在公理独立性(与系统相关的)与非矛盾性之间的关系为出现一个不严格的线性系统打开了可能之门。

至于元语言，它必然指向自然的或者非形式化的思维，这又将系统置于非线性整体中。

所以，在不可能获得严格的线性序列的意义上而言，结论似乎是形式化的内在限制是实际聚合过程的有力证据，尽管在线性序列——通过形式结构获得——和自然思维的循环特点之间存在明显差不同，一旦我们试图确定这种相对线性是通过什么获得的，我们就会发现这种差异。从同时性的观点看，自然思维在本质上是循环的，而从历时性的观点看，自然思维包括一系列的建构，从发生分析的观点看，这些结构的初级结构退回到一种无穷回归中，其终极结构往往为新的建构开放——这会扩大循环而无须打破它们。就形式化而言，它通过采用不可定义的概念和不可论证的命题作为定义和论证的起点而终止了无穷回归，它通过在论证阶段之间——人为分隔的阶段——创设一种线性顺序而打破了循环。但是，就像元语言一样，由于不可定义的概念和不可论证的命题的初始的一致性最终包含自然思维，它所获得的线性就像是切除了辩证循环的心脏——它制定了自然思维的规则。

第十二章 认识论问题与逻辑和心理的相关性

现在，我们想要从这些对数学心理学的反思——以第七章42部分中讨论的认识论意义为起点，包括本体论问题（包含对逻辑分析和发生资料的比较）——中得出一些关于一般认识论的结论。

59. 经验论的解释与先验论

在传统意义上（与逻辑经验主义相对）可能对数学最早提供解释的是经验论：逻辑数理概念来自于经验，或者物理的（来自于客体的抽象），或者心理的（来自于内省数据的抽象，即从被试出发，但是作为内省的对象，并且不是作为一个主动的被试来组织客体和他自己的意识）。

恩里克斯（F. Enriques）作为纯经验主义的最后的代表之一，他希望从不同的感觉通道出发来解释几何的不同形式。① 但是，我们还发现了一些作者的修正版的经验主义，他们表达了非常不同的观点：例如，在贡塞斯的早期作品中，他认为我们通过客体的数量与感知颜色一样，②甚至布伦茨威格（L. Brunschvicg）在为智力的动态特点辩护时也认为算术属于物理-数学领域。③

所以，我们现在无须回到心理主义的经典代表那里，显然，求助于心理学就可以让我们认识到经验主义的诱惑。出于这种原因，我们最适宜的做法是在本章得出结论之前回顾为什么发生分析已经让我们相信这是一个根本的误解。有三方面的原因：

（1）在发展的最初阶段，被试通过操纵客体而发现逻辑数理事实，这些事实不是源于客体，而是源于施加于客体的动作，即源于被试的活动。

（2）从另一方面来看，被试内在的逻辑数理关系不是通过心理经验而发现的——也就是说心理经验使得我们通过内省的方法（悲伤、渴望等等）研究被试的特定心理状态：它们是被试通过一般的动作协调的格式化——它既不是知觉的也不是直接经验的对象——而建构的。

① F. Enriques, *Les concepts fondamentaux de la Science*, transl. by Rougier, Paris, 1914.

② F. Gonseth, *Les mathématiques et la réalité*, Paris, 1932, p.127.

③ L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, 1912.

(3) 这种格式化对于所有被试都是常见的(所以,它不依赖于个别动作的特点)。在发展的早期阶段,这种格式化产生逻辑数理经验,这种经验是独特而自成体系的,它的作用仅限于确认动作协调的结果——这种结果无法通过推论而得到。一旦动作被内化到运算的形式中,这种确认动作协调结果的过程就变得非常高效。

所以,在发展过程中,我们在任何地方都无法找到从经验主义意义的经验出发所形成的逻辑数理概念;但是在初始水平,无论它多么基础,我们发现了一种建构的行为——它在建构经验的同时也在组织自己。

至于被试开始意识到这些结构的方式,我们一再地发现这种方式包括重构。"反省抽象"——使用被试发现动作协调律的方法——包括投射或者在一个新平台反映从所发现的结构中抽象的对象,以便于改组和使用。所以,事实上这种重构是一个新结构——它丰富了初始结构,因为这种转换假定运算——使初始结构脱离其具体背景的限制——提供了一种更一般和抽象的模型。这种相同的过程让我们进一步提取出几个不同结构的共同成分,并且将它们进行协调形成更一般的结构。

发生分析提供的这一看法与经验主义渐行渐远而与先验论越来越近,但是它仍然处于这两种极端观点的中间,并未倒向先验论的怀抱。因为,如果被试的行为确实是先验的——在与某种经验有关的层面而言,那么它就会表现出不确定的经验建构或者建构能力,这与先验论的两个根本特点是不相干的:完整的结构——支持或者预先决定后续的建构,以及从初始阶段就表现出的必然性。

对于先验论的各种历史形式,大家都比较熟悉。在一项针对《本质与逻辑的知识》的简短却丰富的研究中,①希尔伯特将先验论引入当代数学思想中。希尔伯特首先强调的是"预存的和谐",根据他的说法,这种和谐存在于演绎或者形式格式与实验知识之间,譬如物理几何学。现在,如果这种预存的核心存在的话,我们必须承认它是"在经验和演绎之外,经验和演绎之外的第三来源,知识的第三种来源"。康德的先验,相对于它的本意在较窄的意义上理解为:"我同意某种先验的观点对于理论系统——它们是所有知识的基础——的建构是必要的。我相信在最后的分析中,数学知识也是以这种直觉观为基础的,一定的先验直觉的残余是数字理论的必要基础……就本质而言,在我的关于数学原则的研究中,我认为情况确实是这样。"(pp. 28—29)

所以,希尔伯特的文章表明,如果我们想要保留先验论假设的本质,让那些预先决定知识的各种类型和形式工具为我们所用,我们只有将某些直觉归因于先验,而这与经验以及演绎建构是相反的。

但是,即使将先验论降低到最折中的表达形式,由于它受到逻辑主义强硬派的支持,如果我们将它与发生数据相比较的话,先验论似乎为我们提出了两个根本的困难:

第一个是经验与演绎之间的和谐远不是"预存的",即,从开始就假定,从初始阶段

---

① 在 *L'enseignement mathématique* vol. 30(1931)中,由 Müller 翻译。

开始某种和谐就逐渐形成，然后在某些情况下，演绎预期经验。但是这一事实不必然预设一个共同框架的前件，并且作为一种解释，它足够指代具有共同起源的平行结构，这正是初始阶段的渐进的和谐。

事实上，在第一个阶段，经验与演绎之间的和谐只是逐步确立的，因为，初期的经验是混沌和普遍的，在发展过程中，经验只能通过逻辑数理框架的动作逐渐地建构。并且如我们已经注意到的这些框架本身也是逐渐通过在动作中抽象而不是从客体中抽象而组织起来的，因为它们在初期也需要特定形式的经验。

所以，只有在高级的发展阶段，在特定情况下经验和演绎之间的联系才表现出能够通过演绎来预测经验的形式。欧几里得几何就是这种情况，希腊物理学没有将欧几里得几何运用到经验中（亚里士多德空间不是各向同性的），所以希腊物理学只变成了物理学中牛顿万有引力概念的主要部分。黎曼几何也是这种情况，在爱因斯坦将它重新运用于万有引力很早以前，它就以演绎的方式在建构。当代的微观物理学为我们提供了许多此类例子。

但是，究竟在何种意义我们可以运用演绎与经验的和谐性来解释数学与现实的一致性？不能在经验意义上，因为理性为经验提供形式而不是理性源于经验，并且有时候，理性会以一种令人吃惊的方式——通过预测未来的经验——来为经验提供形式。但是，我们也不能在康德或者希尔伯特的先验的意义上，因为在开始阶段不存在经验和理性共有的框架——预先包含由理性发展而来并被运用于经验的形式。我们所能预先提供的是一个共同的发端，从这个起点出发开始了两种结构，起初是独立的，然后是平行的，但是理性要先于经验，并且这种共同的起源只是被试动作的协调。但是，由于这种一般性的动作协调本身依赖于神经协调律，后者又依赖于一般性的有机体协调律，并且由于有机体起源于（至于具体方式我们仍然未知）与物理化学环境的交互作用，这种理性与经验的共同起源从一开始就认为被试（有机体）与客体（环境）之间存在基本的交互作用。那么，这不是一个预先包含整个发展过程的先验的框架，而是一个共同的起点，从这里出发开始了一系列不间断的建构过程，然后是一个阶段接一个阶段地对前一阶段已存结构进行重构的一个过程。

我们已经清楚了希尔伯特先验论的第二个困难，而且，这一困难直接来自于第一个困难："特定直觉的先验残余"——可以作为数理论等的基础——并不是发生学意义上的一种单独的功能或者知识的第三种形式——可以与经验和推理相提并论。我们已经努力说明（第九章 51 部分）直觉本身是一个不间断的建构系列，以运算机制的确立为终点——运算机制本身在形式化演绎的起点处。

总之，发生分析所提出的运算建构主义既不能约简为经验主义，也不能约简为先验论，因为我们不能从客体中导出智力本身，并且因为被试并不拥有预先包含理性的框架，只有某种行为可以让他们建构运算结构。这种建构不是人为的，因为它的起源不是被试，它也不受被试的控制。认识论被试（相对于心理学被试）与所有被试一样，因为一

般性的动作协调包括生物组织本身。与物理经验主义或者心理经验主义不同，建构主义意味着内部调节，其客观表现是协调结构的渐进平衡，其主观表现是逐渐精致化的标准系统与自明性种类。建构主义的这种生物学起源并不会导致类似于物理经验主义或者心理经验主义的生物经验主义，因为被试没有此类经验，他只知道通过自己的行为结果而获得的动作协调律，即，通过建构行为结果，首先是通过逻辑数理经验——与经验主义经验非常不同，然后是演绎方法。

60. 对于数学的唯名论或者语言学的解释

语言学包含逻辑学，尽管是一个不完整的逻辑学(分类，关系，一些命题运算，量词等等)以及算术——其主要形式是口头的自然数系列和一些函数。所以，我们比较容易理解这样的事实，即，我们经常试图通过语言来解释逻辑，这就导致了对于数学的唯名论解释并且有时候是约定主义的解释。

维也纳学派开创的逻辑经验主义鼓励彻底区分两种事实——一种是综合的或者实验的事实，以知觉为基础，另一种是分析的事实，源于同义反复的组合(从定义出发)——来解释数学。接着，卡尔纳普(Carnap)试图将这些分析事实约简为纯句法，后来，塔斯基认识到引入语义是必需的。另一方面而言，莫里斯(Morris)进一步建议增加语用学，这一提议仍处于讨论中。

独立于逻辑学的技术问题，在这种技术问题之上我们无须表达看法，由于在认识论的解释中包含了将逻辑数理事实吸收同化到一般的同义反复的句法中——通过语义学完成，所以它们与语言的联系成为必然。从发生的观点看，如果我们能够证明以下两个命题，就能证明假设：(a)运算和它们的结构化整体的存在依赖于语言，首先是具体的方面(伴随对客体操纵的语言)，尤其是假设演绎的语言；(b)大部分的逻辑数理结构是通过教育和文化传递获得的(家庭和学校活动，阅读等等)，其主要工具是语言。从这两个命题出发会得出最基本的结论，我们不再需要到被试的一般活动中——其特点是他的生物的、心理组织的性质——寻找逻辑学和数学的发生学起源，而只需在集体的被试中去寻找，即，在社会和语言群体中寻找。

从认识论观点出发，逻辑数理结构和运算同化到集体的语言的活动规律中，对此有两种可能的不同解释：(1)实在论的语义解释：虽然有明显的同义反复句法的唯名主义，但是概念及其意义将是集体通用的——其价值特点源于社会团体的权威。正是在这个意义上，涂尔干(Dürkheim)反对列维-布留尔(Lévy-Bruhl)而为逻辑和理性的一般性辩护，因为文化的基础是文明，它具有恒定的规律和标准的作用。(2)完全的唯名主义的解释将走向约定主义，因为社会关系的作用首先是确定约定俗成的规范。这种约定主义已经在维也纳学派的几个正统的支持者的学说中初见端倪。例如，弗兰克(P. Frank)保留了庞加莱作品中的约定主义取向(不仅仅这一个，由于就递归数字的直觉以

及群的结构而言，庞加莱相信综合的先验判断，所以这种有限的先验论当然被弗兰克拒绝）：就原理的隐藏在定义中的本质而言的数学物理学中的约定主义，在欧几里得度量和非欧几里得度量的选择中的几何约定主义（无疑，这种几何约定主义阻止了庞加莱对相对论的发现，只有一步之遥）。但是，逻辑经验主义论题中暗含的约定主义孕育了鲁吉耶（L. Rougier）这样的怪才，他在《知识通论》（*Traité de la Connaissance*）中将整个逻辑学，包括非矛盾性原则，约简为一个纯粹的口头约定问题。①

我们会立即发现，对于逻辑和数学的社会语言学解释既包括确凿的断言，同时也面临形式效度的问题，这种情况堪与纯经验主义当时的情况相提并论，与先验论的情况相比更是有过之而无不及。所以，这些确凿的断言需要心理发生学的证实。现在，就被试的逻辑数理行为与社会语言传递的关系问题，我们有四个基础的数据集：动物心理（Kohts，W. Koehler，O. Köhler 等等）的一些数据（数量少但却有关），普通儿童的整个发展过程，与逻辑结构的获得有关的实验（Gréco，Wohwill，Morf 等等）以及一些涉及聋哑儿童的数据（P. Oléron，M. Vincent，F. Affolter）。综合这四种类型的结果，我们得到以下结论：

（1）在语言存在之前，在高级动物中以及人类婴儿出生的前几个月中，我们发现了动作的完全的格式化——包括格式的协调，关系的结合（例如，在 A 中寻找 x，如果 A 位于 B 之下并且 x 已经放在了 B 之下，但是当被试举起 B 时，x 是不可见的），甚至对于扩展到 5 个或者 6 个成分的集合的认识。所以，我们发现，甚至在语言之前就出现了类的结构、关系和数字的发源。

（2）正常儿童在 2—3 岁与 11—12 岁之间的逻辑数理运算的发展源于两个方面，一是内化了的动作的协调，另一个是对语言联系的运用（与第一方面的作用相当）。例如，一个 5—6 岁的孩子，可以口头数到 10，他不明白数的守恒，也不接受以下事实，两个数量 5 和 2+3 是相等的（可以分别数到 5），他可以通过获得运算的可逆性而无须语言发挥关键作用而达到以上的守恒以及相等。另一个例子：尽管儿童语言中已经出现了量词"所有"和"一些"，但是只有等到平均 7—8 岁，他们才可以理解这样的推断，即"如果所有的 A 是 B，并且如果只有一些 B 是 A，那么 B 比 A 多"。同样，对可逆性动作的理解，如，如果 $A+A'=B$，那么 $A=B-A'$ 将在解决此类问题的过程中发挥的作用胜过语言机制的作用，至于语言水平本身而言，我们经常要等到 9—10 岁的儿童才能区分以下表达之间的不同，如"我的有些花是黄色的"与"我的所有花是黄色的"（这两种表达都被理解为"我的一些花都是黄色"）。

（3）涉及逻辑结构学习的实验（例如，我们刚才讨论的数量包含，或者数字集合的守恒等等）表明，语言或者单凭经验的观察中的任何一方都不足以在儿童的头脑中确立他尚未拥有的结构，唯一成功的方法是从一个已经存在的较弱的结构出发，通过引出反

① L. Rougier, *Traité de la Connaissance*, Paris, 1955.

省抽象而得到结构的一般化。一般而言，儿童在家庭、学校的学习过程产生特定的结果，但是前提条件是儿童能够同化传递给他们的内容，并且他只能通过同化的程序——它们是前结构，但是尚未习得或者完全习得——才能实现这种同化。如果已经部分习得了同化程序，那是由于前结构尚未习得或者完全习得，导致同化程序仅仅被理解的缘故，等等。所以，社会和文化传递并非在一块“白板”上书写，这与经验数据被记录下来没有多少不同(虽然是经验主义性质的)。

(4) 用聋哑儿童进行的实验与“符号功能”对于表征思维的建构是必要的这一假设并不矛盾，所以，“符号功能”对于动作内化为运算的形式也是必要的，因为聋哑儿童具备这一符号功能(手势语、符号游戏等等)。但是无论是发声的语言还是社会语言的传递对于基本运算结构的形成都不是必需的，因为聋哑儿童可以排序、分类、数字对应等等。

(5) 总之，毫无疑问语言是特定水平(假设演绎与命题水平)的结构形成的必要条件，但是它并非任何运算结构的充要条件。至于其他，就像语言的理解要以智力和它的运算机制为先决条件一样，如果没有智力的预先存在，语言的实际发展——很遗憾，我们在这方面尚无相关知识——将是不可思议的事情。

从发生学观点来看，显然，对于逻辑数理结构的社会语言学解释是不充分的，它无疑强调了一个必需的因素，但是这从来就不是充要条件。这一假设与我们获得的运算的感知运动发源的所有知识相矛盾，所以与我们回到一般性的动作协调性——其普遍性被语言本身所反映——的必要性相矛盾。

至于唯名论的解释——可以在考虑这一脆弱的发生学基础的情况下为它辩护，在我看来它们遭遇了最根本的困难，即，因为语言(我们并没有否定其功能，只是做了限制)的作用，一般性的动作协调不再是内心独有的——像动物或者非常小的儿童那样，也不再变成人际间的现象，并至少在特定的水平对客观性做出贡献，毫无疑问，个人本身不能对客观性做出什么。的确，社会生活通过其他一些方式以及保证客观性的协调得以表现自身的存在，因为群体的约束是集体主观性——表现在对观点的接受、信仰等等——的来源，集体主观性与个体主观性一样几乎没有依据。但是，事实上正是人际间动作的协调，即，相对于观点限制的协作，构成了一个运算系统，这些运算共同或者协作进行，并且，正如我们在其他地方已经说明的，这是一个与那些个体内协调相同的运算问题：结合、重叠、对应、交换等等。因为交流只是在不同个体的运算之间确立通信的过程，所以，这种通信仍然是另一种运算。讨论只是一系列口头辩论，包括分隔、结合等等，或者交换。但是，这些运算共同需要较高水平的相互证明而不是自我证明，以便将协调律变成标准律，调整人际间的智力交流，从这一过程衍生出了思维的道德特点——逻辑认为这种道德特点存在于人际交流的集体性中。似乎是这种协作的标准性阻止我们从逻辑数理结构的社会语言性方面获得对逻辑数理结构的严格的唯名论解释，因为唯名论的解释不仅仅是一个发声(flatus vocis)系统。

就鲁吉耶的全心全意的约定主义而言，我们经常发现当选择变得不可能时，术语“约定”也就失去其意义。现在，如果非矛盾性的形式原则只是约定俗成的，那么就很难解释具体运算甚至感知运动阶段的一致性——这是非矛盾性的起源。例如，假如一个动物的觅食行为需要不一致或者矛盾的行为，我们很难发现这个动物还能够存活下去的情况。所以，如果各个水平的协作没有一种非矛盾的协作形式——无论这种形式是多么粗糙原始，那么生命早就从地球上消失了，当然也就没有认识论家来为约定主义辩护。

61. 柏拉图主义者对于数学的解释

柏拉图主义的优势在于它抑制了创造性建构的困难，即，从简陋的结构转换为丰富的结构的问题。罗素在他的第一阶段认为命题“美洲在哥伦比亚之前就已经存在”是一个不可否认的事实。我们很难不被他的假说——逻辑数理实体像上述命题一样也是真的——诱惑，至少在偶尔的情况下。那么，依据它的假设，是我们的心理发现了而不是发明了逻辑数理事实。

而且，这种实在论与数学家的深奥的观念相呼应，布特鲁(P. Boutroux)曾经非常恰当地将这种观念命名为“固有的客观性”(intrinsic objectivity)。在布特鲁的佳作《数学家的科学理念》(*L'idéal Scientifique des Mathématiciens*)中，他将数学史划分为三个时期：“沉思的观念”，它是希腊人的观念，与早期的柏拉图主义相对应，然后是西方代数、解析几何和数学分析的开始；“综合的观念”，这一阶段给人的印象是，发明者几乎可以随意建构并操纵自己的运算；最后是始于19世纪的“固有的客观性”的观念，我们见到的是更加丰富和复杂的结构，发明者不再感觉自己在建构，而是在发现，并且几乎是在无限的系统世界——拥有它们自己的规律，拒绝任何人为的处理——中做出选择。所以，第三种态度就很自然地回到了柏拉图主义，只不过其基础是直觉或者抽象动作，而不再是沉思本身。

但是，柏拉图主义的朴素性被它自身提出的三大困难所抵消。

第一个困难是，为了让数学与独立于我们的实体相对应，导致了对这些实体的静止的观点，因为如果它们以一种独立于我们的方式建构了自己，这会产生客观的存续时间问题：我们知道人类的建构需要时间，但是我们将无法理解这种外部的创造——它已经是不完整的——意味着什么。现在，尚不确定一个完整的世界——包含所有的逻辑数理实体——会提出可以解决的困难。但是，对有些人来说，要实现潜在的完美仍然是不可思议的事情。当当茹瓦将超限的直觉对应于阿喀琉斯(Archilles)追赶乌龟的方式的时候，他跨越了序列1/2＋1/4＋1/8＋…到达了超越它们的第一个数字，如果那三个间断点(＋…)表达了被试可以完成无限重复的动作，那么我们按照当茹瓦的办法继续的话就不会遇到困难，但是，如果这一序列中的所有项都是实际存在的，那么我们就不能

理解他的意思。

第二个困难是我们不明白被试与观念的实体是如何结合起来的。在有知觉能力的生物那里,我们可以理解(非常近似的,但是丝毫没有任何神秘的成分)一个外部客体如何作用于感觉器官并且通过隶属于知觉的同化结构被理解。的确,我们没有找到来自被试的信息与被试的可以感知的解释或者解码的动作之间的准确的界限,也许它们之间没有界限,只有相互作用的连续体,但是我们至少知道没有一个客体(甚至在唯我主义中,一个普通的知觉必须与幻觉相区分)。现在,在观念实体的情况下,我们唯一知道的实体,诸如 1,2,3,…或者 $aleph_0$,或者 $p'' \supset q$ 等与被试之间的联系是被试的一个动作——以演绎的方式重构了这些实体。如果说他有关于它们的直觉,这不是一个充分的回答,因为直觉也是一种结构,而且是一个不太准确的或者说更加符号化的一个结构。而且,柏拉图主义者的被试重构观念实体——以便与它们建立关系——的方式与非柏拉图主义者的被试——他们认为自己正在发明而不是发现——所用的方式没有什么不同,甚至与利奇内罗维奇(Lichnerovicz)的被试——当他们在创造的时候,他们感觉自己是在制作一件与艺术品类似的东西——所用的方法没有任何差别。现在,被试心中的这些结构都是他们以同样的顺序、同样的努力来尝试建构的,而与他们是否相信观念实体没有关系。如果有一天某个特别的被试宣称他"看见"并且详细描述了观念实体——他和他的同时代的人们都不理解,并且如果他的"所见之物"被及时地记录下来并以规范的形式保存下来,在 50 或者 100 年后,它们的完整含义将被阐明。但是,这不可能发生,当康托尔(G. Cantor)曾经认为存在连续统的势的直觉(intuition of power of continuum),但却没有得到论证,他将自己限制在他以前结构的假设性概括中,而没有提供真正的柏拉图主义直觉的可靠证据(见第四章 30 部分贝丝对康托尔直觉的论述)。

柏拉图主义的第三个困难来自第二个困难。数学论证中最好的论证是从最少的假定中得到最强的结论。公理系统整体中包括确定论证定理的必要和充分条件,假如我们增加了不必要的公理,那么我们就忽略了方法的重要性。这种态度在实验科学中更具有一般性,譬如著名的奥卡姆剃刀(Occam's Razor)原则,即,应该拒绝每一个无用的假设。所以,在认识论中没有理由不立即使用一种堪比演绎科学和实验科学中所使用的方法。接着我们必须确定,观念实体的存在假说对于数学结构性质的解释是否是必要条件,或者是否提到被试的动作就可以有充分的理由让我们避免对外部实体的依赖。

现在看来,柏拉图主义有两个优点,(a)它解释逻辑数理关系的目标鲁棒性(objective robustness),以及(b)它免去了制作一个创造性的结构。那么,我们必须确定(a)是否这个假设对于解释结构的鲁棒性是必要的,以及(b)我们是否可以在不需要建构观念的情况下完成建构,或者建构观念是否是一个事实,在这种情况下被试动作的假设将反过来会成为必要且充分的条件。

(a) 至于结构的鲁棒性,或者如布特鲁所说的它们的"固有的客观性",物理对象和被试的动作都不足以解释这种固有的客观性,而柏拉图主义在这种情况下是必要的。

就物理对象而言，原因显而易见，因为它所产生的客观性只是一种外在的客观性或者是一种演绎的性质。至于基于被试动作的解释，最根本的歧义在于混淆了个体被试的动作与所有被试共有动作和运算的一般协调，因此使得它们像外部事物一样是“鲁棒的”，而且它们具有“固有的客观性”，那是因为这些协作不依赖于个体被试的人为的命令。

对于这个问题，布特鲁所划分的三个阶段可以被运算心理学非常清楚地解释，这种解释以意识规律为基础，其后是一个向心过程而非离心过程，也就是说，它始于对运算的外部效果的意识——在了解它们本身之前，尤其是回到它们的内部结构之前。所以，希腊数学的“沉思”特点只是最初没有认识到运算的一种表现而已。因此，毕达哥拉斯将数字置于事物之中，恰如原始社会的人们将名称投射给客体一样，或者如欧几里得虽然没有认识到替代是一种几何运算，但是他仍然继续使用几何运算一样。“综合”阶段是开始意识到运算的历史时期[与认识论被试的我思(Cogito)意识有关]。至于“固有的客观性”这一历史阶段，它只能形成于其他两个阶段之后，因为只能在足够长的反省抽象系列的结尾处被试才可以发现运算的最本质的特点，才可以将具有自身整体规律的结构连接起来。这就是为什么我们非要等到伽罗瓦来发现群的概念，而之前韦埃特(Viète)或者笛卡尔仍然一直在他们的代数中无意识地使用这一概念。

总之，柏拉图主义可以解释逻辑数理实体和结构的目标鲁棒性，其最明显的优势是以同样的方式保证动作和运算的一般和内在概念。所以，观念实体是外部的这一假设不必要保证结构的独立性——鉴于个体被试的自由意志。

(b) 至于建构的观念①，目前我们只需认识到它与它的存在独立于其解释这一事实相对应(下一段我们将重回这一问题)，因为柏拉图主义的假设所提出的正是这一存在问题。在这个问题上，最卑微的例子具有最强的说服力，因为它们决不依赖于创造者的独创性，而是取决于集体建构的一般规律。所以，很显然，自然数序列并不预先包含负数、分数和虚数。我们只需要通过减法就可得到负数，通过除法就可得到分数，通过提取平方根就可以得到虚数。现在，在自然数序列中，加法是内含的，减法也是内含的，但却是逆运算等等。所以，我们可以二选一：要么是库蒂拉(Couturat)所说的，所有的数字预先就已经存在，“运算”在“本质上是拟人的”概念；要么是从自然数的建构开始，运算就是内含其中，并且运算是对反省抽象——它产生了其他类型的数——的结果的一般化概括。但是，无论拟人说如何看待运算，运算与关系的对应程度是最低的②，并且运算是在自然数阶段内在地产生的，关系仍然需要从中分离出来。所以，我们有两种选择：所有的数字都是赐予的，我们必须改组它们，或者，所有数字是通过抽象和概括而

---

①　也许想当然地认为我们在这里是在其发生或者一般意义上使用“建构”这一术语，意思是产生或者重新组成一个思想客体，并不是在其特殊的数学意义上使用它，其含义是具体描述一个客体，其存在由公理予以保证。见下页的注释。

②　所以，对于康托尔而言，2+3=5 只是 2、3 和 5 之间的一种关系而已。

来的，这种抽象和概括源于运算的核心，并且已经出现在最基本的动作协调中。显然，我们无法通过思考的方法来在二者中做出取舍。但是，在缺乏其他数据的情况下，我们只能维持更多的数学(more mathematico)，认为第一选项过于“强大”，第二个就足够了。在两种情况下，建构都是必要的，要么是从已经存在但尚未觉知的数字中分离出来，要么是实际去建构，并且假设存在第二种结构是一个充要条件，因为无须其他的补充假设，这一假设就可以让我们在最小起点得到所需的一切东西，而不是通过回溯方式为数字实体赋予一种外部的存在性——这是在我们重构它们之前所不知道的。① 简言之，柏拉图主义者意义上的观念实体的存在无疑是无可争议的，就像它的不可论证性一样。但是它是无用的，因为公理太强就在论证中失去作用，较弱的公理足够用就好。

62. 动作的一般协调律对于数学的解释

对数学进行解释必须满足以下条件，这些条件是充分的——不是条件自身充分，而是与其他解释的优势相比较而言。它们是：(Ⅰ)它必须解释数学在与物理学和心理学关系中的自洽性；(Ⅱ)它必须解释数学实体的鲁棒性，或者“固有的客观性”；(Ⅲ)在渐进的建构过程中(相对于任何事物都是预先确定的这一假设)，它必须解释如何通过严格的形式来说明结构。

Ⅰ. 就数学的自洽性而言，我们不打算回到在第十章已经讨论的纯数学可能性的心理学解释。我们只是回顾一下，如果逻辑数理运算是从动作格式中通过抽象而形成的(以及从一个格式中抽象而来，该图示包含了各个阶段的某些系统，如重叠和关系的系统、顺序的系统等等)，那么这一假设就意味着避免了任何的他治(就像我们求助于物

---

① 贝丝在他的佳作《数学基础》的“唯名论”这一章中讨论了建构问题，他是在数学意义上讨论这一术语的(对于客体说明的存在性由公理予以保证)，而不是如我们一样在发生学意义上(客体的产生)。他提醒我们，为了接受狭义的(公理的具体解释)结构限制，我们无法成功重组经典数学。如哥德尔已经表明的，我们需要额外的权宜之计来实现这一目标，没有它们的话，我们只能得到经典数学的一个子系统，恰如洛伦岑(Lorenzen)的数学。但是，这并不是我们在此讨论的问题，因为我们是在客体产生这一层面来使用“建构”这一术语的，无须讨论建构的数学概念——我们没有能力去做，我们的讨论只能限定在甚至一个经典的推理——与公理的字面解释相对应(所以，与受限制的数学意义上的建构相异)，可以通过认识论来进行解读，既可以作为对特定数学实体的理解，也可以作为在发生学意义上的建构。那么，它们的区别是：在柏拉图主义者的解释中，公理由我们对我们之外的实体的直接理解所构成(这是我们分离结果中的“强大”的一支)。在建构主义解释中(在发生学意义上)，公理本身是被建构的，所以它们是反省抽象——从运算协调开始——的结果，并且整个演绎都是建构的，无论是保留了它的经典成分还是服从于严格意义上的建构理念。事实上，这就是我们为什么坚持认为，即使是柏拉图主义者也需要建构(发生学意义)，因为我们不知道(或者至今仍不知道)哪里有一种特殊的官能可以让我们获得独立于我们的观念实体，并且，因为当我们认为我们理解它们的时候，这种理解通常是在心理工作之后发生的事情，而我们的心理(直到我们对它有更多的认识)似乎是建构性的(在发生学意义而非数学意义)。

理学或者心理学时的情形一样)以及任何的混乱(假如我们依赖于自由建构或者仅仅依赖于个体被试的内省经验就会出现的情况)。自治性概念意味着规律的出现,但却是固有规律的出现。在这一方面,引入动作的一般协调作为逻辑数理结构的开始形成了这一自治性的保障,其可靠性与依赖语言的句法和语义所能够得到的可靠性相比不分伯仲,但是动作的一般协调却是一个更深的起源——语言协调本身源自这里。

但是,它又是一个简单的起源问题(在语言结构的情况下),它本身有自己的历史(回溯到生物组织规律)以及需要一系列的抽象和建构性概括以便达到实际的逻辑数理结构——这一结构必然作用于被试的意识。所以,我们已经讨论的解释意味着提出了心理发展的一个因素;并且正是在这一点上我们必须搞清楚,对于自治性的保证是否依然充分,即使在这种特殊情况下,我们将这一发展过程约简为反省抽象,从感知运动结构到具体运算结构,再到假设演绎的逻辑数理运算。

我们已经发现(第九章 47 部分),心理发展受到四个方面的可能因素的影响:遗传(成熟)、经验、社会传递以及平衡的作用。通过反省抽象和重构,从主体动作的一般协调到意识运算,主体的心理发展并非完全受到内在因素的影响,成熟的作用尽管不可忽视,但是它的作用很弱,因为练习或者获得性经验以及社会传递能够在很大程度上加速结构的形成。但是,此时的经验不是(正如我们在第十章 52 部分Ⅱ中已经看到的)物理经验,而是以逻辑数理形式出现的经验。至于社会影响,只有主体结构能够同化它们的情况下,它们才起作用。所以,这一发展过程中,最主要的影响因素是平衡的作用,它源于这一事实,即协调逐渐地被主体的动作所控制,这样可以平衡外部的影响。日益增加的平衡作用会按照可逆性在主体的意识中转化,当认为它们是内化的动作时,平衡就转化为运算。所以,可逆性的发展可以通过主体逐渐尝试适应的成功可能性给予心理学的解释,正是通过这一途径,我们尝试解释运算结构的精致化以及守恒概念的精致化。[①] 所以,我们发现,在各种不同的情况下,从感知运动结构转化为运算结构主要取决于内部的过程,即,能够保证连续建构的自治性。

感知运动协调——假设认为,这些通过反省抽象从它们获得成分的结构以一般的感知运动协调为基础——产生类似的问题,尤其是考虑到它们的内部平衡的时候。但是,显然它们越是基础,越依赖于内在因素。所以,它们的发展问题从心理水平回溯到了生物领域。但是,在组织发展的每一个环节中(虽然有当代生物学的方法),无论环境发挥怎样的作用,毋庸置疑的是内在组织所发挥的作用是绝对重要的,它继续保证根本建构的充分自治性,建构在这里发生着动作的一般协调作用。

所以,我们发现,问题的讨论并没有止于先验论——在传统的知识预成论的意义上,建构主义——发生分析引导我们走向它——在某种意义上与先验论有关,因为每一种新的结构都从以前较低水平发生的更简单的结构中获取它的成分,如此等等,这种无

---

① 见"Logique et équilibre," Vol. Ⅱ of *Etudes épist. génét.*, Etude Ⅱ。

尽的回归不是因为系统出错，而是因为对生物形态发生的真正无知。事实上，如布拉奇特(Brachet)所说，生命本身首先是一个“形式的创造者”。我们必须补充一点，这种形态发生已经产生了数学的形式。也许有人针对这一点会提出反对意见，认为水晶有着石珊瑚一样的几何外形，数学可以轻松运用到物理对象中，而运用于生物则相对难一点，而且尽管我们对生物进行了数学方面的研究，但是它们并不是数学形式本身的过程——不过，值得注意的是，物理对象只是一个客体而非主体，而生物已经是主体，无论它们是多么的无意识，并且人类主体是从它们进化而来的，包括数学。那么，我们的假设是，所有生物都有共同的基本结构，由于智慧而产生的形式创造是对组织形态发生的延伸。如果此假设有坚实的基础——它存在的可能性至少与观念实体存在的可能性一样大——那么，它就是一个可以接受的起点，可以用来解释逻辑数理结构的自治性。这一假设还是一个比社会语言更一般的因素，而且它还从发生学观点准确地提出了相同的问题。

Ⅱ. 无须回到组织形态的发生，继续考察最一般的人类动作协调，我们现在认为人类的格式有一种内在的需求，会不可避免地将其结构规律作用于每一个个体被试。我们更多地注意到语言的逻辑，而没有意识到这种动作的逻辑，这一现象符合意识的实现规律：我们只对动作的外部结果感兴趣，而对其内在机制无动于衷，而语言则在讨论中被使用，所以我们不得不考虑在讨论必需范围内的一些语言规律。现在，很容易对各种关系进行符号化——各种动作之间的关系或者各种动作的成分之间的联系，正如麦卡洛克(McCulloch)使用命题逻辑符号∨，·，⊃，|，等来描述神经连接的各种类型一样。所以，我们甚至有可能发现真正的分析关系，例如，在需要它们达到目标之前，必须依赖那些方法。同样，我们可以观察到为了相同目标的方法的类，可以通过相同的方法来实现不同目标的类等等(不需要提及我们的动作所利用的所有类型的无数种关系)。简言之，我们可以用它们的不同复杂性的结构来描述类别、顺序等的完整格式。如果在某个特定发展水平来看，这种分析不是非常有趣，那是因为动作受到思维的定向，并且很难将动作的格式从定向的表征格式或者语言本身的格式分开。但是，相反，在研究获得语言之前的儿童时，沿着这一格式的发展却非常有趣，并且我们认识到，一方面我们没有动作，另一方面，像概念思维和口语思维一样，智慧在以后将定向它们，但是，智慧显示自己的唯一途径是动作本身(在它们的双重运动和知觉中)，而且“感知运动智慧”就是这些动作的协调。因此，事实上令人毫不惊奇的是这种协调包含一种精致的格式，只有它的一部分依赖于内在的机制，其余则是通过平衡的连续过程获得的。

因为从这一格式出发，自发思维的第一个逻辑数理运算通过反省抽象被精致化，所以，假如我们以这一动作一般协调的格式作为我们的基础——就像从语言的社会约定成分出发一样，这样，数学实体的鲁棒性问题或者固有客观性问题显然就有了一个至少可以接受的解决方案。正如我们在60部分所提到的，出于这一原因，我们避开了唯名论和约定主义的岔路口，在它们中间有一种存在于社会语言解释中的危险。但是，首先

我们得到了一个反思建构的起点，它要比口语形式更一般。例如，假如我们在实际动作的所有水平考察顺序关系的惊人的一般性，由于最低等动物种类的最基本的反射甚至也包括一种有序的发展，所以我们会立即发现，从这一出发点开始，通过连续的反省抽象对顺序结构的建构进行解释，要比语言出发点更具鲁棒性和一般性。假如在语言中存在一种毋庸置疑的顺序，那是因为人类的行为在各个阶段都在输入，并且因为语言又依赖于更加简单的生物组织。

Ⅲ. 所以，通过追溯逻辑数理结构的起点，如果我们毫无疑问在一个更好的位置来解释它们的鲁棒性和客观性特点，那么，正是出于这种原因，我们可以更准确地表述所有建构主义的问题：即，用这样一种方式来解释建构本身而无须担心其精确性受到威胁。为了解释从一个较早水平的结构转化为较迟水平的概括化，我们一直在提到反省抽象，事实上，反省抽象只解释了这些转化中的特定连续性，其意义是每一个新的结构需要一个预备的重构，然后以此为基础对重构的结构进行概括。但是，核心问题是结构的新颖性，如果没有新颖性，我们将陷入荒谬的结论之中，我们所要的完整数学竟然是一个包含在动作协调中预先形成的没有任何新意的结构，甚至是在较低级动物的动作协调中预先形成而没有任何重构或者概括的结构，就像是预成论家的胚胎学家们说他们在精子或者卵子中发现了小矮人，并且更加可笑的是有人认为，因为数学包含无穷大，所以数学将永远无法变成完备的。

现在，我们发现(第九章 50 部分)，适合于一个结构的创新——在当时它尚未受到影响——既不属于发现领域，因为没有有效的新颖性①，也不属于发明领域，因为新的结合不是自由的，但却在可能性的框架中——由产生反省抽象的结构所决定。那么，我们只能故步自封，认为任何结构——无论它是如何初级，只要这一结构具有逻辑数理性质(也就是说，这一结构要么是运算的或者前运算的，但它与任何客体或者个体被试的动作的联系却是自由的或者可以被释放为自由的，这一点与一般协调是截然不同的)——都包含可能发展的整个系统，后期结构的新颖性仅仅是将可能的发展变为现实吗？这是我们的假设，并且正如我们所发现的，它与柏拉图主义在各方面都一致，因为这一假设足够为这些可能性赋予柏拉图主义者的存在，或者甚至假定存在一种无限的或者至少是超级的智慧，这种智慧可以仅凭一个直觉就可以理解这些可能性。但是，出于发生学原因，我们反对一种从可能到真实实体的转换——这种转换是在不具备有效建构的条件下实现的。我们都有权相信一种超级智慧，它似乎可以让这种实现过程一蹴而就，但是这种超级智慧与我们常人智慧的区别正在于它控制这些增加的运算，无论这些运算是否压缩为一个瞬间的直觉动作。相信这些理想的柏拉图实体可能性的存在就是在知道这些运算或者这些可能性之前，将能够实现前者的运算预先作为前提条件。另一方面，只要那些已经被建构的实体与那些尚未被建构的可能性之间泾渭分明，就没

① 原文为"因为有有效的新颖性"，根据上下文进行了修改。——译者注

有什么理由阻止我们假定:(a)我们开始时结构向我们呈现的诸多可能性,只要一个结构将至少一个可能性变为现实,那么它就是新的结构;(b)不过,这个新结构在一定程度上足够精密,以至于我们在事后能够证明被现实化的可能性是确定的,只要这种可能性与产生它的真实结构之间是一致的。

在我们试图说明结构所提供的可能性是如何被实现之前,让我们进行进一步的观察(采自另一项调查)。① 物理学在有些情况下在计算中使用可能性这一概念,例如,在著名的虚拟速度原则中。但是,在这种情况下,可能性与理论家的心理仍然保持联系——他预测可能的转换(所以,当与系统关系相配的虚功的代数和为零时,物体被认为是平衡的),但不能影响客体本身(平衡状态的物体,它并没有经历这些虚拟的转换)。在心理领域则相反,发挥作用的结构是主体心理的一部分,现实(已经完成的结构)与可能性(它们的蕴涵或者未实现的可能性)具有更多的同质性,假设-演绎思维存在于对各种可能性——在被认识之前它们只存在于人们的假想中——的必然关系的确定中。所以在心理上存在一种可能性的因果关系,即,假设有这样一个结构,探索将按照可能性定向,而且是按照最大可能的方向前进。

所以一个结构在三个不同方向开放可能性。(1)它也许包含一系列内在的不会立即发现的结果,在这种情况下,系统的运算将足够隔离它们以及该系统所蕴涵运算的新的结合体(例如,命题逻辑的二元运算到三元运算等的转换,这会将 256 个三元运算引入作为的新结合,等等)。(2)它会通过改变结构的一个特性而产生转换(例如,交换性的抑制)。(3)最后,它可以被纳入一个较大的结构中作为一个个例,从这个扩展的结构中接受新的属性。

但是,最重要的是在这三种情况下新运算是必要的,它可以实现可能性。所以只要考虑到这些新运算,我们的可选立场就会清晰。它们是新的,即它们既不属于初始的结构,又没有被使用,并且直到当时为止它们被作为实体引入,但是尚未实现。但是,就它们的效度可以被证明而言,它们回溯性地进入结构——反省抽象在此运行——所开放的可能性系统中。事实上,这些可能性只能在事后通过它们自己的定义才可以为我们所知,否则的话,知道它们就意味着控制它们,其结果是操纵了它们的实现过程。但是,在事后要说明我们可以合乎逻辑地从结构的规律中导出这一结果,也就是要说明初始结构所开放的可能性是已经规定了的,尽管它已经通过反省抽象在反思水平被重构。而且,即使对这种特殊可能性的选择预先就确定了,这并不意味着我们在它实现之前就可以知道。它只能意味着(这一点并不重要)我们可以通过回溯的方式重组这一决定——这可以让我们认为它是一个预先决定的可能性,尽管在当时被讨论的可能性已经变成现实。

为了在动作的一般协调中寻找逻辑数理实体的发生学起源,我们所考察过的一切

---

① Inhelder and Piaget, *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, Paris, 1955.

均未表明后者预先包含在前者之中，但是却表明通过反省抽象从它们中获得的结构同时具有新颖和非人为的特点：新颖，是因为没有包含在它们之中；非人为性，是因为它们包含在一个可能性的预先决定的框架之中。至于如何定义这一框架，可以有两种途径，相当于是一个方法。为了超越结构，第一种途径以在更大的结构内解释它的必要性为基础，我们可以从这一结构中推断出之前的结构。第二个途径可以被直接约简为非矛盾性的必要性。但是，由于我们不能从这个系统内部或者较弱的系统中来论证它的非矛盾性，这就意味着需要建构越来越强的系统，所以就约简到第一个条件。这样，就如我们已经发现的（第十章 54 部分），这种持续超越已建构系统以确保它们的非矛盾性的形式要求与持续超越已经生效的结构以便填补它们空白的发生学倾向正在走向聚合，在心理学中这种情况被描述为平衡的倾向。如果是这样，似乎发生的观点和形式的观点都证明建构主义的合理性，而且，事实上，建构主义与柏拉图主义的唯一区别在于它不认为可能性领域仿佛是已经实现或者“现有的”。但是，建构主义保留了柏拉图主义的信仰，它认为通过“建构”这一所有学派共有的方法可以理解可能性领域。建构这一术语是在最广泛的意义上来使用的，以至于公理的建构也包括其中。

总结论

贝丝和皮亚杰

本书两部分的分析似乎让我们确信，首先，逻辑学作为论证推理的理论，在涉及心理学方面，它是完全自治的，反之亦然。今天，这两个领域的相互独立已经广为接受，这意味着我们必须在逻辑学和数学中拒绝任何形式的“心理主义”，而在心理学中必须拒绝“逻辑主义”，这样就保证了每个领域内研究的自治性。

但是，如果我们采取认识论的观点，情况就会非常不同，因为认识论领域主张将科学解释为人类心理活动的结果，或者，换言之，认识论领域主张解释人类的实际思维何以能够将科学打造成客观知识的和谐系统。

事实上，任何想要发展一种科学的而非沉思的认识论的努力显然都需要我们确立逻辑学与心理学之间的一种协作关系。这是因为认识论分析一方面产生了心理学，因为这种分析解决的是实际思维的某些形式，另一方面产生了逻辑学，因为它也是一个一致系统的科学的问题。简言之，如果我们将科学看作不仅仅是抽象的而且是具体的，是人类实际思维的产物，那么我们必须解释非同寻常的事实，即，在科学的演绎过程中——不仅仅发生在纯粹的演绎科学中，也发生在实验科学和规范科学中——思维机制的发展符合逻辑规律。这种符合性在“抽象”数学中尤其重要，并且考虑到演绎系统涉及的结构在被试的意识思维中所对应的是“无”，这一点更加让人惊奇。

更确切地说，我们在面对两种非凡的事实，我们必须用认识论予以解释。首先，实际思维的发展（如果环境有利的话）符合逻辑规律；然后，在后来的反思中，心理发现自己没有任何能够实现符合性的能力，甚至在一定程度上对是否接受逻辑规则作为“思维的规律”（当然，是在规范法则的意义上）这样的问题都无法做出判断。

如果我们选择从发展研究开始，那么最让人印象深刻的事实是，只有到心理发展的一个相对高级的阶段，逻辑思维本身以及对逻辑规律的认识才会出现。对这一现象的关注本身就足够表明发生学方法与因果解释方法的兴趣所在。如果一种解释仅仅指向静止的结构，并且认为这种结构是永久的，这种解释还引入人的“理性的本质”、“直觉”或者“自明性”等等，那么这种解释是令人失望的，因为这种解释意味着只是接受了衍生出的初级信息而已。它不能告诉我们任何可能的初级水平的性质，而这一初级水平性质的知识对于我们理解结构的形成是必不可少的。

另一方面，如果只是因为内省法仅被运用到心理发展已经达到很高水平的被试身上，那么发生学解释需要拒绝使用内省方法，或者至少是拒绝仅使用内省法而排除其他

方法的做法。所以，排他性地使用内省法的必要性终结于解释的需要，因为它为我们带来的是我们已经提到过的静止的或者非发生的构造主义。排他性地使用内省方法是不完整的，有时候甚至具有欺骗性，但是，当内省法与发生学方法，尤其与历史批判的方法相结合时，它仍然是有价值的，因为这种结合是对后者的自然延续。

强调这两点（历史方法的作用以及内省方法与历史方法及发生数据相结合的重要性）对于强调本书两部分内容的一致性也许是有用的。正如他们以前的作品所表明的，本书的作者从非常不同的观点出发发现，他们对本书的一般结论持有相同的看法。

首先，发生学方法显然与历史批判法是互补的，同时它又被历史批判法证实，这一过程可以带来修正和证实。

历史批判法与发生学方法的互补性源于两个原因：第一个原因是，发展从来不会有终结，它会贯穿整个历史，所以，与纯数学的发展阶段有关的历史数据与数学进化过程中基本形式相关的数据为理解彼此提供了契机。第二个原因是，发生数据可以部分地填补最遥远阶段的历史鸿沟。例如，亚里士多德将抛射体运动理论置于 ἀν τιπερισ τασ ις 概念之上，这一概念似乎是临时创造出来的；现在，我们在8－10岁的儿童那里反复发现了这种“环境反应”（尽管当代力学已经使得惰性概念很常见）格式，这一事实表明这一格式肯定曾经是希腊人常识的一部分，并且与其他情况一样，在这一点上，亚里士多德的物理学出现了向普通思维的回归，而非继续柏拉图力学的理想。

但是，另一方面，历史批判方法有可能有效地证明发生学假设。例如，转换群的概念在动作和运算协调的无意识逻辑中发挥重要作用，而无须产生足够的内省，这一事实似乎被伽罗瓦的发现所确认，并且被他遭遇的令人惊讶的最初的不解所确认（特别是就他的大学主考人而言）。另一方面而言，例如，几个感觉在数学概念发展中作用[参考达朗贝尔等（d'Alembert）]的发生学假设（严格而言，它们的沉思成分多于实验）无法通过发明过程的历史分析检验。

这将我们带回到内省问题，因为历史重构的重要来源之一是有重大发现的伟大发明家的证据，并且这类证据包括数量相当大的内省数据。现在，假如发生学方法引导我们不信任排他性地使用内省方法，那么我们将认为内省方法没有任何价值。心理学的目标不是纯粹的行为，如某个极端的学派让我们相信的一样，无视所有的意识，而是“表现”——它包括意识，后者源于功能性关系——决定意识觉知的条件。现在，如克拉帕雷德（Claparède）所说，有效的内省旁边住着有偏见的内省，这意味着在适应失败的时候意识发生，然后导向新的适应形式。因此，一旦无意识的哲学解释与实际的意识觉知所发挥的作用被分开后，最富想象力的思想家的内省通过“客观”方法所获得的数据，就具有了证明那些数据的性质，并且在许多方面以非常有用的方式来完善那些客观方法获得的数据。

所以，认识论最感兴趣的是，发生学研究的结果——通过“客观的”方法在不同水平的被试那里完成研究——似乎表明，逻辑思维、对逻辑规律的理解甚至推理的形式化都

是心理发展的自然结果，这一发展阶段的一定数量的中间阶段可以被隔离开来进行非常精确的描述。

假如这些结论能够在以后被证实，那么我们从它们中得出的最小结果是逻辑数理结构而不是主体以外的或者主体动作以外的。但是，由于处理这些结构的主体体验到他自己持续地被这些结构的"固有客观性"所限制，并且几乎总是有一种发现它们而非完全发明它们的印象，所以，从发生学数据以及创造性数学家的内省中我们发现，必须在认识论水平来彻底区分两种主体或者任何主体的两种不同的深度水平。一类是"心理学主体"，他们聚焦于意识自我，当然，意识自我的功能性作用是毋庸置疑的，但是，它却不是任何一般知识结构的起源；另一类是"认识论主体"，这类主体的认知结构源于动作协调的最一般机制。就这些事实授权我们去寻找逻辑数理结构与主体动作之间的联系而言，我们的研究必须沿着认识论主体的方向进行。

我们将以这种需要继续深入研究的观点来结束本书。一个逻辑学家和心理学家能够共同合作讨论细微复杂的数学基础的问题，并且在"国际发生认识论中心"，逻辑学家、数学家和心理学家的合作已经变成了五年期间持续活动的规则，这些对我而言成了那个时代的标志。如果想要认识论更具科学性，即，可以独立于思维的传统学派而开展交流，那么认识论就必须成为跨学科合作的结晶。逻辑学家和心理学家都无法单独阐明客观知识与主观知识之间的关系，我们也无法通过将无法协作的两种观点并置而推进问题的解决。另一方面而言，假如在一系列具体的严格定义的问题中，我们能够促成发生分析与形式化之间的和解，问题的一般轮廓将会更加清晰。

现在，认识论主体的假设——具有动作一般协调的逻辑特点——是一个足够大的框架，在其中提出一系列界定清晰的问题，这一框架将提供一系列不受限制的富有成效的合作机会。事实上，在尝试对动作协调逻辑进行仔细分析的过程中，发生分析将越来越接近神经协作的结构问题。麦卡洛克和皮茨(Pitts)曾在文章中提出了富有启发性的逻辑结构与神经结构同构的观点，这仅仅是这方面一个小的开始，但却可以引发重大的发展。① 另一方面，对神经结构的所有数学形式的表达——无论是对它们的逻辑的抽象还是我们按照可能性对它们测量——利用计算机作为模型，并且正在进行的研究大有前途，尤其是这些研究与结构发展的解释进行类比，研究所采用的形式是系列阶段达到的平衡过程。② 现在，针对这类机器的机制分析已经属于逻辑学和一般代数领域。所以，以后开展这类研究的想法并不是什么唐突的事情，我们可以在多方面进行尝试，以促进发生学研究——旨在研究实际的结构系统——与形式分析——旨在研究结构的抽象系统，这种系统与布尔巴基(Bourbaki)的系统类似，但却追根溯源到了有可能是逻

① 麦卡洛克和他的团队正在为发展问题积极工作。

② 见 S. Papert's communications at the "Centre d'Epistemologie génétique" on possible improvements in the model of the *perceptron*.

辑领域本身的最基本的结构——的密切合作。

但是,如果我们能够预见未来的这一合作,那是因为从现在开始,我们发现为什么尽管逻辑学家和心理学家是自治的,他们都在各自的行为中都不愿将对方卷入一个陌生领域,但是在必要的时候他们会主动提到这一合作。

逻辑学家的每一次对逻辑基础的探索——不想让人为的约定或者有条件的的事实成为逻辑学的基础——都必须从逻辑本身开始。但是,对句法本身的使用是不够的:将准确内容归功于概念——诸如,“真理”、“满意”、“名称”等——的需要又将我们带回到了语义水平。但是,将我们局限于已存的逻辑学,我们将面临两种相互矛盾的困难。一方面,逻辑学家所能够使用的工具在可能的产出方面似乎过于丰富,因为它产生了逻辑系统的多重性;另一方面,如果将这些系统拆开,每个系统又似乎过于单薄,不足以作为逻辑学的唯一基础(例如,塔斯基关于真理的定理)。那么,接下来在已存的逻辑学领域内,逻辑学家迟早会考察逻辑学被建构的方式,或者更准确地讲,他建构逻辑学的方式。所以,这就意味着逻辑学家的逻辑行为这一概念将在分析逻辑学的基础上发挥作用。例如,语义表单也会作为启发式表单发挥作用。在这一方面,这些表单变成了被试的启发式工具。在观察这些可能性的时候,逻辑学家使用了某种心理学,即使他没有使用心理学这个词汇,而且这一心理学的被试就是逻辑学家本人。

也许,他会发现收集关于逻辑学建构的信息是非常有趣的事情(当然,对于是否使用这些信息,他是唯一的决策者)。这就是逻辑学家在使用历史批判法时他所做的一切;这迟早会引导逻辑学家不仅对逻辑学家充当的被试感兴趣,而且对那些使用逻辑学的主体感兴趣,这时候逻辑学家就会尝试看看心理学家对这一问题有什么看法。但是,这些逻辑学家所收集的信息不会成为其他的什么类型,或者不存在一种持续的心理学主义的危险。除了其他一些情况之外,他不可能使用心理学概念和实验结果,也不可能去开展针对非逻辑学结构的建构问题的观察活动。逻辑学家这样做的结果是,他将冒解释过严(所以,不自觉地限制了它们的意义)或者过于一般的风险(将它们本不包含的东西归因于它们)。①

最后,很显然对于成人思维的心理学研究不能满足逻辑学家的要求,因为无论这种分析如何详尽,我们至多能说,主体的一切都要依据逻辑学规律;现在,标准不能依赖事实,除非我们预先将预设的逻辑结构投射到主体心中。

简言之,如果逻辑学家想要知道逻辑结构是如何建构起来的,他所能使用的心理学必须满足两个条件:(a)能够考虑到结构本身,(b)是发生学性质的。只有通过这一途径我们才可以超越对个别主体认知活动的描述,全面了解认识论主体的认知技能。

---

① 至于后一种情况,我们特别想到了巴士拉(S. Bachelard),她在一本书(*La conscience de rationalité*, Paris, P. U. F.)中表示,她相信可以从记忆分析中得出结论,在几个段落中她表现出对心理主义的系统的怀疑。

反过来，心理学家必然引入逻辑以及逻辑学内部固有的形式化，这不仅仅是因为逻辑带来的方便以及便于准确表达，或者说因为可以促进想象，而是因为逻辑学家的思维是人类思维中最具人为特点的思维形式，并且我们不可能为人类知识提供一个不包含逻辑学家行为本身的心理学解释。

事实上，对于心理学家来说，将某些逻辑规律的出现作为事实予以描述是不够的。一旦这些逻辑规律被确立，我们需要解释与这些规律相伴的必然性。现在，干脆将问题返回给逻辑学家，这只是意味着规律是必然的，因为它是逻辑规律，这样做还是没有说明任何东西。唯一的办法是说明某个规律源于某个被建构的整体，那么这个结构的完成过程与闭合过程会在这些成分服从于该系统的范畴内来解释这些成分的必要性。现在，这些结构正是逻辑学家想要为其发现"基础"的那些结构。但是，心理学家不仅仅从逻辑学家那里借用了这些结构，因为逻辑学家预先制造的这些概念多少有人为的性质，所以他们想要在自然思维中重新发现它们。

对于心理学家而言，结构是某种发展过程中最重要的终极产品，研究这一发展能够确保他把握实际知识的一般规律(其功能的和结构的)，那么作为结构的结构分析就可以解释它的一般特点与内在必然性，而自然思维已经内在地包含了这一点。

总之，逻辑学家和心理学家的行为反映了彼此，不是因为他们相互独立，而是因为在保持自治性的前提下，他们是互补的。所以，正是这种自治性和互补性使得对于认识论综合的探索不仅可能而且必要。

文献总汇

Abele, J. and Malvaux, P., *Vitesse et Univers relativiste*, Paris (Sedes).

Bergson, H., *Essai sur les données immédiates de la conscience*, Paris, 1889. [*Time and Free-will. An essay on the immediate data of consciousness.* Translation by F. L. Pogson, London, 1910.]

Berkeley, G., *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge* (1710).

Bernays, P., "Quelques points de vue concernant le problème de l'évidence," *Synthese* 7(1949).

—, "Mathematische Existenz und Widerspruchsfreiheit," in: *Études de philosophie en hommage à Ferdinand Gonseth*, Neuchâtel, 1950.

—, "Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung," *Revue int. de philos.* 8(1954).

—, *Axiomatic Set Theory* (with A. A. Fraenkel) (Studies in Logic), Amsterdam, 1958.

Beth, E. W., "Decision Problems of Logic and Mathematics," in: *Philosophie* XIII (Actualités scient. et industr. 1105), Paris, 1950.

—, *Les fondements logiques des mathématiques*, 2nd ed., Paris-Louvain, 1955.

—, *L'existence en mathématiques*, Paris-Louvain, 1956.

—, "Über Lockes *Allgemeines Dreieck*," *Kant-Studien* 48 (1956/57).

—, "Le savoir déductif dans la pensée cartésienne," in: *Descartes* (Cahiers de Royaumont Philosophie No. II), Paris, 1957.

—, *La crise de la raison et la logique*, Paris-Louvain, 1957.

—, "*Cogito ergo sum*-Raisonnement ou intuition?" *Dialectica* 12 (1958).

—, "On Machines Which Prove Theorems," *Simon Stevin* 32 (1958).

—, *The Foundations of Mathematics* (Studies in Logic), Amsterdam, 1959.

Bourbaki, N., *Éléments de mathématiques* (Actualités scient. et industr.), Paris, 1938.

—, "L'architecture des mathématiques," in: Le Lionnais, 1948.

Brouwre, L. E. J., *Over de grondslagen der wiskunde*, Amsterdam-Leipzig, 1907.

—, "Mathematik, Wissenschaft und Sprache," *Monats. f. Math. u. Phys.* 36 (1924).

Brunschvicg, L., *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, 1912.

Cantor, G., "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre," *Math. Annalen* 46 (1895); 49 (1897).

Couturat, L., *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, Paris, 1903.

—, *Les principes des mathématiques*, Paris, 1905.

Curry, H. B., *A Theory of Formal Deductibility*, Notre Dame, Ind. (reprinted), 1957.

D'Arcy-Thompson, *On Growth and Form*, Cambridge, 1942.

Denjoy, A., "L'innéité du transfini," in: Le Lionnais, 1948.

Descartes, R., *Œuvres philosophiques*. Edited by L. Aimé-Martin, Paris, 1842. [*The Philosophical Works of Descartes*, Vols. Ⅰ and Ⅱ. Translation by Elizabeth S. Haldane and G. R. T. Ross, Cambridge, 1911.]

Enriques, F., *Les problèmes de la science et de la logique*. Transl. by J. Dubois, Paris, 1909.

—, *Les concepts fondamentaux de la science*. Transl. by Rougier, Paris, 1914.

Farber, M., *The Foundation of Phenomenology*, Cambridge, Mass., 1943.

Fehr, H., *Enquête de l'Enseignement Mathématique sur la méthode de travail des mathématiciens*. With the collaboration of Th. Flournoy and Ed. Claparède, Paris-Genève, 1908.

Fitch, F. B., "Symbolic Logic-Algebra of Ideas," *Yale Alumni Magazine* 19 (1956).

Frazer, J. G., *The Golden Bough*, London, 1900.

Frege, G., *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884. [*The Foundations of Arithmetic: a logico-mathematical enquiry into the concept of number*. Translation by J. L. Austin, Oxford, 1950.]

Freudenthal, H., "Zur Geschichte der vollständigen Induktion," *Archives d'Hist. des Sc.* 22(1953).

—, "Le développement de la notion d'espace depuis Kant," *Sciences* 1 (1958).

Gentzen, G., "Untersuchungen über das logische Schliessen," *Mathem. Zeitschr.* 39 (1934) 176-210, 405-431.

—, *Recherches sur la déduction logique*. Transl. and comm. by R. Feys and J.

Ladrière, Paris, 1955.

George, F. H., "Meaning and Behaviour," *Synthese* 11 (1959).

Goblot, E., *Traité de logique*, Paris, 1918.

—, *Le système des sciences*, Paris, 1922.

Gödel, K., "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I," *Monatschr. f. Mathem. und Physik* 38 (1931) 173-198.

—, "Russell's Mathematical Logic," in: Schilpp, 1944.

Gonseth, F., *Les mathématiques et lă réalité*, Paris, 1932.

Gréco, P., "Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant," in: *Problèmes de la construction du nombre* (Et. Epist. Génét, vol. Ⅺ), Paris, 1960.

—, "Quantité et quotité, nouvelles recherches sur la correspondance terme à terme et sur la conservation des ensembles," in: *Structures numériques élémentaires* (Et. Epist. Génét, vol. XIII), Paris, 1961.

—, "Le progrès des inférences fondées sur l'itération numérique chez l'enfant et l'adolescent," in: *Les inférences arithmétiques élémentaires* (Et. Epist. Génét., vol. XVII). Paris, 1963.

Gréco, P. and Piaget, J., *Apprentissage et connaissance* (Et. Epist. Génét., vol. Ⅶ), Paris, 1959.

Grize, J. B., "Portée et limites de la formalisation," *Studia Philosophica* 18 (Bâle 1958) 103-113.

—, "Du groupement au nombre: essai de formalisation," in: *Problèmes de la construction du nombre* (Et. Epist. Génét., vol. Ⅺ), Paris, 1960.

—, *Remarques sur la limitation des formalismes* (Et. Epist. Génét., vol. XVI), Paris, 1966.

Groot, J. de, *Tijd onder mathematisch aspect*, Amsterdam, 1952.

Grünbaum, A., "Whitehead's Method of Extensive Abstraction," *British Journal of the Philosophy of Science* 4 (1953).

Hadamard, J., *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton, N. J., 1945.

Heath, T. L., *The Works of Archimedes*, Cambridge, 1897, 1912.

Helmholtz, H. von, "Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet," in: *Wissen-schaftliche Abhandl. von H. von Helmholtz*, Ⅲ, Leipzig, 1895, pp. 356-391.

—, *Schriften zur Erkenntnistheorie*, edited and comm. by P. Hertz and M.

Schlick, Berlin, 1923.

Hermann, I. , "Wie die Evidenz wissenschaftlicher Thesen entsteht," *Imago* 9 (1923).

—, *Psychoanalyse und Logik*, Leipzig-Wien-Zürich.

—, "Denkpsychologische Betrachtungen im Gebiete der mathematischen Mengenlehre," *Schweiz. Zs. f. Psychol.* 8 (1949).

Hermite, C. , cited after Lallemand, 1934.

Heymans, G. , *Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens*, 4th ed. , Leipzig, 1923.

Heyting, A. , *Les fondements des mathématiques-Intuitionisme-Théorie de la démonstration*, Paris, 1955.

—, *Intuitionism: an Introduction*, Amsterdam, 1956.

Hilbert, D. , *Grundlagen der Geometrie*, 6th ed. , Leipzig-Berlin, 1923.

—, "Die Grundlagen der Mathematik," *Abh. Math. Sem. Hamburg* 6 (1928).

—, "La connaissance de la nature et la logique," *L'enseign. math.* 30 (1931).

Hilbert, D. and Bernays, P. , *Grundlagen der Mathematik*, 2 vols. , Berlin, 1934 and 1939.

Hume, D. , *A Treatise of Human Nature* (1739-1740).

Husserl, E. G. , *Philosophie der Arithmetik*, Ⅰ, Halle/Saale, 1891.

—, "Bericht über deutsche Schriften zur Logik i. d. Jahren, 1895-1898," *Arch. f. syst. Philos.* 9(1903); 10(1904).

—, *Logische Untersuchungen*, Ⅱ, Part I, 2nd ed. , Halle/Saale, 1913.

—, *Recherches logiques*, Ⅱ, Part Ⅰ (Rech. Ⅰ and Ⅱ). Transl. by Hubert Elie, Paris, 1961.

Illeman, W. , *Husserls vor-phänomenologische Philosophie*, Leipzig, 1932.

Inhelder, B. and Piaget, J. , *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, *essai sur la construction des structures opératoires formelles*, Paris, 1955. [*The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*. Translation by Anne Parsons and Stanley Milgram, London, 1958.]

—, *La Genèse des structures logiques élémentaires; classifications et sériations*, Neuchâtel-Paris, 1959. [*The Early Growth of Logic in the Child. Classification and Seriation*. Translation by E. A. Lunzer and D. Papert, London, 1964.]

Jaensch, E. R. and Althoff, F. , *Mathematisches Denken und Seelenform*, Leipzig, 1939.

Jevons, W. Stanley, *Pure Logic and Other Minor Works*, London, 1890.

Kalmar, L., "On Unsolvable Mathematical Problems," *Proceedings Xth Int. Congress of Philos.*, Amsterdam, 1949.

Kant, I., *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral* (1764).

—, *Kritik der reinen Vernunft*, 1st ed. (1781, *A*), 2nd ed. (1789, *B*). [*Immanuel Kant's Critique of Pure Reason*. Translation by Norman Kemp Smith, London, 1933.]

Kantor, J. R., *Psychology and Logic*, New York, 1950.

Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam-Groningen, 1952.

Klein, F., "On the mathematical character of space-intuition," in: *Gesammelte Abhandlungen*, Ⅱ.

Lallemand, M., *Le transfini*, Paris, 1934.

Lange, F. A., *Logische Studien*, Iserlohm, 1877.

Leibniz, G. W., *Nouveaux essais sur l'entendement humain* (1715). [*New Essays Concerning Human Understanding*. Translation by A. G. Langley, New York, 1896.]

—, *Opuscules*, cf. Couturat, 1903.

Le Lionnais, F., *Les grands courants de la pensée mathématique*, Paris, 1948.

Locke, J., *An Essay Concerning Human Understanding* (1690).

Mach, E., "Über das Prinzip der Vergleichung in der Physik," in: *Populär-Wissen-schaftliche Vorlesungen*, 2nd ed., Leipzig, 1897.

Mach, E., *Erkenntnis und Irrtum*, 2nd ed., Leipzig, 1906.

Mannoury, G., *Les fondements psycho-linguistiques des mathématiques*, Bussum-Neuchâtel, 1947.

Marbe, K., *Experimentell-psychologische Untersuchungen über das Urteil*, Leipzig, 1901.

McCulloch, W. S., et al., art. in *Bull. Math. Biophys.*, especially 5, 115, 135; 7, 89.

—, *The brain as a computing machine*, New-York, 1949.

Meyerson, E., *Du cheminement de la pensée*, 3 vols., Paris, 1931.

Mill, J. Stuart, *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive*, London, 1843. [French transl. by Peisse, Paris 1880.]

Morf, A., Smedslund, J., Vinh-Bang & Wohlwill, J. F., *L'apprentissage des structures logiques* (Et. Epist. Génét., vol. Ⅸ), Paris, 1959.

Mostowski, A., "Sur l'interprétation géométrique et topologique des notions

logiques," *Proceedings Xth Int. Congress of Philos.*, Amsterdam, 1949.

Papert, S., "Sur le réductionnisme logique," in: *Problèmes de la construction du nombre* (Etudes d'Epist. Génét., vol. XI), Paris, 1960.

Pascal, B., *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader* (1658).

Pasch, M., *Mathematik und Logik*, Leipzig, 1926.

Piaget, J., *La construction du réel chez l'enfant*, Neuchâtel-Paris, 1937. [*The Child's Construction of Reality*. Translation by Margaret Cook, London, 1955.]

—, *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, Paris, 1946.

—, *Le développement de la notion de temps chez l'enfant*, Paris, 1946.

—, *Traité de logique. Essai de logistique opératoire*, Paris, 1949.

—, *Introduction à l'épistémologie génétiquet*, I: *La pensée mathémathématique*, Paris, 1950.

—, *Essai sur les transformations des opérations logiques. Les 256 opérations ternaires de la logique bivalente des propositions*, Paris, 1952.

—, *Logic and Psychology*. Translation by W. Mays and F. Whitehead. With an Introduction by W. Mays, Manchester, 1953.

—, "Logique et équilibre dans les comportements du sujet," in: *Logique et équilibre* (Etudes d'Epist. Génét., vol. II), Paris, 1957, pp. 27-117.

—, *Les mécanismes perceptifs. Modèles probabilistes, évolution génetique, relations avec l'intelligence*, Paris, 1961.

Piaget, J. and Inhelder, B., *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris, 1947. [*The Child's Conception of Space*. Translation F. J. Langdon and J. L. Lunzer, London, 1956.]

Piaget, J., Inhelder, B. and Szeminska, A., *La géométrie spontanée de l'enfant*, Paris, 1948. [*The Child's Conception of Geometry*. Translation by E. A. Lunzer, London, 1960.]

Piaget, J. and Szeminska, A., *La genèse du nombre chez l'enfant*, Neuchâtel-Paris, 1941. [*The Child's Conception of Number*. Translation by C. Gattegno and F. M. Hodgson, London, 1952.]

Pieri, M., "La geometria elementare istituita sulle nozione di *punto* e *sfera*," *Memorie di Mat. e di Fisica della Soc. delle Sc.*, (3) 15 (1908).

Poincaré, H., *La valeur de la science*, Paris, 1905.

—, *Science et méthode*, Paris, 1909. [*Science and Method*. Translation by F. Maitland, London, 1914.]

—, *Dernières pensées*, Paris, 1913.

Polya, G., *Mathematics and Plausible Reasoning*, 2 vols., Princeton, N. J., 1954.

—, *How to solve It*, 2nd ed., New York, 1957.

Popper, K. R., *The Open Society and Its Enemies*, 2 vols., London, 1945.

Pradines, M., *Traité de psychologie générale*, 3rd ed., 3 vols., Paris, 1948.

Quine, W. V., *Mathematical Logic*, revised ed., Cambridge, Mass., 1951.

Rougier, L., *Traité de la connaissance*, Paris, 1955.

Rosser, J. Barkley, *Logic for Mathematicians*, New York, 1953.

Schilpp, P. A., *The Philosophy of Bertrand Russell*, Evanston-Chicago, 1944.

Selz, O., *Über die Gesetze des geordneten Denkverlaufs*, 2 vols., Stuttgart, 1913; Bonn, 1922.

—, *Die Gesetze der produktiven und reproduktiven Geistestätigkeit*, Bonn, 1924.

Stoerring, G., *Einführung in die Erkenntnistheorie*, Leipzig, 1909.

—, *Logik*, Leipzig, 1916.

Tarski, A., *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford, 1956.

Voigt, A. H., "Phänomenologische und atomistische Betrachtungsweise," in: *Die Kultur der Gegenwart*, 3rd Part, 3rd Sec., 1st vol.: *Physik*, Leipzig-Berlin, 1915.

Vuillemin, J., *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Paris, 1960.

Weber, W. and Wellstein, J., *Enzyklopädie der Elementar-Mathematik*, Ⅱ, Leipzig, 1915.

Whitehead, A. N., *The Concept of Nature*, Cambridge, 1920.

Ziehen, Th., *Lehrbuch der Logik auf positivistischer Grundlage*, Bonn, 1920.

原版人名索引

A

Abelé, J. 210 阿伯莱

Affolter, F. 287 艾弗特

d'Alembert, J. 307 达朗贝尔

Alexandrof 252 亚历山德罗夫

Althoff, F. 87 奥尔索夫

Apollonius 39 阿波罗尼奥斯

Archimedes 96f, 137 阿基米德

Aristotle 26, 36-39, 41f, 46-48, 72, 94, 124, 137f, 189, 194, 227f, 307 亚里士多德

Arnauld, A. , 39 阿诺德

Ayer, J. 145 艾耶尔

B

Bachelard, S. 311 巴士拉

Baire, R. 46 贝利

Baldwin, J. M. 278 鲍德温

Bergson H. 35, 105-107, 131 209f 柏格森

Berkeley, G. 7f, 12 贝克莱

Bernays, P. XII, 45, 48, 124f, 146, 191, 194, 277 伯奈斯

Binet, A. 139f, 198, 200 比奈

Bolzano, B. 41f, 99 博尔扎诺

Boole, G. 138 布尔

Borel, E. 46 波莱尔

Bouligand, G. 223 布利根德

Bourbaki, N. 45, 163-165, 167f, 176, 179, 186f, 310 布尔巴基

Boutroux, P. 290f, 293 布特鲁

Brachet, 298 布拉奇特

Bretand, F. 31 布里坦
Brouwer, L. E. J. 4, 18, 20-22, 46f, 52f, 105-107, 110, 118, 146, 195, 212f, 220, 259 布劳威尔
Bruno, G. 97 布鲁诺
Brunschvicg, L. 18f, 223, 281 布伦茨威格
Bühler, K. 139 彪勒
Burali-Forti, C. 44 布拉里-福蒂

C

Cantor, G. XI, 44-46, 51, 97-99, 111-113, 151, 190, 205-207, 223, 242, 257, 292 康托尔
Carnap, R. 4, 67, 69, 286 卡尔纳普
Cavaillès, J. 22 卡瓦耶斯
Cavalieri, B. 97 卡瓦列里
Claparède, E. 87, 189, 198, 200, 308 克拉帕雷德
Comte, A. 143 孔德
Couturat, L. 13, 95, 294 库蒂拉
Curry, H. B. 59, 67, 277 库里

D

D'Arcy-Thompson 203 达西-汤普森
Dedekind, R. 96 戴德金
Denjoy, A. 206, 220, 291 当茹瓦
Descartes, R. X, XII, 6-9, 12, 14-16, 19, 25, 27, 38f, 46, 93-95, 124f, 228, 294 笛卡尔
Dieudonné, J. 168, 188 迪厄多内
Diocles 228 迪奥克莱斯
Dirichlet-Lejeune, G. 166 狄里克雷-勒热纳
Duhem, P. 32f 杜海姆
Dürkheim, E. 286 涂尔干

E

Einstein, A. 284 爱因斯坦
Enriques, F. 33f, 46, 48, 281 恩里克斯
Erdmann, B. 48, 142 埃德曼
Eubulides 138 欧布里德
Euclid 6, 15, 28, 105, 137, 160f, 196, 228, 247, 293 欧几里得

Eudoxus of Cnidus 96 尤得塞斯

F

Farber, M. 31 法伯
Fehr, H. 87 费尔
Feys, R. 4 费斯
Fitch, F. B. 132 菲奇
Flournoy, Th. 87 弗卢努瓦
Fraenkel, A. 4 弗伦克尔
Fraisse, P. 210 弗雷斯
Frank, P. 287 弗兰克
Frazer, J. G. 155 弗雷泽
Frechet 226 弗雷谢
Frege, G. XIf, 40-46, 51, 67, 98, 111, 151, 160, 248, 259 弗雷格
Freud, S. 199 弗洛伊德
Freudenthal, H. 222f 弗罗伊登塔尔

G

Galios, E. 164, 190, 294, 307 伽罗瓦
Gauss, C. F. 166 高斯
Gentzen, G. 59-61, 63, 66, 80, 142, 273 根岑
Goblot, E. 18-21 戈布洛
Gödel, K. XI, 54f, 57-59, 67-70, 95, 112, 120, 122, 272, 275, 295 哥德尔
Gonseth, F. 209, 238, 253f, 281 贡塞斯
Gréco, P. 168, 231f, 260, 263, 287 格雷科
Grize, J. B. 5, 172, 175, 240, 257, 267-272, 277 格里兹
Groot, J. de 105, 107 德·格鲁特
Grünenbaum, A. 97 格伦鲍姆
Guillaume, C. E. 197 纪尧姆

H

Hadamard, J. 46, 87, 89, 91, 199 阿达玛
Haldane, E. S. 6f, 16 霍尔登
Heiberg 97 海伯格
Helmholtz, H. von 90, 101-103, 206, 212 冯·赫尔姆霍兹
Herbert, J. F. 223 赫伯特

Herbrand, J. 60, 66 海尔勃朗
Hermite, Ch. 87, 98f, 111, 205 埃尔米特
Heymans, G. 26, 29f, 33, 41f 海曼斯
Heyting, A. 4, 21 赫廷
Hilbert, D. 22, 46, 52, 54, 59, 69f, 105, 108, 110, 160,248,277,283 希尔伯特
Hippias, 228 希庇亚斯
Hopf, H. 252 霍普夫
Hull, C. L. 132 赫尔
Hume, D. 8-10 休谟
Husserl, E. 30-33, 41f, 230 胡塞尔

I

Inhelder, B. 171, 180, 185, 239f, 261f, 301 英海尔德

J

Jaensch, E. R. 87 詹斯奇
James, W. 209 詹姆斯
Jevons, W. S. 25f 杰文斯

K

Kalmar, L. 122 卡尔玛
Kant, I. X, XII, 8, 11-17, 19, 21, 27, 30, 38f, 46f, 77, l0lf, 105f, 124, 212, 220, 223, 228 康德
Kelsen, H. 135 凯尔森
Kemeny, J. G. 59 凯梅尼
Kleene, S. C. 150 克里尼
Klein, F. 101, 103, 164, 183 克莱因
Koehler, O. 253, 287 凯勒
Kohler, I. 214 苛勒
Köhler, W. 215, 287 苛勒
Kohts, N. 287 科茨
Kronecker, L. 161, 207 克罗内克
Külpe, O. 139 屈尔佩
Kuratowski, C. 252 库拉托斯基

L

Lalande, A. 195 拉朗德

Lallemand, M. 111 拉勒曼德
Lange, F. A. 18 兰格
Langford 128 朗格弗德
Lautman, A. 22, 166 劳特曼
Lebesgue, H. 46, 228 勒贝格
Leibniz, G. W. Xf, 39-42, 95, 248, 272 莱布尼茨
Leray, P. 200f 勒雷
Leverrier, U. S. S. 204 勒韦里耶
Lévy-Bruhl, L. 286 列维-布留尔
Lewis, 128 刘易斯
Lionnais, F. le, 164, 220 勒利奥内
Lobačevsky, N. I. 17 罗巴切夫斯基
Locke, J. 7-9, 12, 30 洛克
Lorentz, E. 211 洛仑兹
Lorenzen, P. 59, 67, 295 洛伦岑

M

Mach, E. 26f, 31-33 马赫
Malvaux, P. 211 马尔沃
Mannoury, G. 3, 33-35, 46, 48 曼诺利
Marbe, K. 139-142 马尔比
Maurolico, F. 38 马洛里克
McCulloch, W. S. 198, 208, 299, 309 麦卡洛克
Meyerson, E. 195, 227 梅耶森
Michelson, A. A. 194 迈克逊
Mill, J. S. 24-27, 33, 48 密尔
Morf, A. 262, 287 莫夫
Morley, E. W. 194 莫利
Morris, Ch. 286 莫里斯
Mostowski, A. 85 莫斯托夫斯基

N

Neumann, J. von 259, 272 诺伊曼
Newell, A. 128 纽维尔
Nicod, J. 101, 104, 250 尼克德
Nicomedes 228 尼科梅德斯

O

Oléron, P. 287 奥莱龙

Ostwald, W. 32f 奥斯特瓦尔德

P

Papert, S. 252, 272, 309 巴贝尔

Pascal, B. 37-39, 276 帕斯卡

Pasch, M. 103, 105, 134, 159f, 226, 247f 帕斯

Peano, G. 175, 252f, 259 皮亚诺

Pieri, M. 104 皮耶里

Pitts, 309 皮茨

Plato, 26, 37, 42, 72, 94, 98 柏拉图

Poincaré, H. 18, 20, 46, 86-92, 99, 103, 146f, 156, 199f, 204f, 213, 215, 219, 259, 265, 287 庞加莱

Polya, G. 87, 92 波利亚

Popper, K. R. 125 波普尔

Proclus, 39 普罗克鲁斯

Pythagoras, 228, 293 毕达哥拉斯

Q

Quine, W. V. 45, 252, 259, 271 奎因

R

Reymond, A. 131 阿诺德·雷蒙

Riemann, B. 223 黎曼

Ross, G. R. T. 6f, 16 罗斯

Rosser, J. B. 45, 59 罗瑟

Rougier, L. 287, 290 鲁吉耶

Rousseau, J. J. 226 卢梭

Russell, B. XII, 41f, 44f, 53, 59, 146, 248, 250, 252, 259, 264, 270-272, 290 罗素

S

Saussure, F. de 278 索绪尔

Scholz, H. 4 谢尔兹

Schröder, E. 31 施罗德

Selz, O. 3, 139, 141 塞尔兹

Shaw 128 肖
Sigwart, Ch. 142 西格瓦特
Simon, H. A. 128 西蒙
Smedslund, J. 192 斯梅斯隆
Smith, N. K. 12-14 史密斯
Störring, G. 26, 29 斯特林
Suppes, P. 177 苏佩斯
Szeminska, A. 185, 214, 239 斯泽明斯卡

T

Tarski, A. 4, 69-71, 101, 104f, 256, 286, 310 塔斯基
Thalès, 12, 39 泰勒斯

V

Viète 294 韦埃特
Vincent, M. 287 文森特
Voigt, A. 31-33 福伊特
Vredenduin, P. G. J. 3 弗雷登杜因
Vuillemin, J. 228 威勒姆

W

Weierstrass, K. 31, 217 维尔斯特拉斯
Wellstein, J. 103 威尔斯汀
Wertheimer, M. 142 韦特海默
Whitehead, A. N. 101, 104, 248, 250, 252, 259, 264, 270 怀特海
Wilder, R. L. XII 维尔德
Winter, M. 223 温特
Wohlwill, J. F. 287 沃尔威尔
Wundt, W. 35, 142 冯特

Z

Zeno, 96, 105 芝诺
Zermelo, E. 44f, 59 策梅洛
Ziehen, Th. 26-28, 33 齐亨
Zilsel, E. 143 济塞

原版主题索引[①]

A

Abstraction 抽象，—according to Aristotle 根据亚里士多德，37-38，148；simplifying—简化抽象，148；empirical (or "simple")—经验（或者"简单"）抽象，188-189，196；mathematical—数学抽象，188；reflective—反省抽象，188-189，196，203-208，222，232-233，235，237-239，240-241，242，249，275，282，299-300；constructive—建构抽象，237；of qualities (origin of number)，性质的抽象（数字的起源）180；(inverse of logical multiplication)—（逻辑乘法的逆）抽象，178

absurd 荒谬的，reduction to the—约简为荒谬的，(17)，63

action 动作，—and operation 动作和运算，221-222，238-239；abstraction starting from—始于动作的抽象，see reflective *abstraction* 见反省抽象；coordination of—s 动作的协调，see *coordination* 见协调

addition 增加，—of relations 关系的增加，177

algebra，(Kant) 代数，(康德)，(13)；Boolean—布尔代数，181；algebraic structures 代数结构，165

analysis，(Kant) 分析，(康德)，(12)；—of the Ancients 对古人的分析，(94)

analytic (method) 分析的（方法），(14)；—(judgments) 分析判断，12-14

antecedent 前件，前提，62-66

any 任何一个，—object in mathematics 数学中的任何客体，7，9；—number 任一数字，54

apriorism 先验论，147-148，190，207-208，282-283；see also，*preformation*，*innate*，*Platonism*，另见，预成论，固有的，柏拉图主义

arithmetic 算术，(Kant)（康德），(13)，105-106

arithmetisation 算术化，54-58，119-123

assimilation 同化，reciprocal—s 相互同化，229；see also *intelligence* 另见智能

associativity 结合律，—of a grouping 的结合性，173-174

① 法语版的主题索引由格里兹(J. B. Grize)和格雷科(P. Greco)编辑。梅斯(W. Mays)将之译为英文版。重要内容用斜体字表示了出来。二手文献置于括号中。脚注中出现的文献用字母 *n* 进行了标注。

axiomatic 公理的,247-256;—theory of structures 结构的公理理论,164,186-187
axiomatisation 公理化,—of grouping 群集的公理化,172-175;see also *formalization* 另见形式化
axioms 公理,(30),39-40,277-278,279;(Kant)(康德),14;—of comprehension 内涵公理,42-44,44-46;Euclidean and non—Euclidean—欧几里得和非欧几里得公理,17-18;—of geometry 几何公理,26,77,102-105

B

Behaviour 行为,see *conduct* 见行为

C

Calculation 计算,53,55
calculus 微积分,(14),52;infinitesimal—微积分学,96-98
Cantorism 康托尔主义,(4),44-46,59,110
causality 因果关系,—and implication 因果与蕴涵,136
circle 圆,—of knowledge 知识之圆,277
classes 种类,theory of—类别理论,42-44;groupings of—类别的群集,170,174-175;—and numbers 类别与数字,259-272;see also *classification* 另见种类
classification 种类,170,221-222,260-261
closing 闭合,—of structures 结构的闭合,192-193
closure 终止,63,76-80
code 代码,114-115,118-119,121
combination 结合,—of concepts 概念的结合,13;—of structures(Bourbaki) 结构的结合(布尔巴基),164,165,180
combination(*composition*) 结合(组成),restricted—of a grouping 组的限制性结合,172-173;—of relations 关系的结合,177,178;laws of—结合律,187;non-additive—(perception) 非累加结合(知觉的),215
combinatorial system 组合系统,174,181,182n
commutativity 交换性,231
Concept 概念,(universal idea)(Kant)(普遍观念)(康德),11,13;conscious—and structures 意识概念与结构,167
condition 条件,(Bourbaki)(布尔巴基),187-188;elementary axiomatic—s 基本的公理条件,251-253
conduct (behaviour) 行为(行为),155
consciousness 意识,facts of—意识事实,154-155;and behavioural structures 行为结构,166-167;—and unconscious discovery 意识与无意识发现,see *unconscious* 见无意识;

conscious realization (or awareness) 意识实现(或者觉知),189-190,201,229,308
consequent 结果,62-66
conservation 守恒,192-193,197,239;see also *invariants* 另见不变性
constancies 恒常性,perceptual—知觉恒常性,215
construction 建构,21,165,294;intuition and—(Kant) 直觉与建构(康德),11,12-17;—and invention 建构与发明,see *invention* 见发明;—and abstraction 建构与抽象,189;see also *reconstruction*,*constructivism* 另见重构,建构主义
constructive 建构的,—reasoning 建构推理,(Kant and Descartes)(康德和笛卡尔),15-16
constructivism 建构主义,47-48,238;genetic—发生建构主义,274,285
content 内容,—of an argument 辩论内容,72
continuum 连续统,theory of the—连续介质理论,107;structures of the—连续统的结构,165,168,184;perceptual—知觉连续体,215
contradiction 矛盾,principle of—矛盾原则,24-26
conventionalism 约定主义,230,287,290, see also *linguistic* 另见语言学的
co-ordinates 协作,natural—自然协作,185
co-ordination 协作,—of actions and operations 动作与运算的协作,167,234-235,288,296-303;—of logic and psychology 逻辑与心理学的协作,see *logic and psychology* 见逻辑与心理学
correlativity 相关性,182
correspondence 对应, bi-univocal — 双向一一对应, 167, 171, 174, 206, 260, 263;co-univocal—共同一一对应,174
counter—example 反例,(10),72-80,(81)84

D

Decision 决定,95-96,115-118,119,120-123,123-124
deduction 演绎,推论,natural—自然演绎,59-68;straight forward—直接推理,60-66;initial—初始推理,61-66;subordinate—次级推理,61-65;—of a formula 公式的演绎,116-118;—and experience 推理与经验,137,281-285;see also *deductive tableau*,*schema(of—)* 另见推理表,推理(格式)
definitions 定义,mathematical and philosophical—数学和哲学定义,13-14;nominal—名义定义,38;implicit — 内隐定义,68;axioms and — 公理和定义,279;see also *axioms*,*postulates* 另见公理,公设
delineation,(Kant) 概图,(康德),13
demonstrable 可证明的,—in T,在 T 中可证明的,55-58
demonstration 证明,—and calculation 证明与计算,53;—and experience 证明与经验,

228-229；see also，*deduction*，*experience*，*empiricism* 另见推理，经验，经验主义
Denkpsychologie 符兹堡学派思维心理学，139-143
determination 限定，—s of particular objects 特殊个体的限定，12
development 发展，direction of — 发展方向，195，197，229；see also — of concepts of *number*，*time*，*space* 另见数字、时间、空间的概念
dialectic 辩证的，(10)，136；dialectical synthesis 辩证综合，see *synthesis* 见综合：see also reflective *abstraction* 另见反省抽象
differentiation 分化，—of structures 结构的分化，164，165
direction 方向，— of development（directed evolution）发展方向（定向进化），see *development* 见发展
discovery 发现，invention and—发明与发现，see *invention* 见发明
disputants 辩论者，(10)
domain 领域，74-78；—of epistemology 认识论领域，see *epistemology* 见认识论
durée (time lived through) 绵延(时间的存在形式)，106-108，210-213

E

Empirical，(Kant) 经验主义的，(康德)，11
empiricism 经验主义，134，148，237-238，281-285；—of Mill 密尔的经验主义，24-25
epistemology 认识论，domain of—认识论领域，149，304；methods of—认识论方法，150-153
equilibration 平衡，equilibrium 均衡，193，196-197，212，309
essence 本质，—of geometrical entities 几何实体的本质，7，9，12
excluded middle 排中的，principle of—排中律，47，63
exhaustion 穷举，97
existence 存在，—of mathematical entities 数学实体的存在，146-147，150，164，226-227
experience(experiment) 经验（实验），28-29，125-126；—and deduction 经验与推理，137，209，230-231，281-285；the two types of—经验的两种类型，191，196，226-230 (see also *abstraction* 另见抽象)；—logico-mathematical 逻辑数理经验，226-230

F

Facts 事实，normative 标准的，140-141，143-145，154；norms and—标准与事实，135-136
figural 比喻，—aspect of knowledge 知识的比喻，156
finitist 有限论者，cf. *intuition* 参考直觉
force(power) 效力(能)，comparative—of systems 系统的比较效力，59，71；logical—逻辑效力，95
form 形式，—of an argument 论证形式，71-72；—and content 形式与内容，245-247；

psychology of—形式心理学,see *Gestalt theorie* 见格式塔理论
formalization 形式化,114-115,226;—and psychological explanation 形式化与心理解释,131-136,250-280;natural—自然形式化,226;psychological reasons for—形式化的心理原因,247-256;—of ordinary thought 普通思维的形式化,256-258;limits of—形式化的限度,276-280
formalism 形式主义,165,166;(Kant)(康德),14,15;(Descartes)(笛卡尔),15-16;(Hilbert)(希尔伯特),58-59;limitations of—形式主义的限制,276-280;—and psychology 形式主义与心理学,see *logic* 见逻辑学
formulae 公式,partial or sub—部分或者子公式,61-66;—of the 1st and 2nd kind 第一和第二类公式,84-85
foundation 基础,crisis of—s 基础危机,59,96,111
function 功能,recursive—s 递归功能,119-123;effectively calculable—有效的可计算功能,120-123

G

General 一般的,passage from the particular to the—从特殊到一般的过程,cf. *particular* 参考特殊的;"—triangle"(Locke)"一般三角形"(洛克),8,9,12
generalization 一般化,243;see also *abstraction* genetic psychology 另见抽象发生心理学,—and mathematics 一般化与数学,133-135;—and norms 一般化与标准,151-162
geometry 几何,15,101-105,108-109,228;non-Euclidean—非欧几何,see this term 见这一术语;—of 4 dimensions 四维几何,49-51;analytical—分析几何,(94);—of the child 儿童几何学,183-186,252
Gestalt theorie 格式塔理论,142,246
group 群,—of displacements 替代群,156;I. N. R. C. —I. N. R. C. 群,180-183,241;geometrical—s 几何群,184;—and grouping 群与群集,173-174
groupings 群集,172-175,239-240,257-258,266;geometrical—几何群集,184-185

H

Habit(custom) 习惯(惯例),latent—(Hume) 潜在的习惯(休谟),(9)
heuristic 启发的,(15),(18),61,92-93;cf. *intuition*,*invention*,*discovery*, etc. 参考直觉、发明、发现等等。
hierarchy 层级,—of structures 结构的层级,166;—of form and content 形式与内容的层级,246-247
historico—critical(method) 历史批判(法),306;see also *epistemology* (methods of) 另见认识论(方法)
homeomorphisms 同胚,185

hypothesis 假设,199-200,249

I

idea 观念,“abstract—”(Berkeley)“抽象观念”(贝克莱),(8),cf. *essence*,*general*,*any* 参考本质、一般的、任何的;innate—s 先天的观念,(8)

Idealism 唯心主义,190;see also *ideas* 另见观念

Ideas 观念,145-147

identity 同一性,恒等式,40-41,182

image 意象,mental—心理意象,216-218,224-245

imagination (Kant) 想象(康德),12

implication 蕴涵,67,181-182,241;naive—朴素蕴涵,155;—and causality 蕴涵与因果,135-136,154-155

inclusion (overlapping) 包含(重叠),—of classes 类的包含,175,221-222;—of durations 持续时间的重叠,211

individual 个人的,cf. *particular* 参考特殊的

induction 归纳,reasoning by complete—完全归纳推理,20;principle of complete—完全归纳原则,14;quasi—of Bourbaki 布尔巴基的准归纳法,165,188;inductive integration 归纳综合,126,(191)

inference 推论,28-29

infinite 无限的,cf. *intuition* 参考直觉

innate 内在的,先天的,197-198;see *preformation*,*apriorism* 见预成论,先验论

I. N. R. C. ,—group I. N. R. C. 群,see *group* 见群

integration 综合,inductive and noetic—归纳与理性综合,126,191-192;genetic—发生综合,195

intelligence 智能,198,248

interpretation 解释,method of—解释法,49-52

introspection 内省, 200, 202, 233, 306,307

intuition 直觉,diverse forms of—直觉的各种形式,223-225;mathematical—数学直觉,208-225;spatial—空间直觉,17-18,101-105,183-184,213-219,220;spatial and syllogistic—空间与演绎推理直觉,18-19;temporal—时间直觉,105-108,209-213,221n;finitist—有限论者直觉,108-111;—of the infinite 无限直觉,110-113;—of the transfinite 超限直觉,206,220;prolonged—延长的直觉,223;transintuitive—反式直觉,223;operational—运算直觉,212,219-222;pure—纯直觉,222-223;—and deduction 直觉与推理,209;—and formalisation 直觉与形式化,226,247-256;—in image form (or symbolising) 表象(或者符号化)形式的直觉,see *image*,*mental* 见意象,心理;elimination of—直觉的消除,124;—according to Aristotle 亚里士多德的直

觉,37-38;—of the particular (Descartes) 特殊的直觉(笛卡尔),6-7,8-9,15-16;—in Kant 康德的直觉,11-12,14-17

intuitionism 直觉主义,Descartes 笛卡尔,7,(12),15-16,(39);Kant 康德,12-14,(38); recent forms 最近形式,18-23;philosophical—哲学直觉主义,18-20;—of Brouwre 布劳威尔的直觉主义,46-47,105-107;intuitionistic mathematics 直觉数学 20-23;(in general) 一般的,134

invariants 恒常性,sensory-motor—感知运动不变性,214;physical—(weight etc.)物理恒常性(重量等),192,239; geometrical—几何恒常性,184-185,214;see also, *conservation* 另见守恒

invention 发明,—and discovery 发明与发现,86-93,98-100,145-146,108-208

inversion 反向,逆转,168,176,179-180,181-182

isomorphism 同构,188

interation 迭代,交互影响,213,219-220,262

J

Judgments,analytic and synthetic 判断,分析与综合,12-13,14

L

Language 语言,formalised—形式化语言,41;universal—通用语言,94-95;logic(or mathematics) and—逻辑(或者数学)语言,see "*linguistic*" 见语言学的

lattice 格,186;—and grouping 格与群集,174

leap 跳跃,—from end to means 从目标到方法的跳跃,118-119

learning 学习,—of concepts and operations 概念与运算的学习,192,196,288-289

liberty (freedom) 自由(独立),—of method 方法的自由,123-124,(124-125)

limitation (restriction) 限制(约束),theorems of—限制的定理,54-59;—s in groupings 群集的限制,172-174,239-240;—of formalisms 形式主义的缺陷,see *formalisation*, *formalism* 见形式化,形式主义

"linguistic""语言学的",—interpretation of mathematics 对数学的语言学解释,230, 285-290

logic 逻辑,grand—大逻辑,51-52,59;—of statements 陈述逻辑,61;—and psychology 逻辑与心理学,137-162,305-312

logicism 逻辑主义,(36)40,41-42,44-46,47,59,142;—of Leibniz 莱布尼茨的逻辑主义,39-42

M

Machine 机器,thinking—思维机器,114-118,120,127-128

many-one 多对一,107,213

mathematics 数学，phases of mathematical thought 数学思维的阶段，22；unity of—(Bourbaki) 数学的单位元素(布尔巴基)，164-166；pure—纯数学，226-242，242-247；autonomy of—数学的自治，296
matrices 矩阵，174-175
maturation 成熟，195-196
meaning 意义，58，67，69；—of the symbols'—'and'→' 符号'—'和'→'的含义，67-68
metalanguage 元语言，279
metamathematics 元数学，—of Hilbert 希尔伯特的元数学，52，59，69；—in the enlarged sense 扩大意义上的元数学，70
method 方法，heuristic and demonstrative—启发与证明方法，93-95；—of Archimedes 阿基米德方法，97；atomist—原子论者的方法，97-98
model 模型，81-83
multiplication 增加，—of classes 类的增加，174，178-179

N

Necessity 必然性，191-198，207，233
negation 否定，34-35，67
network 网状系统，see *lattice* 见格
nominalism 唯名论，112，148-149，285-290
non-contradiction 非矛盾性，40-52，54-59；—of arithmetic 算术的非矛盾性，60，272-273
non-Euclidean 非欧几里得的，—geometry 非欧几何，17-18，106，228
non-resolvability 不可解决性，115-118；cf. also *decision* 另参考决定
norms 标准，—and facts 标准与事实，145-146，152-153；—and normative facts 标准与标准事实，135，144-145；logical—and rules of the game(Zilsel) 逻辑标准与游戏规则(济塞)，143-144；—and genetic psychology 标准与发生心理学，153-162
number 数字，167，175，180，212，243，252-253，259-272；Gödel—s 哥德尔配数，54-58，69-70，119-123

O

Object 客体，subject and—主体与客体，see *subject* 见主体
openness 开放性，—of mental structures 心理结构的开放性，160-161
operational 运算的，—aspect of knowledge 知识的运算方面，156；—point of view 运算观，134
operations 运算，156-157，163，172，187，234，239-242
order 顺序，structures of—顺序的结构，165；concept of—顺序的概念，174-175，213，231-232，265，271；see also *relations*，*seriation* 另见关系，序列

P

Paradox 悖论,—of Russell 罗素悖论,42-44

parallelism 心身平行论,(in psychology)(在心理学中),141-142

particular 特殊的, passage from—to general 从特殊到一般的过程,6-7,8-10;intuition of—特殊直觉,6-10,11

perception 知觉,213-216

phase 阶段,—in mathematical work 数学研究的阶段,88-92

Platonism 柏拉图主义,98-100,112,145-147,166,208,230,274,290-296

positivism 实证主义,227

postulate(s) 假设,(in general)(Kant)(一般意义的)(康德),14;fifth—of Euclid 欧几里得的第五公设,15;—of the sciences according to Aristotle 亚里士多德的科学假设,36-37;see also *axioms* 另见公理

preformation 预成,197

premiss 前提,60-66

problem 问题,—of Locke-Berkeley 洛克-贝克莱问题,8-14,77-80;cf. *valuation*, *decision* 参考评价,决定

psycho-linguistics (or significs) 心理语言学的(或者符号学),33-35

psychologism 心理主义,139,238;critic of—心理主义批评家,131-132;—of Mill 密尔的心理主义,26;—of Heymans 海曼斯的心理主义,30,(42);—of Enriques 恩里克斯的心理主义,33-34,(48);the anti—of Husserl 胡塞尔的反心理主义,30-33 ,(42)

Psychology 心理学,—and formalism 心理学与形式主义,131-136;and logic 心理学与逻辑学,137-162,304-311;see also *genetic psychology* 另见发生心理学

R

Reason 理性,195;constituent and constituted—成分理性与构成理性,195

Reasoning 推理,—and construction 推理与建构,19;—for Goblot 戈布洛推理,19-20;mathematical—数学推理,6-23;theory of—推理理论,71-73;cf. *syllogism* 参考三段论

reciprocity 交换,168,176,180,182

reconstruction 重构,189,198,203;see also reflective *abstraction* 另见反省抽象

reduction 约简,reductionism 还原论,249-250,254-255,256,263,272-275

reflection 反思,reflective abstraction 反省抽象,see *abstraction* 见抽象

regression 回归,249

relations 关系,170,174-175;—and numbers 关系与数字,261-272;constitutive—(Bourbaki) 基本的关系(布尔巴基),187-188

relativism 相对主义,191

relativity 相对性,speed and一速度与相对性,210n-212n

representation 表征,一in image form 表象形式的表征,216-217

reversibility 可逆性,168,170,175-183,196,297;see also *inversion*,*reciprocity* 另见反向,相互作用

rules 规则,semantic一语义规则,78-79,81;一and norms 规则与标准,143,187; see also *norms* 另见标准

S

Schemas 格式,一of reduction (for sequence) 约简格式,61-62,65-66,79-80;一of deduction 演绎格式,65-66

schematisation 格式化,axiomatic一公理的格式化,253

schematism 格式说,170,282,287,299; see also *schemes* 另见格式

schemes 格式,170,215,223,235-236,246

sciences 科学,aristotle's theory of the一亚里士多德的科学理论,36-38

self-evidence 自明性,48-49,191-198;false一虚假的自明性,53;acquired一获得性自明性,124-126,194;deductive一演绎自明性,231

semantic 语义,69-70;一rules 语义规则,78-79,81,cf. *tableaux* 参考表单

sequence 序列,一in Gentzen's deduction 根岑的演绎序列,62-66;final一最后序列,63

seriation 系列,171,175,192;temporal一时间系列,211

sets 集,theory of一集理论,42-43,44-46,(59),112

signified 意指,(Kant)(康德),(13-14)

signifiers 表示者,cf. *symbols*,*signs* 参考符号,记号

sociological 社会学的,一factors 社会学因素,244;see also,*linguistic*,*conventionalism* 另见语言学的,约定主义

space 空间, operations and intuitions bearing on一空间运算与直觉,17-18,101-105,183-186,213-219; physical一物理空间,220;non-Euclidean一s 非欧几何空间,222 (cf. *non-Euclidean* 参考非欧几何); see also *geometry* 另见几何

speed 速度,perception and concept of一速度知觉与概念,210-211;一relativity 速度相对性,210n-211n

stages levels 阶段(水平),158-162

structures 结构,163-190,299-303;physical and organic一生理与组织结构,203-204,300-301;matrix一of Bourbaki 布尔巴基的矩阵结构,163-167,186-190;natural一自然结构,168-170; logical and psychological一逻辑与心理结构,see *logic and psychology* 见逻辑学和心理学;algebraic一代数结构,一of order 顺序结构,topological一拓扑结构,see *algebra*,ect 见代数等;relationships (*filiation*)of一结构

关系(血统),see *relationship* 见关系;intrinsic objectivity of一结构的内在客观性,293
subject 主观,一and object in knowledge 知识的主观与客观,149-153;psychological一and epistemological (or transcendental)一心理学被试与认识论被试,230,238,308
succession 连续,一and durée 连续与绵延,210-213;一and number 连续与数字,212
syllogism 三段论,71-73,94;一and mathematical reasoning 三段论与数学推理,6-23,particularly 特别是,6-7,16,18-19;一and spatial intuition 三段论与空间直觉,18
syllogistic 三段论的, cf. *syllogism* 参考三段论
symbolic 符号的,一function 符号功能,216
symbols 符号,(Kant) (康德), (13);一and images 符号与意象,216-220,222
syntax 句法,69
synthesis 综合,(Kant) (康德),13;一of classes and relations 类与关系的综合,175,180, 267-272; operational一运算综合,242,263,272;dialectical一辩证综合,272
synthetic 综合的,一method 综合法,14
system 系统,"little" formal一"小的"形式系统,109-111,119-122

T

Tableaux 表单,deductive一推理表单,63-67;semantic一语义表单,71-72,83-85,116
theorems 定理,limitation一of Gödel 哥德尔定理的局限,54-59,68-69
thought 思维,"psychology of一""思维心理学",see *Denkpsychologie* 见符兹堡学派思维心理学;natural thought 自然思维,256-258,259-280
time 时间,194;intuition and operations on一时间直觉与运算,184,209-213
topological structures 拓扑结构,165-166,243
topology 拓扑学,85,183-186
transfinite 超限的,206,220
transformations 转换,reasoning on一and on states 转换推理和状态推理,196,216-219;non-compensated一(perceptual deformations) 非补偿性转换(知觉变形),215
transitivity 传递的,158,191-192,232
tree 树(形),175
triangle 三角形,general一(7) 一般三角形;sum of angles of一三角形的内角和,9-11,17
truth 事实,concept of一事实的概念,58;its irreducibility 它的不可约简性,69-71
types 类型,44,176
typology 类型学,一of mathematicians 数学家的类型学,86-87

U

Unconscious 无意识,86-93,199-201

universals 共相，145-147；see also *Platonism* 另见柏拉图主义

V

Valuation 赋值，problem of—赋值问题，79-80，81-83
variable 变量，free variables and bound variables 自由变量和约束变量，73-74
vection 向量，see *direction* 见方向
verification 证实，cf. *experience* 参考经验
vicariance 物种的地理分隔，175，182n，241

论命题逻辑与类和关系“群集”之间的关系

——关于夏·瑟路斯《逻辑论》的讨论

〔瑞士〕让·皮亚杰 著
朱倩兰 译
蒋 柯 审校

论命题逻辑与类和关系“群集”之间的关系

——关于夏·瑟路斯《逻辑论》的讨论

Du Rapport Entre la Logique des Propositions et les “Groupements” de Classes ou de Relations

作　者　Jean Piaget

原载于 *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1948, 53(2), pp. 139-163.

朱倩兰　译自法文
蒋　柯　审校

内容提要

分类或关系以嵌套方式相联结，构成了名为“群集”的集合系统，并附带相关特性，这便是“群集”问题。本文考察“群集”概念是否与命题逻辑存在某种关联，继而发觉在群集和著名的尼克德(J. Nicod)提出的“唯一公理”之间存在某种对应。

晚近学者夏·瑟路斯(Ch. Serrus)在其著述《逻辑论》中采纳了内在于“群集”的计算过程，及运用这些过程得到的主要结果，却没有贯彻整体性法则，为群集做出精确定义，这将导致对群集系统整体性的破坏。

学者尼克德的“唯一公理”公式和群集的结构之间存在等价关系，文中给出了分类加法和一一对应乘法的情况，同理可得其他六种运算情况。从而得出，所有由命题项表达的分类或关系群集，都能衍生出命题蕴涵或不兼容性“群集”。故而在分类和关系逻辑之间存在着我们所能想到的最紧密的关联，其逻辑结构由对应的命题群集来解释。

朱倩兰

论命题逻辑与类和关系“群集”之间的关系

——关于夏·瑟路斯《逻辑论》的讨论

当代的数理逻辑包括两部分，两者的区别仅在近二十年间愈发显著，这两部分也对应着形式化过程的不同分支。一支是命题逻辑（命题计算，演绎理论，等等），构成一套纯粹形式化的组合，涵盖各种不同的排列，我们可以根据它们的真值或假值（或其他中介值），用两种或多种命题来组成这些排列，而不涉及它们的内容。另一支是分类和关系逻辑，研究命题的内在结构，也研究根据一定运算或基础关系所做的解析(décompose)；这一部分的形式化水平相对低一些，因为它更直接地包含了思维的客体，即处于分类中的、关系中的或被计数的思维客体。两者的对立在数理逻辑建立初期不如当下这般激烈。早在 1905 年，库蒂拉(Couturat)在他的著作《逻辑代数》中，便将分类逻辑和命题逻辑缩合为一个独立的陈述，他的每个公式都有双重解释，“概念的”或“命题的”，尽管“某些不一致”阻碍了“从形式化的角度将它们归于单一的分类计算，从而阻碍了它们完全同一化(identifier)”（原文第 4 页）。此后，相反地，由命题理论和演绎公理带动的重要发展，借由讨论更为深入的形式化过程，总体上导致了命题逻辑和分类逻辑或关系逻辑之间的分离①。而数理逻辑在这两个方面的关联触发了关乎原则性的问题，而有关这一问题的讨论对于揭示数理逻辑的本质起到了某种重要作用。

在 1945 年出版的优秀著作《逻辑论》当中，令人惋惜的(regretté)学者夏·瑟路斯在这个问题上立场十分明确，这从其著述纲要中便可看出。著作第一部分直接引入了命题理论，没有应用先验演绎，也没有心理学解释，尤其没有以对构成命题（逻辑性）内容的分类与关系的介绍来作为开场白。作为纯粹形式化组合，命题逻辑仅仅取决于自身而不是其他，命题一旦被构想出来，根据罗素的定义，它就是“自足的”(ce qui s'implique soi-même)。在此之后，在著作的第二部分，构成了演绎理论的“推理的空格式”（原文第 149 页）由命题所包含的项与关系，即被夏·瑟路斯称为“关系逻辑”的分类关系逻辑所填充。形式逻辑并不涉及方法论的理论，也不涉及命题的物质经验性内容研究；但它的形式化特征低于演绎逻辑本身的形式特性，这是因为不同的分类关系群集组合没有介入命题组合，而命题组合建立在更高阶的水平上，并独立于命题组合的亚结构。

---

① 马塞尔·布勒(Marcel Boll)的《科学逻辑教程》(*Manuel de Logique scientifique*)指出了这一点，该文章重新将命题逻辑与集合逻辑相关联，从另一方面看，它的观点或许有点过头了。

以上来自公理学派的设想是合理(légitime)的，但我们还是可以追问，这种完全颠倒了建构过程自然秩序的做法，会不会损害论证的严谨性，又会不会损害逻辑自身的创设性(invention)呢。的确，一个演绎结构，或称形式化蕴涵系统，或称[如刘易斯(Lewis)所述]“严格”的蕴涵系统；与分类结构或关系结构相比，形式化蕴涵系统具备了完全的独立性，而分类结构或关系结构填充并决定了那些具体或“已知”的蕴涵：这并不会降低上述两类结构中存在某种关联性的可信度。假使情况如此，这种关联性很容易引出一个关于命题形式化的新问题，而无需将高阶水平归约到低阶层次。然而，为了找到上述关联，需要进行探寻，同时也不免担心命题逻辑和分类关系逻辑之间过于全面的分化会阻碍我们发觉它们之间的相似点，而不是促成相似点的发现。

出于考据精神，我们习惯性在这一简短的说明中自我反思，追问我们在1941和1942年间尝试在分类关系领域引入的“群集”(groupement)概念①，同时也是夏·瑟路斯在《原理》第二部分广泛运用的“群集”概念，它是否与命题逻辑存在某种关联。继而，我们明确地发觉，在群集和著名的尼克德提出的“唯一公理”②之间存在某种对应。不过，为了足够清晰地呈现事实，似乎有必要再对“群集”结构和夏·瑟路斯使用过的方法赘言两句。实际上，或许因为缺乏一般结构的分析，同时受到需要提供一定数量的特殊例证的限制，笔者未能发现以下两个问题之间的关联与相似，即，分类逻辑和关系逻辑的“群集”问题，和演绎理论中的“唯一公理”问题。

Ⅰ. 分类和关系的“群集”

分类逻辑和关系逻辑本质上都由运算系统构成。我们可以将这两种类别合而为一(分类的叠加)或探寻它们之间的共同部分(它们的乘法运算结果)。我们可以将两种非对称性关系$(A<B)+(B<C)=(A<C)$叠加合并，或者将它们相乘联结，诸如此类。但问题是，我们需要了解，这些运算是否按照某种原子论的格式，以离散的状态呈现给我们，或者，它们可能相互关联构成了整体性的系统。继而，很明显存在着逐一嵌套的分类系统，构成了“分类化过程”。同样明显的还有，我们能在“系列化”的形式之下建立非对称性的序列关系，或者称为世系关系，只要非对称性(如：父亲)与对称性(如：兄弟)之间能够形成定义明确的谱系树。分类的乘法运算生成了各自的二项或多项的编码表。简言之，正如所有的数字都不能孤立地存在，而是按照“群”(groupe)(其中的“基本

---

① 让·皮亚杰，《分类，关系与数量.论数理逻辑群组与思维可逆性》，巴黎(Vrin)，1942，第323页，及《多种交流》，收录于《日内瓦物理学会会刊》，vol. 58(1941)，第102，107，121，125，149，154及192页。

② 1917年，法国逻辑学家尼克德发现使用谢费尔竖线的命题逻辑公理化只涉及一个公理模式和一个推理规则。——译者注

元素”是+1运算)属性形成一个严格的序列,同样,质性的分类和关系也表现为集合系统的形式,并致力于分离其中的特性。

这便是“群集”的问题。更确切地说,这一问题包含两个互补的方面:一是描述出每种系统的结构特征,但要作为运算整体来描述,而非简单地在某些基础运算当中描述;二是在逻辑的简单的分类和关系框架内(即没有数字的介入或没有数学的无穷概念的介入)提出一个可能系统的穷举列表。

我们已在1942年提出,对上述两方面可以给出一种解决方案,我们倾向于提出心理学研究方案①,但我们也坚持用纯粹数理逻辑的方法来处理问题,与发生学分析平行并进。数理逻辑解决方案需要从两种观念出发,即可逆性观念和二元划分的观念,在以整体运算的名义下对每一个“群集”做出形式化描述,以及对可能的“群集”的数量做出形式化描述。

例如,序列$(O)A,B,C,D,\cdots$,等等,每一项都以次级分类的名义嵌套于后项。如果这些项彼此并不等价,亦即每一个项都比前一项有更大的外延(空集除外),这样的系统,由于形成了嵌套的关系,包含了A',B',C'等互补分类的集合,即$A'=B-A$;$B'=C-B$;$C'=D-C$;以此类推。群集的直接运算即是:$A+A'=B$;$B+B'=C$;$C+C'=D$;以此类推。运算可以反演如下:$B-A'=A$;$C-B'=B$;以此类推。于是,分类的“群集”是由可逆性成分的可能的二元区分序列所构成。

这种组合遵循了一定数量的法则,根据这些法则,我们总是可以在群集的两种运算构成中,重构同一群集中的单一运算。除了顺运算$(+A)$和我们刚刚定义的逆运算$(-A)$之外,还存在着一般的同一性运算$(+O)$,由顺运算和逆运算得出$(+A-A=O)$。但冗余性$(A+A=A)$和吸收性$(A+B=B)$的存在约束了“群集”(groupement)向数学“群”(groupe)的归约,同时强化了计算的特殊规则:这使得同一等式总是,或者说只是均衡地执行了吸收性和冗余性的运算,或在冗余性和简化的运算中遵循某种次序,同时考察序列(相对于符号+和−)的同质性或异质性本质②。此外,适用于逻辑分类的本质在构成中体现出一种强制性的基本限制,与数字群的结构对立:通常嵌套于高阶序列的分类或者从数字群结构中解套的分类构成了群集,这些分类彼此之间不能组合,除非以渐进或者邻近原则的方式进行③(例如$A+A'=B$或者$A+C'=D-A'-B'$),而不是独立于邻近项。这种约束限制了群集的关联性,但所有邻近项的序列仍具有关联性,只要我们遵从冗余性和吸收性的计算规则。

---

① 见让·皮亚杰:《智慧心理学》(柯兰文集),1947,第二章。

② 我们已在著作《分类,关系与数量》(1942)的第42—49页,第87—89页详细展示了这些规则,之前也证明了其稳定性[《日内瓦物理学会会刊》,1941(t.58),第102页]。这些规则由夏·瑟路斯在其《逻辑论》(奥比埃1945),第253—259页和第278页中予以重新展演。

③ 参见弗·贡塞斯,让·皮亚杰:《群集,群,格》,心理学文集(Arch. De Psychologie)(日内瓦),第31卷(1946),第65—73页(v.第67页,邻近原则的定义)。

具备上述特征的“群集”与“群”相区分，群集不包括同时作为顺运算和逆运算结果的唯一的“同一性运算”，而且无论与何种运算组合，它都保持恒常性（例如 $n+o=n$）。冗余性（$A+A=A$）和吸收性（$A+B=B$）的存在反过来导致了如下结果，即在包括高阶序列分类（冗余性和吸收性是“特殊”的，对立于一般同一性 $+O$）的相同符号运算的意义上，以及对立于该运算的其他项目的意义上，每种运算都发挥了同一性的功能。不过我们在“群集”中发现了没有明确定义的构成可逆性的能力，这使我们想起“群”的可逆性。另一方面，倘若我们将“邻近性”抽离出来，并以任意方式使用嵌套（以牺牲可逆性为代价），那么，“群集”就类似于美国数学家所定义的“格（lattices）”（网络，réseaux），正如我们近来与弗·贡塞斯共同证明的那样①。故而“群集”组成了可逆性“网络”。

由此解决了群集结构的难题，问题在于要得知我们能用逻辑的分类和关系建构多少个这样的结构，无须借助数字，也毋需借助无限集合。群集就是一个运算系统，其特征是可逆的构成，以及一系列二元划分，“群集”的可能形式基于下文将会论及的三对特征，即 $2\times2\times2$ 而简化为 8 种形式。

首先，可用于“群集”的运算只有加或乘（$+$或$\times$，逆运算则包括逻辑减和除）。由于冗余性和吸收性（即乘法运算被消解）的存在，实际上排除了幂等级的提升②，也排除了所有的相互迭代运算。

其次，加或乘的运算只能支持分类或关系，这是因为我们排除了数字，也排除了命题，目前只保留了纯粹的形式（独立于其内容）。于是就有了加法或乘法与分类或关系的交叉对应，即 $2\times2=4$。

再次，“群集”固有的二元结构强制性地将分类（或关系）分为“初级”（primaires）和“二级”（secondaires）两个层级。初级分类能为方才提到的例子提供初始嵌套：即 A，B，C，D，等等。同样，在非对称关系的序列中，如 $A<B<C<D$，我们将初始关系称为“初级”的，即 $a(A<B)$，$b(A<C)$，$c(A<D)$，$d(A<E)$，以此类推。相反，“二级”分类是互补分类，这也解释了上述每种初级分类同 A'，B'，C' 等分类之间的区分。同样，非对称性序列的“二级”关系揭示了每种初级关系和互补关系之间的区分，诸如 $a'=b-a$（故而 $B<C$）③，$b'=c-b$（故而 $C<D$），$c'=d-c$（故而 $D<E$），等等。由此我们可以辨认得出，在前述四种群集的基础上，由初级项，以及它所从属的二级项要素的介入，又有四种

① 参见弗·贡塞斯，让·皮亚杰：《群集，群，格》（上文所引）。格是部分有序的集合，其中任意两项通常会包括下限（join）（先于两项的元素中最近的一项）和上限（meet）（后于两项的元素中最近的一项）。

② 由于乘法运算被消解，运算只停留在一阶运算的水平，不会形成二阶运算或三阶运算，故幂等级不会提升。——译者注

③ 此处的推论是从 A 是最小分类开始的，如果 A 在 B 中有互补关系，即 $a'=b-a$，那么 B 是 A 最相邻的更大分类，仅仅比 A 更大，于是 B 一定小于其他也大于 A 的分类，如 C，所以有 $B<C$。以下同理。——译者注

新的群集通过二级分类或关系的分析得以区分出来。在分类中，互反[或者叫"替代"(vicariances)]的加法群集被分为不同的二级分类，这些二级分类是我们通过区别于初级分类的二元划分来建构的。另一方面，分类还形成了"联合单值对应"(co-univoques)(而不是简单乘法那样的一一对应)的乘法群集，这些乘法群集是通过每个初级分类与对应的二级分类之间的乘法运算形成的。在关系的语境中，互反过程生成了对称关系的群集，而分类的联合单值对应乘法则生成了关系的联合单值对应乘法，只不过形式是发生学的谱系树。

总而言之，通过三组属性(加法＋乘法)，(分类＋关系)和(初级＋二级)的二倍相乘，我们得到了 $2\times2\times2=8$ 种定义明确的群集。

Ⅱ. 夏·瑟路斯的"群集"概念

经过上述概念的梳理，我们需要反思"群集"这一理念的运用究竟能延展到何处，这类结构是否与命题逻辑存在某种关联。我们乐意于从这一角度来检验夏·瑟路斯曾经运用于"群集"的研究方法，同时探寻在概念形成的过程中，为何不考虑将演绎理论加以拓展。不过，我们认为答案并不难给出，其中应当包含一种普遍意义：原子论的偏见仍然根植于数理逻辑领域，这导致对集合结构的分析掉到了次席。故而我们根据矩阵提供的不同排列，基于元素而建构起一种组合，而无须使用相对于整体而言来确定的元素。命题理论可能无法逾越这一层面，所用的矩阵也保持了可用于计算的独立集合结构。不过，包含在"群集"结构中的分类或关系的计算，为我们提供了另一种可供深入发掘的模型。反思夏·瑟路斯为何没有深入研究这一模型，对我们来说也有意义，由此可以探讨面对整体系统或集合系统的探索，夏·瑟路斯在什么节点上出现了犹疑。

从这点来说，我们惊讶地发现，夏·瑟路斯采用了内在于"群集"的计算过程，并运用这些过程得到了主要结果，却没有继续贯彻整体性法则，只用了一章(passage)来给群集下定义，我们认为，这个章节包含了一个原则性错误。

关于"群集"的建构性运算和计算技巧，夏·瑟路斯特别提出了两个初始概念，我们在尝试引入这个主题时曾经讨论过：一是"二级"元素概念，二是逻辑运算的可逆性。对于"二级"分类，夏·瑟路斯先呈现了一组加运算的形式，如 $A+A'=B$；$B+B'=C$；$C+C'=D$ 等，然后补充道："以此严格地界定分类之间的关系，将它们表述为[已作了必要修正的(mutatis mutandis)]数学公式。三段论的经典理论不包括这样的区分。汉密尔顿曾经提出过将其转换为计算的想法，对谓项的量化提出了严苛的要求：所有猫科动物都是有些哺乳动物。但这种方法还不够：由于缺乏界定，我们不能把'有些哺乳动物'放入这个等式。在现代计算中，以区分为名义的二级分类加法促成了定义明确、故而具备

严密可比性的群集的建构"①(原文第253页)。这种二级分类加法一经承认,夏·瑟路斯就抛弃了我们曾经制定的计算规则,采用了我们关于"同质"(完全嵌套)序列和"异质"(不能通过简化而消解差异)序列之间的区分,并在简化法和冗余性②之间形成了序列;夏·瑟路斯同样接受了我们解构二级分类所采用的计算规则③。另一方面,他将可逆性视为一项基本原则:"不要忽视以下目标,即,获得完全可逆的群集,同时不让互反运算(réciproques)介入,并保留嵌套。二级分类(A',B',以下从略)的目标,确切来说正是形成等式和不等式"(原文第255页)。这也是为什么夏·瑟路斯像我们先前所做的那样,以逻辑加法和逻辑乘法的逆运算(inverses)的名义引入逻辑减法(原文第230页)和逻辑除法(原文第237页)。

这表明,他抛弃了主要的群集,改为采用我们先前使用过的符号象征。他以承认相对于分类叠加群集的等价关系的依存性为其出发点(原文第247页),从而引入分类叠加群集(原文第251—254页),继而是二级分类之间的互反群集(原文第266页)和(一一对应的)分类乘法群集(原文第274页),但并未介绍联合单值对应的分类乘法群集。涉及关系的部分,夏·瑟路斯接受了我们对序列的阐释,序列作为非对称关系的加法群集,与除去交换律(原文第284—292页)、一一对应关系乘法(原文第280页)以及联合单值对应关系乘法(原文第292—312页)以外的其他分类加法的群集同构,再现了我们的公式核心意义,以及我们为了自由转换群集而提出的四种形态的核心意义(原文第295页以及第302—309页)。此外,夏·瑟路斯省略了对称关系群集。

然而夏·瑟路斯在他关于群集理论的著述中所使用的方法有两点古怪。其一是,在他《逻辑论》第一部分反复强调有必要对命题的可能性组合进行穷举分析之后,却无法提出群集的对应性问题。夏·瑟路斯仅记得我们提出的八个群集中的六个(并且没有准确区分"替代"群集或完全分类化群集的法则,原文第266页);再有,因为联合单值对应的关系乘法群集在分类领域内需要它的同构,所以关系群集的出现就有了强制必然性。

---

① 我们有幸在这一段引述《现代运算之中》(见第253页,"我们同意将这一运算称为'二级加法'",后略)。这里需要指出笔者一个有趣的误会,这一误会或许是由于原文献由德语写成,故而理解不足造成的困难导致。实际上,从《逻辑论》第246—313页,无论是公式、评价(除了第283—284页)、符号象征或举的例子,几乎完全出自我们的著作《分类、关系与数量》(Vrin,1942)。然而,像夏·瑟路斯这样的纯逻辑学者,显然认为心理学者不可能产出数理逻辑的成果,或许他以为我们是把其他国家比如说用德语发表的文献作了综述。他的引述存在一些含混成分,譬如"现代运算"和"我们同意将其称为"这一类。涉及分类过程,我们非常高兴地发现了譬如第295页的"联合单值对应"和(第302—309页)四种亲属关系运算图表,这些我们都早已在1942年的著作中颇费了一番功夫予以建构。我们尤为庆幸能在一部当代数理逻辑认知集合角度的《逻辑论》中找到我们曾以"群集"为主题提出介绍的所有概念。

② 参见第255—258页和第278页,规则的再生成。

③ 参见第266页。

第二点古怪之处，是他始终没有给出整体意义上的群集定义。这样的缺失自然伴随了关于可能的群集数量的穷举分析的缺失：在上述两点作用下，夏·瑟路斯在逻辑论的传统原子论和群集整体论立场之间取了折中路线。实际上，尽管有两个段落分别讨论了“群集的不同形式”（第 203 页）和“群集结构的一般性考察”（第 238 页），撇去这两段，我们在夏·瑟路斯的著述中找不到任何有关群集定义的表述，除了下面这句：“关系总是会联结关系中的各项。存在两种主要的群集形式，一种是会集（rassemblement），对应于析取结构，并使得关联项之间彼此独立；另一种是序列（sériation），即建立在关联项彼此联结基础上的秩序（ordre）”（第 203 页）。紧接着，夏·瑟路斯认为一个集合或一个分类便足以构成一个群集（第 205 页），这一观点一直持续到关于“异质群集”（第 256 页）的讨论部分，并且他希望以此来划定混合了加法、减法和冗余性的分类组合。据夏·瑟路斯的观点，所有的运算都是群集，哪怕是基于一个单独分类或一个单独关系的运算。

然而，若按此论，群集这一概念便丧失了一切意义。反过来，“群集”的唯一意义，不是定义某一个具体的运算，而是定义所有运算构成的系统，包含了计算的精确法则约束下的可逆性组合，系统中任意两种运算的结果仍然属于这一系统。倘若漏掉运算的整体性，我们就会同时失去系统的封闭性，就会跌回孤立的分类和关系（或者三两成对的分类关系）的原子论，而无法理解分类逻辑和关系逻辑的内在相关性：即，特定数量的彼此关联群集，它们其中的每一个，都基于可逆性组合的一般性法则，形成了自身的结构。

不过夏·瑟路斯还是在某一章提出了运算整体性的问题，并以他自己的方式来解析（第 283－284 页）。不过，解析的方法有些古怪，而且在我们看来，同他之前的方法相矛盾。如方才所述，他在描述加法“群集”的时候标准十分宽泛，而对乘法群集却突然变得过分严苛，并将乘法群集无限地接近于数学“群”：“非对称性关系一一对应的乘法运算既有反映性，又有传递性，同时呼应了转换群的概念。这一概念完全建立在针对乘法和对应性的考察基础之上，不应强制性地绑定数学应用，而应赋予其更抽象的意义。出于同样的理由，倘若我们将分类相乘，同样的考察也必不可少”（第 283 页）。让我们首先来纠正他的错误，根据这一错误说法，数学“群”应首要具备乘法属性：我们将群中两个运算的组合得到的内容称为“结果”（produit），运算可以是任意的，用加法将它们联合起来。譬如，对正/负整数的“群”元素作＋1 运算，逆运算则是减法，对同一性作±0 运算。

至于谈到“群”与分类或关系的逻辑乘法之间的相似性，在我们看来，存在着一个基本的原则性错误①。首先，这样的断言同拒绝将相同的属性赋予加法群集的做法相矛盾，这是因为乘法群集无非是两个相同性质、彼此对应的加法群集的简单组合。这一对应或许不能将群集转换为“群”，除非“群”概念是由乘法特征来做的简单定义，但情况并

① 我们已经在 1937 年向数学研究者提出质疑（《逻辑加减法得到的平等关系是否构成群?》，数学教育，t.36，1937，第 99 页），并且用否命题给出了回答，理由在这里重新提过了（皮亚杰，《分类，关系与数量》，第 278 页，同时参见贡塞斯和皮亚杰，《群集，群，格》，出处见文中所引）。

非如此；何况夏·瑟路斯忘了提及"群"的真正属性，即精确而严密的属性。其次，这些属性之一，或许是最有代表性的一个(存在着唯一的同一性运算，是顺运算和逆运算的结果)，却同分类的和关系的乘法群集不相兼容：冗余性运算、合并或取消运算(absorptions ou résorptions)的功能，实际上都是从这些群集中排除了仅有的同一运算，这种运算的唯一性对于"群"的构成来说是必要的。第三，从前一点得出，分类和关系的乘法群集只有以建构群集元素结构的嵌套为其依据时方有意义，而乘法群集的运算只能通过"邻近原则"(前文已提及这一概念)发挥功用，同时数学"群"又独立于所有邻近性，故而这里存在矛盾，即，在采纳必然导致"邻近性"的计算法则预设和得出如下结论之间存在矛盾：受以上计算法则限定(限定方法与分类和关系相类似)的转换能够定义何为真正的"群"①。

简言之，夏·瑟路斯有意解离有关"群集"足够精确的定义，甚至也没有给出八个概率群集的穷举式列表，从而错误地将乘法群集和数学"群"视为同出。尚不用说这一同化在逻辑分类或逻辑关系与数字之间的关联上产生的问题，就这一同化过程本身，已足以破坏群集系统的整体性，而以上这些正是《逻辑论》所采纳的观点。

Ⅲ. 命题逻辑与尼克德的唯一公理

基于前述原因，夏·瑟路斯或许未能解决分类逻辑和关系逻辑的整体性问题。故而他略过了探寻命题理论和"群集"之间是否存在某种关联的研究，这一点并不奇怪，虽然据其内容而言，命题必然是分类运算或者关系运算(或仍是数学运算，但同时包含前述两种运算)。显然，命题逻辑只负载了命题的形式而非内容。不过，一方面，我们可以说，"内容的形式"定义了分类的和关系的逻辑的特征，它和命题的"纯粹形式"之间，只有形式化程度的差异，而且在这两种水平之间可能存在某种富有启发意义的关联性。另一方面，即便是二价逻辑的纯粹形式也在一定程度上与群集的二分法原则相似：p 的

---

① 要反思像夏·瑟路斯这样在数学领域拥有警觉头脑的人怎么会犯下类似错误是件有趣的事，因为在群集的本质这个问题上，他犯下错误的原因是有启发性的。回到(《逻辑论》，第281页)我们方才给出的关于一一对应的例子，相同体积的球用质量来分类，相同质量的球用体积来分类(《分类，关系与数量》，第147—153页)，夏·瑟路斯在我们的表中引入了"对角线"和"质量和体积平行递增级数"。再有，很明显，倘若简单涉及定性分类的质量与体积的关系，我们既不能谈对角线也不能谈比例关系，这是因为上述两个概念已经假定了质量和体积的维度！我们已经引述过一个有关比例的例子，也提到了对角线(第156页)，但只是作一简单对比而已。有趣的是，夏·瑟路斯已将这些数学概念引入群集之中，同时他也再现了(第282页)我们对数学比例和由乘法对应判定的定性类比两者做出的区分(参见《分类，关系与数量》，第97—99页)，而且他是在度量意义而非简单的等价(这一概念包含集合理论)意义上引述对角线的。或许是因为这些干扰因素，他才误谈到了"群"，因为如果引入"群集"的维度，很明显就会改变其本质……

真值仅与假值 $\bar{p}$ 相对立，而 $\bar{p}$ 和 q 这两个命题的组合（即 $pq, \bar{p}q, p\bar{q}, \bar{p}\bar{q}$）则可导出逻辑乘法。

故而有必要尝试用命题相关术语来表达分类的和关系的“群集”，并且只能以“经验观察”的方式来进行。由此，我们基于分类的加法群集（$A+A'=B, B+B'=C$，如此等等），并将计算设在形如“x 是 A”，“x 是 B”或“x 是非 A”的命题性函数所引出的命题集合之上，从而能够以系统的方式①来构建以上内容。分布在命题中的多种关系均是由分类的结构予以决定的。比方说，我们可以用 $p \supset q$ 来代替（x 是 A）$\supset$（x 是 B），用 $p|p'$ 来代替（x 是 A）|（x 是 A'），等等。基于已知命题，再结合蕴涵和不兼容性，是否就可以建构“群集”形式的结构？这便是我们的问题。然而仍要说明的是：我们不能简单地用命题抽象语言来解释这样的分类加法群集，这样的群集与其命题内容有关，而非与其纯粹形式有关。于是，我们建议，将既有的分类加法群集中的蕴涵和不兼容性予以整合，将其整合在一个严格的蕴涵和不兼容性系统之中，也就是已知的形式化组合，同时我们建议考察，是否可能依照“群集”结构，来建构类似的形式化系统。

诚如前述（第Ⅰ部分），“群集”的构成包括了表述等价形式下的关系，用“二级”元素来完善关联项，并在项与项之间以可逆的方法组成等价关系。继而，像 $p \supset q$［例如：（x 是 A）$\supset$（x 是 B）］这样的蕴涵自身并不包含等价，一个单一形式蕴涵之中也不包含两个蕴涵的（不可逆）组合。譬如，在如下表述中：

$$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$$

$(p \supset q)$ 和 $(p \supset r)$ 之间不存在等价，也没有可逆性，若是我们有 $(p \supset r) \supset (p \supset q)$，就会同时具备可逆性和等价，但无法获得认知（connaissance）。反过来，对于蕴涵 $p \supset q$，如果 $(q \supset p)$ 非真，我们总是可以为其增加“二级”蕴涵（$p' \supset q$）（p' 的前提或从属关系与 p 的相区分），即表述了 p' 作为全真命题，包含了 q 而不包含 p，同时不被 p 或 q 所包含。譬如，倘若蕴涵（x 是 A）$\supset$（x 是 B）不能反演为（x 是 B）$\supset$（x 是 A），它自身包含着（y 是 A'）$\supset$（y 是 B）这一蕴涵的真值。但在这种情况下，$p \supset q$ 和 $p' \supset q$ 这两种没有特定前提［即（倘若 x 是 A）$\supset$（x 是 B）和（倘若 x 是 A'）$\supset$（x 是 B）］的蕴涵包含了不兼容性（$p|p'$），这是因为（倘若 x 是 B），要么（x 是 A）成立，要么（x 是 A'）成立，但（x 不能同时是 A 和 A'）。

需要注意的是，我们是从蕴涵的定义出发，引入了“二级”蕴涵 $p' \supset q$。实际上，$p \supset q$ 意味着 pq 的真值，$\bar{p}q$ 的真值，$\bar{p}\bar{q}$ 的真值，但排除了 $p\bar{q}$ 的真值。故而“二级”蕴涵 p' 在 $\bar{p}q$ 的关联中体现出两种可能的意义之一：p' 作为 q 的蕴涵是真命题，相对于 p（p 作为 q 的蕴涵则是假命题 $\bar{p}$）。在选中的嵌套例子 $A+A'=B$ 中，实际存在着三种真值可

① 命题由不同命题函数的相同前提（argument）（例如：“x 是 A”$\supset$“x 是 B”）或是不同的前提（例如：“x 是 A 和 B”，“y 是 A' 和 B”）分配得出。在模棱两可的情况下，我们将尝试确定是否涉及相同的主体，抑或主体彼此独立，从而用 x 和 y 这样的符号把它们区分开。

能：pq（$=x$ 同时是 A 也是 B），$\bar{p}q$（$=x$ 是 B 同时非 A，即 x 是 A'）以及 $\bar{p}\bar{q}$（$=x$ 是非 A 非 B），而 $p\bar{q}$（$=x$ 是 A 非 B）被排除在外。命题 p 的意思是"x 同时是 A 也是 B"，命题 p' 的意思是"x 同时是 A' 也是 B"，而（$p|p'$）不兼容性意味着倘若 x 是 B，它要么是 A 要么是 A'，但"不能同时是两者"。实际上 p 和 p'（即"x 是 A"和"x 是 A'"）之间的关系本身就是不兼容性，这是因为 $\bar{p}p'$，$p\bar{p}'$，$\bar{p}\bar{p}'$ 均为真，只有 pp'（或 $p \cdot p'$）为假。

简言之，即使蕴涵（$\supset$）不具备相互可逆性，也就是，即使它并非等价（$=$），它也是部分等价：在这种情况下，它蕴涵了互补蕴涵的真值，也蕴涵了互补蕴涵和蕴涵之间的区别。

因此我们可以用如下方法，将在确定命题之间用嵌套（$A+A'-B$）体现出蕴涵和不兼容性的等价予以公式化：

(1) $[(p \supset q) \cdot (\overline{q \supset p})] \supset \{[(p' \supset q) \cdot (\overline{q \supset p'})] \supset [(\overline{p \supset p}) \cdot (\overline{p' \supset p})]\}$

此处命题 p 和 p' 无法具备同样的前提（或从属关系）。倘若我们不去细分 p 和 p' 的前提，就会由此得出伴随的（排他）析取蕴涵①：

(2) $[(p' \supset q) \cdot (p' \supset q)] \supset \{q \supset [(q \cdot p) \mathrm{W} (q \cdot p')]\}$

现在，假如我们在可能设置嵌套（$B+B'=C$）的命题上继续操作，就会得出：

(2.2) $[(q \supset r) \cdot (\overline{r \supset q})] \supset [(q' \supset r) \cdot (\overline{r \supset q'})]$

(2.3) $[(q \supset r) \cdot (q' \supset r)] \supset \{r \supset [(r \cdot q) \mathrm{W} (r \cdot q')]\}$

而就命题(2)和(2.3)，我们可以形式上将其组合为如下命题：

(3) $\{[p \supset (q \cdot r)] \cdot [(p' \supset q) \cdot (q' \supset r)]\} \supset \{q \supset [(q \cdot p) \mathrm{W} (q \cdot p')] \cdot r \supset [(r \cdot q) \mathrm{W} (r \cdot q')]\}$

我们可以无限地继续下去。

此外，将分类嵌套加法群集解释为命题等价群集，其意义在于：从这一命题群集，我们可以提炼出一个蕴涵系统，这一系统直接体现尼克德从演绎理论得出的著名"唯一公理"，将所有必要的公理统合为一。

实际上，我们可以经由如下转换过程，从命题(3)衍生出命题(3.2)。$(q \cdot p) \mathrm{W} (q \cdot p')$ 的结论借助否命题（$p \cdot p'$）给出了 $p|p'$ 的不兼容性（$=x$ 不能同时是 A 也是 A'）。同理我们得到 $q|q'$。由此：

(3.2) $[p \supset (q \cdot r)] \supset \{[q \supset (p|p')] \cdot [r \supset (q|q')]\}$

另一方面，从等价 $[(p \supset q) \cdot (p' \supset q)] \overset{\supset}{\subset} \{q \supset [(q \cdot p) \mathrm{W} (q \cdot p')]\}$ 我们可以得出等价（$q \supset q$）②并将其一般化为连续命题（$r \supset r$），（$s \supset s$），（$t \supset t$），等等，由此：

---

① 我们接下来会仔细区分简单析取（$\vee$）（譬如，"所有现象要么是物质的要么是精神的，但也有可能是两者同时"）和排他析取（W），或称互反排他（譬如，"要么全有，要么没有"）。

② 以同一运算的名义，包括直接蕴涵 $(p \supset q) \cdot (p' \supset q)$ 和反演蕴涵 $q \supset [(q \cdot p) \mathrm{W} (q \cdot p')]$ 组合的结果。

(3.3) $(t\supset t)$

此外，如果$[p\supset(q\cdot r)]$，并且如果$(q|q')$，那么命题(3)和(3.2)可以得出$(p|q')$：

(4) $[p\supset(q\cdot r)\cdot(q|q')]\supset(p|q')$

从命题(1)和(3)得出的命题(3.2)和(3.3)，加上命题(4)，我们用它们演绎出如下命题：

(5) $[p\supset(q\cdot r)]\supset\{(t\supset t)\cdot[(q|q')\supset(q'|p)]\}$

而(5)所表述的正是尼克德提出的演绎唯一公理，与命题q不兼容的命题q'并不是尼克德所考虑的任意命题s，而是从q和r的已知关系中得出来的。

在检验其严密性之前，让我们首先来证明命题(5)也是从命题群集中推导出来的，我们能从这些命题群集当中，抽离出群分类(classes groupées)的乘法(而不是加法)系统。譬如，群集$A_1\times A_2=A_1A_2$，$B_1\times B_2=A_1A_2+A_1A'_2+A'_1A_2+A'_1A'_2$，等等，从而分类$A_1$包括子分类$A_1A_2$和$A_1A'_2$，分类$A_2$包括子分类$A_1A_2$和$A'_1A_2$。将$p$赋值为命题“$x$是$A_1A_2$”；$q_1$命题“$x$是$A_1$”；$q_2$命题“$x$是$A_2$”；$r$命题“$x$是$B_1B_2$”。于是，我们得到了“初级”蕴涵：$p\supset q_1$；$p\supset q_2$和$p\supset r$，以及“二级”蕴涵：$p'_1\supset q_1$，其中$p'_1$意味着“$x$是$A_1$但不是$A_1A_2$”(即$x$是$A_1A'_2$)；$p'_2\supset q_2$，其中$p'_2$意味着“$x$是$A_2$但不是$A_1A_2$”(即$x$是$A'_1A_2$)；$p'\supset r$，其中$p'$意味着“$x$是$B_1B_2$但不是$A_1A_2$”(即$x$是$A_1A'_2$但不是$A'_1A_2$)；$q'_1\supset r$，其中$q'_1$意味着“$x$是$B_1B_2$但不是$A_1$”(即$x$是$A'_1$)；$q'_2\supset r$，其中$q'_2$意味着“$x$是$B_1B_2$但不是$A_2$”(即$x$是$A'_2$)；最后，倘若$q'=[(r\cdot q'_1)\vee(r\cdot q'_2)]$，$q'\supset r$，其中$q'$意味着“$x$是$A'_1$但不是$A'_2$”。

我们认为，在命题(1)—(5)中，除了个别不兼容性或互反排他性之外，还介入了$\vee$形式(而不仅仅是W形式)的(三阶)析取。由此得出：

已知蕴涵：

$$q_1\supset[(q_1\cdot p)\mathrm{W}(q_1\cdot p'_1)] \quad 和 \quad q_2\supset[(q_2\cdot p)\mathrm{W}(q_2\cdot p'_2)]$$

$$p'_1\supset q'_2 \quad 和 \quad p'_2\supset q'_1$$

于是可以建构蕴涵：

(6) $[(q_1\supset r)\cdot(q_2\supset r)\cdot(q'\supset r)]\supset\{r\supset[(r\cdot q_1)\vee(r\cdot q_2)\vee(r\cdot q')]\cdot q'\supset[(q'\cdot q'_1)\vee(q'\cdot q'_2)]\}$

和(6.2) $[p\supset(q_1\cdot q_2)]\supset(p|p')\cdot p'\supset[(p'_1\cdot q'_2)\mathrm{W}(p'_2\cdot q'_1)]$

此外，一旦这样的内部结构被公式化了，会因为与分类乘法的交叉而变得很复杂，而这些分类乘法又与命题相对应，于是，我们将再次发现与命题(3)类似的群集形式：

(7) $[p\supset(q_1\cdot q_2)\cdot(q_1\supset r)\cdot(q_2\supset r)]\supset\{r\supset[(r\cdot p)\mathrm{W}(r\cdot q')]\}$

从命题(6)，(6.2)和(7)我们可以得出如下不兼容性，和命题(4)类似：

(8) $[(q'_1|q_1)\cdot(q'_2|q_2)]\supset(q'|p)$

和(8.2) $\{[(r'|r)\cdot(q_1\supset r)]\cdot[p\supset(q_1\cdot q_2)]\}\supset[(r'|q_1)\cdot(r'|q_2)\cdot(r'|p)]$

乘法群集的命题化表达从而可以归约为加法群集的命题表达，这种归约基于以下

两方面的不兼容性，即，命题 p 和对应了命题 p 所蕴涵的初级命题的二级命题之间的不兼容。一旦被表达为命题群集，乘法群集自身就蕴涵了尼克德的公理。

不过，以命题“群集”形式体现的分类关系“群集”包含了尼克德的“唯一公理”，这并不奇怪，因为尼克德公理正是用来体现任意一个真命题系统的结构。其意义不在于蕴涵的事实，而在于蕴涵的显著特征，即命题群集形式与尼克德公理对应这一事实本身。这一公理的形式实际上是在三个命题($p \supset q \cdot r$)之间进行简单嵌套或者析取交集的蕴涵形式，也是自身蕴涵(同一运算：$t \supset t$)形式和递推形式：要么蕴涵递增$[(p \cdot s) \supset (q \cdot s)]$，要么不兼容性递减$[(q' | q) \supset (p | q')]$。这些都是群集的基本元素。

上述形式对应让我们觉得互反蕴涵或许为真，亦即，命题“群集”概念和尼克德“唯一公理”之间，或许存在等价关系。这也会成为“群集”理论和命题理论关系间的真正问题：尼克德公理就它本身而言，是否包含了命题“群集”的概念？我们接下来将予以探讨。

要解决这一问题，首先要注意形式化的多样性，或者说相关公理的言语表达的多样性。比如，原初的形式是$(P | \pi | Q)$，表达为公式 $P = p | (q | r)$；$\pi = t | (t | t)$；$Q = (s | q) | (\overline{p | s})$。写成常用的概念，这些公式的意思是 $P \supset (\pi \cdot Q)$，即(P 同时蕴涵 π 和 Q)，$P = [p \supset (q \cdot r)]$同时 $\pi = (t \supset t)$。至于 Q，罗素解释说：“p 和 s 的集合蕴涵了 s 和 q 的集合，”①即$(p \cdot s) \supset (q \cdot s)$。阿诺德 · 雷蒙(A. Reymond)则从他的角度和费斯(Feys)共同解释说②：“一切情况下排斥了 q 的 s 都会被 p 排斥，”即$(s | q) \supset (p | s)$。这后一种解释，和罗素的解释等价，在我们看来却更接近尼克德公式，这是因为$[(s | q) | (\overline{p | s})] = (s | q) \supset (p | s)$。不过，正如$(s | q) \supset (p | s)$和$(p \cdot s) \supset (q \cdot s)$只有在两个公式的命题 s 相同的情况下才会等价，我们无差别地(indifféremment)将其记作$(p \cdot s) \supset (q \cdot s)$和$(\bar{s} | q) \supset (p | \bar{s})$，$s$ 是与 p 和 q 存在联结的任意命题，而 $\bar{s}$ 则是与 p 和 q 都不兼容的任意命题。

尼克德的“唯一公理”也写作：

(9) $$[p \supset (q \cdot r)] \supset \{(t \supset t) \cdot [(p \cdot s) \supset (q \cdot s)]\}$$

和(9.2) $$[p \supset (q \cdot r)] \supset \{(t \supset t) \cdot [(q | \bar{s}) \supset (p | \bar{s})]\}$$

也就是说，为了证明公理蕴涵群集 p, q, r, s, t 等(因此也蕴涵了所有其他命题集合的群集，这些命题呈现出相同的关系，并置入先前的序列或置于这些序列之后)，我们需要分别考察 p, q, s 之间的已知的或建构的关系(Ⅰ)，r 和 p, q, s 之间的已知的或建构的关系(Ⅱ)，$(t \supset t)$和整体的已知的或建构的关系(Ⅳ)及否命题和“二级”蕴涵之间的已知的或建构的关系(Ⅲ)。

---

① 《数学逻辑导论》(Payot 巴沃)，第 183 页。

② 阿诺德 · 雷蒙：《逻辑准则与当代批评》，Boivin 波尔温(1932)，第 103 页。

Ⅰ. 对 p,q,s 而言，蕴涵关系 $p\supset q$ 是已知的。故而只存在三种可能事件：$q\supset s$①（或 $s\supset q$）；$q=s$；$q\vee s$。于是，两个命题之间就有 16 种可能的排列，实际上，除冗余性之外所有其他的关系都将命题(9)中建构的合取（$q\cdot s$）排除在外了。即，除了在 q 和 s 等价的情况下，否则它们理应永不构成合取（$q\cdot s$）。

此外，倘若我们提出 $q\vee s$，可能会导致 qs，$\bar{q}s$ 和 $q\bar{s}$ 的真值。但 $q\bar{s}$ 的真值在命题(9)中排除了 $q|\bar{s}$（和 $q\bar{s}$ 等价）等在命题(9.2)中的真值，由此我们排除了 $q\vee s$ 的选项。

故而剩下的概率事件是 $q\supset s$，或 $s\supset q$，或 $q=s$ 等价。不过蕴涵 $s\supset q$ 无法推导出命题(9.2)中 $\bar{s}|q$ 的不兼容性。从而只剩下 $q\supset s$ 或 $q=s$。

倘若我们有 $p\supset q$ 和 $q\supset s$（或 $q=s$），则序列 p,q,s 可以归约为命题(3)的形式②，现在我们只需要判定 r 和 t 的位置关系。

Ⅱ. 涉及 q,s 与 r 的关系，我们又有了三个独立的可能事件：蕴涵[$r\supset q$ 或 $r\supset s$，或 $r\supset(q\cdot s)$；或 $q\supset r$，或 $s\supset r$，或 $(q\cdot s)\supset r$]，等价（$r=q$，或 $r=s$，或 $r=q=s$）和析取（$r\vee q$ 或 $r\vee s$，$r\vee s$ 和 $r\vee q$）。

倘若有蕴涵：$r\supset q$，或 $r\supset s$，或 $r\supset(q\cdot s)$，或 $s\supset r$，或 $(q\cdot s)\supset r$，或者还有等价，我们都能[根据 $p\supset(r\cdot q)$ 和 $q\supset s$]得出 $pqrs$，或 $prqs$，或 $pqsr$ 序列，从而呈现出命题(3)中群集的形式。倘若我们有 $q\supset r$ 而不是 $s\supset r$（从而 $s\vee r$），那么 pq 和 r 的关系将会保存命题(3)的形式，s 和 r 的关系则将如下所述。

现在假设我们有 $q\vee r$。根据 $q\supset s$，我们能得到 $s\vee r$。如果我们有 $q\vee r$，接下去三个真值将是：qr，$\bar{q}r$ 和 $q\bar{r}$，而 $s\vee r$ 对应的三个真值：sr，$\bar{s}r$，$s\bar{r}$。将这些真值和蕴涵 $q\supset s$ 组合起来，我们得到如下的二项表格。其中一个项由 r 和 $\bar{r}$ 二元对立构成；另一个项由蕴涵 $q\supset s$ 推导出的真值 qs，$\bar{q}s$，$\bar{q}\bar{s}$ 构成：

(10)

	qs	$\bar{q}s$	$\bar{q}\bar{s}$
r	qrs	$\bar{q}rs$	$\bar{q}r\bar{s}$
$\bar{r}$	$q\bar{r}s$	$\bar{q}\bar{r}s$	$\bar{q}\bar{r}\bar{s}$

从这一表格可直接得出命题(9)和命题(9.2)：实际上，倘若 $p\supset(q\cdot r)$，就有 $(p\cdot s)\supset(q\cdot s)$，这是因为唯一包含 qr 的屉格（即 pqr）也包含了 s，而排除 s 的方格既不包含 q 也不包含 p。

如上表格也准确地反映了适用于命题(6)，(6.2)和(7)的“群集”形式，这里用字母 q 和 r 代表的命题，在命题(6)(7)中用符号 q_1 和 q_2 代表（命题 $\bar{q}$ 和 $\bar{r}$③则用符号 q'_1 和 q'_2 代表）。此处除 $r\vee s$ 之外仅有一个选项介入，不过“群集”(6)(7)仍然包含了我们想要的成分。

---

① 此处原文是 $p\supset s$，但根据下文推断，此处的 p 应该是 q 的误笔。——译者注

② 命题(3)当中，此处被称为 s 的命题用符号 r 表示。

③ 此处原文是 q 和 r，但依据上下文判断，此处应该是 $\bar{q}$ 和 $\bar{r}$ 的误笔，故此更正。——译者注

由此我们认为，与尼克德公理蕴涵相联结的四种任意命题，即$[p\supset(q\cdot r)]\supset[(p\cdot s)\supset(q\cdot s)]$，根据命题(3)(6)(7)的形式，它们内部存在必然性的“群化”(groupées)。换言之，要么 $pqrs$ 四个命题仅仅包括无析取($\vee$)的蕴涵，从而归约为形式(3)，要么包含一到两个析取($r\vee q$ 和 $r\vee s$)，并采用(6)和(7)的形式。

Ⅲ. 在考察为何 $p\supset(q\cdot r)$蕴涵了$(t\supset t)$之前，我们应当明确否命题 $\bar{p},\bar{q},\bar{r},\bar{s}$ 之间的关系，这些命题曾出现在前文的组合中，我们在群集(3)(6)(7)当中称其为“二级”蕴涵：$p'\supset q,q'\supset r$，等等。实际上，我们从命题(3)得出了命题(5)，从命题(6)(7)得出了(8)。继而，在命题(5)(8)之中，命题 p 和 q 与命题 q' 不兼容，而不是与任意命题如 $\bar{s}$ 不兼容。倘若我们将尼克德命题$[p\supset(q\cdot r)]\supset[(q|\bar{s})\supset(p|\bar{s})]$归约为(3)或(7)形式的群集，将会增强这一论证的严密性。继而，这一公理本身随即为我们提供了方法。实际上，让我们假设一个命题序列 $p,q,r,s,t,\cdots$，并有 $p\supset q,q\supset r,r\supset s$，等等。倘若$[(x|q)\supset(x|p)]$，我们也能同样得到$[(x|r)\supset(x|p)]\supset[(x|s)\supset(x|r)]$，以此类推。反过来，倘若$[(x|q)\supset(x|p)]$，我们不能得出结论说$[(x|p)\supset(x|q)]$，这是因为命题 p' 由其定义$(p'|p)\cdot(p'\supset q)$。同理，我们可得$[(q'|q)\cdot(q'\supset r)]$，$[(r'|r)\cdot(r'\supset s)]$，等等。倘若我们按这种二分法追溯，尽可能利用(épuisement)所考察的全部命题系统，那么介入$[(x|q)\supset(x|q)]$的命题 x 必将从属于集合 $p',q',s',t',\cdots$，并且被“二级”命题集合(即 p',q',s' 等)所定义，这个“二级”命题集合对应于我们讨论过的“初级”命题，还对应于它自身的高阶秩序命题：譬如，对$[(x|q)\supset(x|p)]$而言，命题 x 应当有 $q'\text{W}s'\text{W}t'\text{W}a'$，以此类推。实际上，倘若$(x|q)$，那么 $x\supset\bar{q}$。继而，$\bar{q}$ 的真值由它之前的命题判定，依照如下表格：

(11)	$\bar{p}=p',q',r',s',t',u',\cdots$	对应着	$q\supset(p\|p')$
	$\bar{q}=q',r',s',t',u',\cdots\cdots$		$r\supset(q\|q')$
	$\bar{r}=r',s',t',u',\cdots\cdots\cdots$		$s\supset(r\|r')$
	$\bar{s}=s',t',u'\cdots\cdots\cdots\cdots$		$t\supset(s\|s')$
	$\bar{t}=t',u',\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$		$u\supset(t\|t')$
	等等		等等

当命题$[p\supset(q\cdot r)]\supset[(q|x)\supset(s|p)]$被归约为(6)(7)形式群集的(唯一的其他可能)情况下，排除了 p 和 q 的命题 s 同时被二级蕴涵 q',s',t' 所决定，“尽可能利用所考察的系统，并去掉表格(11)中的 r 和 r'，它们现在具备了析取意义，并在另一方面呈现出与 p 与 q 的关系。更确切来说，从析取($\vee$ 而不是 W)开始，我们发现了另一种形式的初级与二级命题组合(见命题 6 与 6.2)，其完整形式如下：

(12)

	a_1	a'_1 (b_1)	b'_1 (c_1)	c'_1 (d_1)	d'_1 (e_1) ......
a_2	a_1 a_2	a'_1 a_2	b'_1 a_2	c'_1 a_2	d'_1 a_2
a'_2 (b_2)	a_1 a'_2	a'_1 a'_2	b'_1 a'_2	c'_1 a'_2	d'_1 a'_2
b'_2 (c_2)	a_1 b'_2	a'_1 b'_2	b'_1 b'_2	c'_1 b'_2	d'_1 b'_2
c'_2 (d_2)	a_1 c'_2	a'_1 c'_2	b'_1 c'_2	c'_1 c'_2	d'_1 c'_2
d'_2 (e_2)	a_1 d'_2	a'_1 d'_2	b'_1 d'_2	c'_1 d'_2	d'_1 d'_2

a_2 b_2 c_2 d_2 e_2

a_1 b_1 c_1 d_1 e_1

由表格(10)又能改写出如下形式:

(10.2)

	qs	$q's$	$s't$
r	qrs	$q'rs$	rs'
r'	$qr's$	$q'r's$	$r's'$

在表格(10.2)中,r 和 r' 对应着表格(12)的 a_2 和 a'_2;q 和 s 对应着 a_1 和 b_1;$\bar{p}$,$\bar{q}$,$\bar{r}$ 和 $\bar{s}$ 等的真值则由二级命题集合所决定,二级命题对应着当前命题又高于当前命题。而在(10.2)这样的形式之下,表格(10)对应着群集(6—7)。

以这样一种整体系统的形式——即四种命题及其结果之间的蕴涵和不兼容性的系统——来建构如(11)(12)形式的简单的析取性表格,这一建构的可能性显示了尼克德的“唯一公理”自身包含了一个系统(或两种系统的组合),这一系统具备连续的二元性,以可逆的方式组合,确切来说,它就是一个“群集”。

Ⅳ. 我们能够理解$[p\supset(q\cdot r)]$何以蕴涵命题$(t\supset t)$。奇怪的是,这样的自主蕴涵$(t\supset t)$在尼克德命题中(形式化表达为:$[p\supset(q\cdot r)\cdot(t\supset t)]\supset[(p\cdot s)\supset(q\cdot s)]$)并不处于第一端位(membre),而是在第二端位,由$[p\supset(q\cdot r)]$所决定。再有,$[p\supset(q\cdot r)]$这一表达式如何推导出$(t\supset t)$?很明显,首先根据 $p\supset t$(或 $p=t$),或 $p\vee t$。但是,为什么从中推导出了$(t\supset t)$?

在无析取($\vee$)蕴涵 $p\supset q$;$q\supset r$;$r\supset s$;$s\supset t$ 的情况下,我们得到$[(p\supset q)\cdot(p'\supset q)]\supset[q\supset(p\ \mathrm{W}\ p')]$;…;$[(s\supset t)\cdot(s'\supset t)]\supset[t\supset(s\ \mathrm{W}\ s')]$。从而得到等价 $t=s\ \mathrm{W}\ s'$,得到$t\supset t$。在 $p\vee t$(或 $q\vee t$ 等)的情况下,也能找到相似的组合,但会涉及 t 和(以互补的方式)蕴涵 t 的其他命题之间的关系。

于是,包含在尼克德的“唯一公理”中的命题($t \supset t$)显示了公理与命题“群集”之间的等价关系,蕴涵($t \supset t$)发挥了系统同一性的运算功能。

总之,所有由命题项表达的分类的或关系的群集,都能衍生出命题蕴涵或不兼容性的“群集”。我们已经展示了分类加法和一一对应乘法的情况,但显然,倘若命题群集的一般形式适用于这两种情况(命题 3 和 7),它也可以适用于其他六种情况,这是由于这些运算虽有不同的分化,但全部都呈现出相同的初始基本嵌套。再有,我们所论证的命题群集,也蕴涵在尼克德的“唯一公理”之中,需要说明的是,尼克德公式和群集结构之间是等价的。这一事实很是理所当然,简单来说,若想逻辑地进行推理,命题(已知的蕴涵和建构的蕴涵)需要涵盖已分类的类属和已排序的关系。

故而在分类逻辑和关系逻辑之间,存在着我们所能想到的最紧密的关联,其逻辑结构由对应的命题群集来解释,而从公理(被尼克德浓缩为一个综合公式)出发的演绎逻辑则解释了隐性的结构化过程。尤其是,这些关联比夏·瑟路斯在《逻辑论》中所提出的关系更为紧密,不难得见,命题理论可以独立于这些联结,姑且不论独立与否,命题理论理应从自身出发,同时为了自身而接受公理化。

让·皮亚杰